泛函微分方程

FANHAN WEIFEN FANG CHENG

泛函微分方程

李森林　温立志

湖南科学技术出版社

泛函微分方程

李森林　温立志

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路8号）
湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷

*

1987年1月第1版第1次印刷
开本：850×1168毫米　1/32　印张：15.625　插页：4　字数：412,000
印数：1——1,700
ISBN 7—5357—0020—3/O·1

统一书号：13204·148　**定价：5.85元**

湘目：86—10

序　言

由于近代科学技术的发展，在许多科学领域的研究中，例如力学、物理学、生物数学、经济数学、自动控制、通讯理论等等，都涉及到微分差分方程和微分积分方程。因为这些方程比常微分方程更精确地描述了客观世界。泛函微分方程就是这些方程的总称和概括。因此对泛函微分方程的研究，不但有重要的理论价值，而且有实用价值。

近年来，泛函微分方程在国内外发展很快，论文很多，但专著较少。在我国除了1963年出版过秦元勋教授等合编的《带时滞的动力系统的运动稳定性》一书外，到现在尚无专著。为了便于初学及开展这方面的工作，泛函微分方程的专著出版是很有必要的，本书即为此目的而作。

对于本书，我们在此作些说明。

第一，本书明确地将泛函微分方程划分为三大方向，即有界滞量的泛函微分方程、无界滞量的泛函微分方程，以及无穷延滞的泛函微分方程三个方向。在1978年以前，大多数的论文是研究有界滞量的泛函微分方程。J. K. Hale在1977年出版的专著《Theory of Functional Differential Equations》，就是当时对有界滞量泛函微分方程的研究的最新总结。自1978年以来，无界滞量和无穷延滞的泛函微分方程得到了极大的发展，系统的理论逐步地建立起来了。本书总结这方面的资料，系统地介绍这三个方向的内容，这就更全面地反映了整个泛函微分方程的研究情况。

第二，稳定性理论是常微分方程研究的重要内容，也是泛函微分方程研究的重要内容。近年来在这方面出现了许多新的研究成果，故本书以较多的篇幅着重介绍这方面的工作。

第三，振动理论是常微分方程和泛函微分方程的一个重要分支。近年来泛函微分方程的振动理论获得很大的发展，论文很多。本书特立一章扼要地介绍这方面的成果。

第四，由于本书涉及的面较广，而篇幅有限，故有些内容不可能作深入的介绍，读者可在参考文献中得到更多的补充。

由于我们编写这本书的时间比较仓促，所以在内容的取舍和安排上考虑得还不够周到，加上作者水平有限，故错误之处在所难免，切望同行及读者斧正。

全书的主要撰写工作，是由温立志负责完成的。

在这里我们对吴建宏同志的大力协助表示感谢。他阅读了本书的全部手稿，提出了不少宝贵的意见。此外，还协助作者编写了本书的部份内容。

李森林

温立志

1985年3月

目　　录

绪　论

在自然科学和工程技术的研究中，许多现象都用微分方程作为它们的数学模型，这些问题实际上都是假定事物的变化规律只与当时的状态有关，而和过去的历史无关，就一阶微分方程

$$\frac{dx(t)}{dt}=f(t,x(t)),\quad x(0)=c$$

而言，它描述的量x在时刻t的变化率是仅仅依赖于t和$x(t)$本身，而不依赖于x在时刻t以前的值。

但是，事实告诉我们，许多事物的变化规律不仅依赖于当时的状态，还依赖于过去的状态，在这种情况下，微分方程就不能很精确地描述客观事物了，代之而起的就是微分差分方程特别是带时间滞后的微分方程。事实上，在缜密的考察之下便会发现，除了理想的情形以外，动力系统总是存在滞后现象的，即使质点间力的传递或者以光速传递的信息也是如此，在自动控制的装置中，从输入信号到收到反馈信号，也必然相差一段的时间，因此，用传统的微分方程去描述系统的状态只是一种近似，必须符合精度的要求才行，否则将导致错误，下面列举一些实例来说明时滞微分方程在科学技术中出现的广泛性。

例1　1973年，W.P.London和J.A.Yorke 研究了麻疹传播的模型[1]为

$$\dot{S}(t)=\beta(t)s(t)[S(t-12)-S(t-14)-2r]+r.$$

其中$S(t)$表示在时刻t无免疫力的个体数目，r是这种个体在人口

中所占的比例，$\beta(t)$为人口特征函数，常数滞量14和12是潜伏期的上限和下限。

例2 1952年，К·Ф·ТеоДорчик得出了电磁开关触头的振动方程[2]。

$$m\ddot{x}(t)+r\dot{x}(t)+kx(t)=\tilde{f}(t-\Delta,x)。$$

其中m为触头的质量，r表示系统的摩擦（或阻尼）特性，k表示弹性恢复力的特性，函数$\tilde{f}(t,x)$表示作用在开关的触头上的力$f(t,x)$的共振分量，Δ为一个正数。

例3 С·Б·Норкин在他的专著[3]中，介绍了先由Tischler和Bellman后由Корokko和ЧЖенСинъи研究过的液体燃料火箭的燃烧过程，设W_0是固定的输入燃烧室的燃料质量的速度，$W_1(t)$是燃烧的质量速度，$W_2(t)$是输入燃烧室的质量的速度，输入的与燃烧着的燃料之间存在某种时间上的滞后：$W_1(t)=W_2(t-\tau(t))$。若略去压力小误差引起燃烧室内的温度变化，则输入流动过程中的小扰动$x(t)=W_2(t)-W_0$应满足方程：

$$\ddot{x}(t)+\alpha\dot{x}(t)+\beta x(t)+\gamma x(t-\tau(t))=\delta。$$

其中α、β、γ、δ取决于油箱与燃烧室的压力差，油管的长度，截面积，摩擦系数，燃料的流动速度、比重等因素。

例4 1935年J.Tinbergen[4]研究了造船工业中的模型

$$\dot{x}(t)+bx(t-\tau)=ex^3(t-\tau)。$$

其中$x(t)$表示时刻t的实有吨位数同预定值之差，τ表示建造一艘船的平均周期，$b>0$及e均为常数。

例5 1964年J.J.Levin和J.Nohel在研究核反应堆的燃料的循环理论中遇到了这样的方程：[5]

$$\dot{x}(t)=-\int_{t-\tau}^{t}a(t-u)g(x(u))du。$$

其中$x(t)$是表示时刻t时的中子密度。

例6 1963年Н.Н.Крхсовский在最优控制理论中研究了如下的方程组：[6]

$$\dot{x}(t)=P(t)x(t)+B(t)u(t),$$

$$y(t)=Q(t)x(t),$$

$$\dot{u}(t)=\int_{-r}^{0}\left[d_t\eta(t,\theta)\right]y(t+\theta)+\int_{-r}^{0}\left[d_\theta\mu(t,\theta)\right]u(t+\theta).$$

这里的积分是黎曼—斯蒂尔吉斯积分。

例7 1976年R. Brayton研究了无损传输线连接问题时得到为如下形式的方程

$$\dot{u}(t)-k\dot{u}\left(t-\frac{2}{S}\right)=f\left(u(t),u(t-\frac{2}{S})\right).$$

其中$S=\sqrt{LC}$。

从以上几个例子可以看到，时滞微分方程有着广泛的应用，它涉及许多学科中的许多领域，如人口理论〔7〕、〔8〕、〔9〕、医学问题〔10〕、〔11〕、〔12〕、〔13〕、生物学〔14〕、〔15〕、〔16〕、〔17〕、经济问题〔18〕、〔19〕、〔20〕、〔21〕、自动控制理论〔22〕、〔23〕、〔24〕、〔25〕、〔26〕、〔27〕、物理学〔2〕、〔9〕、〔28〕、〔253〕等许多的方面。

从以上的例子中还可以看到，时滞微分方程的形式是多种多样的，有线性的，有非线性的，有一阶的，有高阶的，有一个方程的，有方程组的，有自治的，有非自治的以及各种可以分类的特点，这些分类的特点与常微分方程是类似的或者是相同的，但是其中有一个重要的特点是常微分方程所没有的，就是偏差量的区别，人们利用偏差量的区别将时滞微分方程分为滞后型、中立型、超前型、混合型等等（见第一章§1）。

例3是特别值得注意的，方程中出现的滞后量不是常数，而是函数$\tau(t)$，一般地，人们把形如

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),\ x(t-\tau_2(t)),\cdots x(t-\tau_m(t))) \tag{1}$$

的方程叫做广义的微分差分方程，或叫做变时滞的微分方程，历史上很多人称之为泛函微分方程。

值得注意的是f的定义域，它是定义在$\underbrace{\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\cdots\times\mathbf{R}}_{m+2\text{个}}$上的函

数。即使方程(1) 作为方程组出现，其中x及f都是n维向量函数，此时f也只是定义在$\mathbf{R}\times\underbrace{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\cdots\times\mathbf{R}^n}_{m+1\text{个}}$之中。

1959年，H.H.Красовский用泛函分析的观点，将f看作是$\mathbf{R}\times C\to\mathbf{R}^n$的连续泛函，($C$是连续函数空间)从而方程(1)当各个$\tau_i(t)$有界时可以表为

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t) \tag{2}$$

的形式，其中$x_t\in C$，这样一来，方程(2) 不但把常微分方程、常时滞的微分差分方程、变时滞的微分差分方程，甚至如例6那样具有积分形式时滞方程都统一起来，而且具有与常微分方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t)), \tag{3}$$

类似的形式，所不同者，(2)中的f定义在$\mathbf{R}\times C$中而(3) 中的f 定义在$\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$中。因此，泛函微分方程(2) 也可以看作是函数空间 中的常微分方程。

自1959年以来，无论是一般的泛函微分方程或者是较具体的微分差分方程，其发展是非常迅速的，在解的基本理论、稳定性理论、周期解理论、振动理论、解算子理论、分支理论等许多方面都出现了重要的成果，70年代以来，每年都有数以百计论文问世，专著也陆继出现，其中J. K. Hale在1977 年出版的《Theory of Functional Differential Equations》是最新的总结，自1977年以来，无穷延滞和无界滞量的泛函微分方程也跟着兴起，它们与有界滞量的泛函微分方程形成三大方向，发展非常迅速。

在我国，有些学者在文化革命前已开始注意到泛函微分方程这个方向，出现了一些研究成果，秦元勋、刘永清、王联在1963年出版了专著《带有时滞的动力系统的运动稳定性》。到文化革命时这个方向的研究被迫中断了。直到1978年在青岛举行第一届微分方程会议，又开始重视起来。1979年在长沙举行了第一届全国泛函微分方程会议，1981年在合肥举行了第二届全国泛函微分方程会议，1984年在峨嵋举行了第三届全国泛函微分方程会议，通过这三次会议，大大地促进了我国泛函微分方程的研究与发展。

不但人数上大大地增加，而且研究的方向也愈来愈广泛，论文的水平也愈来愈高。相信不久的将来，这个数学分支一定会更加兴旺，它对我国四个现代化建设，将必作出更多更大的贡献。

第一章

泛函微分方程的概念及分类

§1 微分差分方程的概念及分类

1 微分差分方程的分类

在常微分方程$\dot{x}(t)=f(t,x(t))$中，未知函数x在时刻t的变化速度,只是与时刻t及状态$x(t)$有关,但从绪论中的实例可以看到，在自然现象中有些状态的变化速度不但与当时的状态有关，而且与过去的状态有关，如例1中W.London与J.Yorke关于麻疹传播的模型

$$\dot{S}(t)=\beta(t)S(t)[S(t-12)-S(t-14)-2r]+r.$$

它表明在时刻t的无免疫力的人数的变化速度$\dot{S}(t)$不但与$S(t)$有关，而且与12天前和14天前的感染人数有关，一般地，如果一个方程具有如下的形式

$$\dot{x}(t)=f(t,\ x(t),x(t-r_1),x(t-r_2),\cdots,x(t-r_n)).\tag{1}$$

其中r_i为常数，则此方程叫做微分差分方程(Differential Difference Equation，简写为DDE)，r_i叫做偏差,这种方程的线性形式为

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}a_i(t)x(t-r_i)+g(t).\tag{2}$$

当$g(t)\equiv0$时方程(2) 是线性齐次的,当$g(t)\not\equiv0$时便是非齐次的。

关于DDE的分类，现在还没有一套完整的方法，一般只作如

下的分类：

① 当$r_i>0(i=1,2,\cdots,n)$时，则称方程(1) 为滞后型的微分差分方程 (Retarded Differential Difference Equation, 简写为RDDE) 或时滞微分方程，各个r_i均称为滞后量或滞量。

② 当$r_i\leqslant 0\ (i=1,2,\cdots,n)$时，则称方程(1) 为超前型的微分差分方程 (Advanced Differential Difference Equation, 简写为ADDE) 或时超微分方程，各个r_i均称为超前量或超量。

③ 如果方程具有如下的形式：

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-r_1)\cdots,x(t-r_n),\dot{x}(t-\tau_1),\cdots,\dot{x}(t-\tau_m)). \quad (3)$$

其中$r_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$，$\tau_i>0(i=1,2,\cdots,m)$，则称此方程为中立型的微分差分方程 (Neutral Differential Difference Equation, 简写为NDDE)。

上述的分类方法是不完整的，例如方程

$$\dot{x}(t)=ax(t-1)+bx(t+1)$$

就不属于上述的三种类型。

对方程组的分类可类似地进行，只要将上述分类中的“函数”一词代之以“向量函数”即可。

在应用中最经常遇到的是滞后型，它的理论也被研究得比较深入和广泛，其次是中立型，超前型的研究进展甚微。

2 微分差分方程概念的推广

上述的微分差分方程中有两个特点，一是偏差r_i及τ_i都是常数，二是偏差的个数是有限的，但实际应用上已超出这两个特点的范围，出现偏差不是常数及偏差的数目为无限的情形。

在方程(1) 中，如果偏差r_i是t的函数，即

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-r_1(t)),\cdots,x(t-r_n(t))). \quad (4)$$

此时方程(4) 是一种广义的微分差分方程，我们仍然称之为微分差分方程，亦有文献称之为具偏差变元的微分方程。

如果$r_i(t)\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$，则(4) 是滞后型的。亦有人称之为变时滞微分方程。

如果$r_i(t)\leqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则(4) 是超前型的，亦有人称之为变时超微分方程。

同理，如果方程(3)中的各个r_i及τ_i均是t的函数，且$r_i(t)\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，$\tau_i(t)>0$ $(i=1,2,\cdots,m)$，则对应的广义微分差分方程是中立型的。

下面我们将DDE进行另一种形式的推广，首先回顾方程(2)，

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}a_i(t)x(t-r_i)+g(t)。$$

若$r=\max(r_1,\cdots,r_n)$，则各个偏差r_i离散地分布在区间[0, r]之中，现设想偏差不是离散地而是连续地分布在[0, r]之上，此时方程(2) 应转化为积分的形式，即

$$\dot{x}(t)=\int_0^r a(t,s)x(t-s)ds+g(t)。\tag{5}$$

这种形式的方程称为微分积分方程，它是线性的。非线性的情形可写成如下的形式

$$\dot{x}(t)=\int_0^r f(t,s,x(t-s))ds,\quad (r>0)。\tag{6}$$

3　微分差分方程的初值问题

下面介绍滞后型和中立型的微分差分方程的初值问题的提法。至于超前型的初值问题，至今尚未有一个公认的提法。

设$\mathbf{R}=(-\infty,\ \infty)$，$\mathbf{R}^+=[0,\infty)$，$D$为$\mathbf{R}^n$中的一个开集。

①　滞后型微分差分方程的初值问题

在这里我们假定方程的滞后量都是t的连续函数，下面分四种情形进行考察，

(i)　有界滞量的方程的初值问题

设方程为

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-r_1(t)),\ \cdots,\ x(t-r_m(t)))。\tag{7}$$

其中　f：$\mathbf{R}\times D^{m+1}\to\mathbf{R}^n$，$0\leqslant r_i(t)\leqslant r$ $(i=1,2,\cdots,m)$。

如何给出方程(7)的初值？什么叫做方程(7)满足初值问题的

解？这与常微分方程是不同的。

首先给定一初始时刻$t_0\in\mathbf{R}$，若函数$x(t)$在$[t_0,b)$上是方程(7)的解，就必须要求$x(t)$在$[t_0,b)$上有定义且满足方程(7)，但(7)中含有$x(t-r_i(t))(i=1,2,\cdots,m)$，当$t_0\leqslant t\leqslant t_0+r$时，$t-r_i(t)$有可能落在区间$[t_0-r,\ t_0]$之上，但是$x(t)$在$[t_0-r,\ t_0]$上是没有定义的，它等于多少，有待我们预先给定。例如给定$x(t)\equiv\varphi(t)$，$t_0-r\leqslant t\leqslant t_0$，那末$\varphi(t)(t_0-r\leqslant t\leqslant t_0)$就是方程(7)的一个初值，我们称之为初始函数，$t_0$与$\varphi(t)$合起来构成方程(7)的一个初始条件。

所谓方程(7)满足初值$\varphi(t)$ $(t_0-r\leqslant t\leqslant t_0)$的解，是指这样的函数$x$：$[t_0-r,\ b)\to D$，它在$[t_0-r,\ t_0]$上恒等于$\varphi(t)$，在$[t_0,b)$上满足方程(7)。

上述的初值问题的提法，是常用的提法，但仔细考察一下，便会发现它是不够精确的，例如方程 $\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-\sin^2 t)$，$a$和$b$为常数，它是滞后型的方程，滞量$r(t)=\sin^2 t\leqslant 1$，故有界。按上述的提法，对任一初始时刻$t_0$，初始函数$\varphi(t)$应在区间$[t_0-1,t_0]$上给出。但当我们取$t_0=\frac{\pi}{4}$时，满足$t\geqslant\frac{\pi}{4}$的一切$t-\sin^2 t$的值，均只落在区间$\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2},\ \frac{\pi}{4}\right]$之中，因此，初始函数$\varphi(t)$只需在区间$\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2},\ \frac{\pi}{4}\right]$给出即可，无需在区间$\left[\frac{\pi}{4}-1,\ \frac{\pi}{4}\right]$给出，因为在$\left[\frac{\pi}{4}-1,\ \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$上的$\varphi(t)$对方程毫无作用。如果我们取初始时刻$t_0=0$，此时，满足$t\geqslant 0$的一切$t-\sin^2 t$的值均不小于零。可见，初值只需在$t_0=0$处给出即可，例如$x(0)=x_0$。在区间$[-1,\ 0]$上给出初值是不必要的。

当初始时刻t_0给定以后，初值$\varphi(t)$的精确定义范围应该是如下的集合：

$$E_{t_0}=\bigcup_{i=1}^{m}\{t-r_i(t):\ t-r_i(t)\leqslant t_0,\ t\geqslant t_0\}\cup\{t_0\}. \tag{8}$$

由于各个$r_i(t)$均为连续有界，故E_{t_0}一般是以t_0为右端点的一个闭区间，在特殊情况时，E_{t_0}可能退化为单点集$\{t_0\}$。E_{t_0}称为方程(7) 的初始集。

(ii) 无界滞量的方程的初值问题

如果方程(7)中的滞量$r_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,m)$中有一个或多个是无界的，则初始集可能出现下列的几种情形：

1° E_{t_0}是一个以t_0为右端点的闭区间。

2° E_{t_0}是一个不连通集。

3° E_{t_0}为单点集$\{t_0\}$。

例1 方程为 $\dot{x}(t)=f\left(t,x(t),x\left(t-\dfrac{t}{2}\right)\right)$ $(t\geqslant 0)$，

当$t_0=0$时，$E_{t_0}=\left\{\dfrac{t}{2}: \dfrac{t}{2}\leqslant 0,\ t\geqslant 0\right\}\cup\{0\}=\{0\}$，为单点集。

当$t_0>0$时 $E_{t_0}=\left\{\dfrac{t}{2}: \dfrac{t}{2}\leqslant t_0, t\geqslant t_0\right\}=\left[\dfrac{t_0}{2},\ t_0\right]$。

例2 方程为 $\dot{x}(t)=f(t,x(t),\ x(te^{-t}))$ $(t\geqslant 0)$，

当$t_0=0$时，$E_{t_0}=\{te^{-t}\leqslant 0;\ t\geqslant 0\}\cup\{0\}=\{0\}$。

由于函数te^{-t}在$[0,1]$上为单调增加，在$[1,\ \infty)$上为单调减少而趋于零。故当$0<t_0\leqslant e^{-1}$时，

$$E_{t_0}=\{te^{-t}: te^{-t}\leqslant t_0,\ t\geqslant t_0\}\cup\{t_0\}=(0,t_0];$$

当$t_0>e^{-1}$时，

$$E_{t_0}=(0,e^{-1}]\cup\{t_0\}，这是一个不连通集。$$

② 中立型微分差分方程的初值问题

为方便起见，我们只讨论方程含一个滞量的情形，设中立型微分差分方程为

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),\ x(t-r(t)),\dot{x}(t-r(t)))。\qquad (9)$$

其中f：$\mathbf{R}\times D^2\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$，$0\leqslant r(t)\leqslant r$。

对于给定的初始时刻t_0，由于滞量$r(t)$有界，故初始函数$\varphi(t)$可在区间$[t_0-r,\ t_0]$上给出。不过方程(9)中含有$\dot{x}(t-r(t))$，如果$t-r(t)$落在$[t_0-r,\ t_0]$上，则$\dot{x}(t-r(t))=$

$\dot{\varphi}(t-r(t))$，可见$\varphi(t)$要可微才行。所谓方程(9)满足初值的解，是指那些可微函数x：$[t_0-r,\ b)\to D$，$(b>t_0)$，它在$[t_0-r,t_0]$，上恒等于$\varphi(t)$，在$[t_0,\ b)$上满足方程(9)。

但实际上这个初值问题的提法是难于实现的。我们以较简单的线性方程为例。

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-r)+c\dot{x}(t-r). \tag{10}$$

设初始时刻$t_0=0$，现在$[-r,0]$上给定初始函数$\varphi(t)$，我们进一步假定$\varphi(t)$是连续可微的，在一般情况下

$$\dot{\varphi}(0)\neq a\varphi(0)+b\varphi(-r)+c\dot{\varphi}(-r). \tag{11}$$

如果$x(t)$为方程(10)的解，则 $x(t)\equiv\varphi(t)$，$-r\leqslant t\leqslant 0$，故$\dot{x}(t)\equiv\dot{\varphi}(t)$。另一方面，$x(t)$当$t\geqslant 0$时必须满足方程(10)，故

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(0)=\dot{x}(0)&=ax(0)+bx(-r)+c\dot{x}(-r)\\&=a\varphi(0)+b\varphi(-r)+c\dot{\varphi}(-r).\end{aligned}$$

这与(11)式矛盾。故 $x(t)$ 在 0 处不能满足方程(10)，继而推知$x(t)$在$kr(k=0,1,2,\cdots)$处均不满足方程(10)。

值得注意的是，对如下形式

$$\frac{d}{dt}[ax(t)+bx(t-r(t))]=f(t,x(t),x(t-r(t))) \tag{12}$$

的中立型微分差分方程，其中 a 和 b 为非零常数，它的初始函数$\varphi(t)$不要求为可微，只要连续即可，因为(12)中不显含$\dot{x}(t-r(t))$之故。

4　分步法求解

对滞后型微分差分方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-r)), \tag{13}$$

设给定初始条件为$\varphi(t)$，$t\in[t_0-r,t_0]$，又设函微f和φ对于自己的变元为连续。

当$t_0\leqslant t\leqslant t_0+r$时，由于$x(t-r)=\varphi(t-r)$，故求方程(13)在区间$[t_0,t_0+r]$上满足初始条件的解，可转化为求下面的常微分方程满足初值的解：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x(t),\varphi(t-r)),\\ x(t_0)=\varphi(t_0).\end{cases} \tag{14}$$

假定(14)的解在区间$[t_0,t_0+r]$上存在，记为$x=\varphi_1(t)$，那末当$t_0+r\leqslant t\leqslant t_0+2r$时，有$x(t-r)=\varphi_1(t-r)$。于是方程(13)的初值问题在区间$[t_0+r,t_0+2r]$化成下面的常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x(t),\varphi_1(t-r)),\\ x(t_0+r)=\varphi_1(t_0+r).\end{cases}$$

这样逐步地做下去，便可将方程（13）的初值问题在区间$[t_0+nr,t_0+(n+1)r]$上的求解转化为求下面常微分方程的初值问题的解：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x(t),\varphi_n(t-r)),\\ x(t_0+nr)=\varphi_n(t_0+nr).\end{cases}$$

其中$\varphi_n(t)$是方程(13)的初值问题在区间$[t_0+(n-1)r,t_0+nr]$上的解。

以上的方法称为分步法，它给出在有限区间内确定解$x(t)$的可能性。

显然，上述的分步法亦可推广到具有连续变化的滞量$r(t)$的微分差分方程上去。不过$r(t)$必须满足$r(t)\geqslant a>0$。

§2　泛函微分方程的概念及分类

在这一节里，我们将介绍滞后型和中立型两类泛函微分方程的概念。由于这些方程的右端是定义在函数空间中的泛函，故人们称之为泛函微分方程（Functional Differential Equation，简写为FDE）。

1　滞后型泛函微分方程的概念

关于滞后型泛函微分方程(Retarted Functional Differential Equation，简写为RFDE)。我们分为三大类来研究。第一类是有界滞量的RFDE，第二类是无界滞量的RFDE，第三类是无穷

延滞的RFDE。

有界滞量的RFDE的例子如

例1 $\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-r_1(t)),x(t-r_2(t)))$.

其中 $0\leqslant r_i(t)\leqslant r, i=1,2$。这些滞量都是有界的。

例2 $\dot{x}(t)=\int_{t-r}^{t} g(t,s,x(s))ds \quad (r>0)$.

若令$s=t-u$，则方程可写成

$$\dot{x}(t)=\int_0^r g(t,t-u,x(t-u))du.$$

显然，$0\leqslant u\leqslant r$，可见上方程中的滞量u是有界的。

无界滞量的RFDE的例子是

例3 $\dot{x}(t)=f\left(t,x(t),x\left(t-\dfrac{t}{2}\right)\right) \quad (t\geqslant 0)$.

方程的滞量$r(t)=\dfrac{t}{2}$，它当$t\geqslant 0$时是无界的。

例4 $\dot{x}(t)=\int_0^t g(t,s,x(s))ds \ (t\geqslant 0)$.

若令 $s=t-u$，则方程可写成

$$\dot{x}(t)=\int_0^t g(t,t-u,x(t-u))du.$$

这里u是滞量，因$0\leqslant u\leqslant t$，u随t的增大而增大，故 u是无界的。

无穷延滞的例子如

例5 $\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-t^2)) \quad t\geqslant 0$.

当$t\to\infty$时，$(t-t^2)\to-\infty$，可见随着 t 的增大，向后的延滞伸向$-\infty$，故这是无穷延滞的方程，但也是无界滞量的方程，更典型的例子如下：

例6 $\dot{x}(t)=\int_{-\infty}^{t} g(t,s,x(s))ds$.

这个方程表明，不论t多么大，向后的延滞总是伸向$-\infty$。

下面我们分别对三种RFDE的定义给予介绍。

1°有界滞量的RFDE的概念

设$\mathbf{C}([a,b],\mathbf{R}^n)$表示将区间$[a,b]$映射入$\mathbf{R}^n$中的连续函数所组

成的并具有一致收敛拓扑的 Banach空间。对给定的 $r\geq 0$，我们将空间$C([-r,0],\ R^n)$简记为 C，对任一$\phi\in C$，其范数定义为$\|\phi\|=\sup\limits_{-r\leq\theta\leq 0}|\phi(\theta)|$，其中$|\cdot|$是$R^n$中的范数。

如果$t_0\in R$，$A\geq 0$，$x\in C([t_0-r,t_0+A],R^n)$，则对任一$t\in[t_0,\ t_0+A]$，我们定义$x_t$为$x_t(\theta)=x(t+\theta)$，$\theta$取遍$[-r,0]$上的一切值。因此，$x_t\in C$。

设$D\subseteq R\times C$，f：$D\to R^n$为给定的函数，则关系式

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t) \tag{1}$$

称为具有有界滞量的滞后型泛函微分方程。其中$\dot{x}(t)$表示$x(t)$对t的右导数。

如果存在 $t_0\in R$，$A>0$，以及$x\in C([t_0-r,t_0+A),R^n)$，$(t,x_t)\in D$，并且$x(t)$在区间$[t_0,\ t_0+A)$上满足方程(1)，则称函数 x 是方程(1)的一个解。

对于给定的$(t_0,\varphi)\in D$，我们说$x(t_0,\varphi)$ 是满足方程(1) 及其初始条件$(t_0,\ \varphi)$的解，是指存在$A>0$，使得$x(t_0,\varphi)$ 是方程(1)在$[t_0-r,\ t_0+A)$上的解，且$x_{t_0}(t_0,\varphi)=\varphi$。我们亦可说 $x(t_0,\varphi)$是方程(1)的过点(t_0,φ)的解。

方程 (1) 是一种相当广泛的方程，它包含了常微分方程组$\dot{x}(t)=f(t,x(t))$。因为当 $r=0$ 时，C 空间成为 R^n 空间，x_t 成为$x(t)$，$f(t,\ x_t)$实际上是$f(t,x(t))$了。

方程(1)也包含了滞量为有界的滞后型微分差分方程组如

$$\dot{x}(t)=F(t,x(t),x(t-r_1(t)),\cdots,x(t-r_m(t)))。 \tag{2}$$

其中 F为n维向量值函数，$0\leq r_i(t)\leq r$，$i=1,2,\cdots,\ m$。因为只要方程(1)中的$f(t,\phi)$取为

$$f(t,\phi)=F(t,\phi(0),\ \phi(-r_1(t)),\ \cdots,\ \phi(-r_m(t)))。$$

方程(1)的具体表达式就是方程(2)了。

方程(1)还包含微分积分方程如

$$\dot{x}(t)=\int_{-r}^{0}g(t,\theta,x(t+\theta))d\theta。 \tag{3}$$

因为当(1)中的f具体表达为$f(t,\phi)=\int_{-r}^{0}g(t,\theta,\phi(\theta))d\theta$时，方程(1)便成为方程(3)了。

从形式来看，这种泛函微分方程$\dot{x}(t)=f(t,x_t)$与常微分方程$\dot{x}(t)=f(t,x(t))$是很类似的，其区别只是前者的f定义在$\mathbf{R}\times C$空间，而后者的f定义在$\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$空间。因此，常微分方程中的许多理论都可平移到泛函微分方程中来。另一方面，我们必须看到C空间是无穷维的，它不具备$\mathbf{R}^n$空间那么多的良好性质，例如$\mathbf{R}^n$空间中的有界闭集与紧集是等价的，但C空间中却不是这样，因此，常微分方程中的许多性质在泛函微分方程中是没有的。迄今为止，泛函微分方程的理论是不够完备的。

2° 无界滞量的RFDE的概念

从例3看到，不论取$r>0$多么大，当t足够大时便能使滞后的时刻$\frac{t}{2}<t-r$，故$x\left(\frac{t}{2}\right)$不能在区间$[t-r,\ t]$上取值。这表明在$x_t(\theta)=x(t+\theta)$，$-r\leqslant\theta\leqslant 0$的定义下，方程(4)的右端函数不能表为$f(t,\ x_t)$的形式。为了解决这个矛盾，文[32]提出改变$x_t$定义的方法，使得许多无界滞量的微分方程或微分积分方程统一为泛函微分方程的形式。

定义1 设$p(t,\theta)$是定义在$[\sigma,\infty)\times[-r,0]$上的实值连续函数，其中$\sigma$，$r>0$皆为常数。如果$p(t,\ \theta)$具有下述性质：

(i) $p(t,\theta)$对固定的t是θ的单调增加函数；

(ii) $p(t,0)=t$，$t\in[\sigma,\infty)$；

(iii) $p(t,0)-p(t,-r)\geqslant\lambda>0$，$t\in[\sigma,\ \infty)$，$\lambda$为某个常数；

(iv) $p(t,-r)$是t的非减函数，

则称$p(t,0)$为一个P函数。

如果$t_0\in[\sigma,\infty)$，$A\geqslant 0$，$x\in C([p(t_0,\ -r),\ t_0+A],\mathbf{R}^n)$，则对任一个$t\in[t_0,t_0+A]$，我们定义$\bar{x}_t$为

$$\bar{x}_t(\theta)=x(p(t,\theta)),\quad \theta\text{取遍}[-r,0]\text{上的值。}$$

设$\Omega\subseteq[\sigma,\infty)\times C$，$f$：$\Omega\rightarrow R^n$为给定的泛函，则关系式

$$\dot{x}(t)=f(t,\tilde{x}_t) \tag{4}$$

称为P—滞后型泛函微分方程。其中$\dot{x}(t)$表示$x(t)$对t的右导数。

如果存在 $t_0\in[\sigma,\infty)$ 及 $A>0$，使得 $x\in C([p(t_0,-r),(t_0+A)R^n)$。$(t,\tilde{x}_t)\in\Omega$，并且$x(t)$在区间$[t_0,t_0+A)$上满足方程(4)，则称函数$x$是方程(4)的一个解。

对于给定的$(t_0,\varphi)\in\Omega$，我们称$x(t_0,\varphi)$是满足方程(4)及其初始条件(t_0,φ)的解，是指存在$A>0$，使得$x(t_0,\varphi)$是方程(4)在$[p(t_0,-r),t_0+A)$上的解，且$\tilde{x}_{t_0}(t_0,\varphi)=\varphi$。

P—滞后型泛函微分方程是十分广泛的RFDE。下述例子表明，许多有界滞量和无界滞量的RFDE都可化为P—滞后型泛函微分方程。

例1 有界滞量的RFDE：

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t). \tag{5}$$

其中f：$\Omega\rightarrow R^n$，$\Omega\subseteq R\times C$，$x_t(\theta)=x(t+\theta)$，$\theta\in[-r,0]$，$r>0$为常数。

对任意的$\sigma\in R$，令$p(t,\theta)=t+\theta$，$\theta\in[-r,0]$，于是$\tilde{x}_t(\theta)=x(p(t,\theta))=x(t+\theta)=x_t(\theta)$。故(5)可化为(4)的形式。

例2 无界滞量的微分差分方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),\ x(t-r_1(t)),\ \cdots,\ x(t-r_m(t))). \tag{6}$$

其中 f：$\underbrace{R^+\times R^n\times\cdots\times R^n}_{m+1\text{个}}\rightarrow R^n$，$r_i$：$R^+\rightarrow R^+$为连续，$i=1,2,\cdots,m$。并且$r_1(t)\leqslant r_2(t)\leqslant\cdots\leqslant r_m(t)$，$r_m(t)\geqslant\lambda>0$，$\lambda$为某一常数，又$t-r_m(t)$为非减函数，$\lim\limits_{t\rightarrow\infty}r_1(t)=\infty$。

设$\sigma=\inf\{t: t-r_m(t)\geqslant0\}$，取$p(t,\theta)$为

$$p(t,\theta)=t+\frac{r_m(t)}{r}\theta,\ t\in[\sigma,\infty),\ \theta\in[-r,0],\ r>0.$$

方程(6)中所滞后的时间为$t-r_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 它们都落在区间$[p(t,-r),t]$即$[t-r_m(t),t]$之内。对于任何$t\in[\sigma,\infty)$及

$\phi\in C$，如果令 $f(t,\phi)=F(t,\ \phi(0),\ \phi(-rr_1(t)/r_m(t)),\ \cdots,\ \phi(-rr_{m-1}(t)/r_m(t)),\phi(-r))$，方程(6)便可化为方程(4)的形式。

例3 对微分积分方程

$$\dot{x}(t)=\int_\alpha^t g(t,s,x(s))ds,\quad t\geqslant\alpha,\ \alpha\text{为一常数。}\tag{7}$$

方程中时间的滞后是连续分布在区间$[\alpha,t]$之上的。现取 $p(t,\theta)=t+\frac{t-\alpha}{r}\theta$，$t\in[\alpha,\infty)$，$\theta\in[-r,0]$，$r>0$。当$\theta$从$-r$变到0时，$p(t,\theta)$从$\alpha$变到$t$，故方程(7)可以化为方程(4)的形式。

3° 无穷延滞的RFDE的概念

设B是由$(-\infty,0]$映入$\mathbf{R}^n$的函数所组成的某一种函数空间。

若$t_0\in\mathbf{R}$，x：$(-\infty,t_0+A]\to\mathbf{R}^n$，$A$为某一正数，则对每一个$t\in[t_0,t_0+A]$，定义$x_t$为

$$x_t(\theta)=x(t+\theta),\ \theta\text{取遍}(-\infty,0]\text{上的一切值。}$$

设$\Omega\subseteq\mathbf{R}\times B$，$f$：$\Omega\to\mathbf{R}^n$为给定的函数，则关系式

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t)\tag{8}$$

称为无穷延滞的泛函微分方程。$\dot{x}(t)$表示$x(t)$对t的右导数。

关于方程(8)的初值问题的提法是，如果对于给定的$(t_0,\varphi)\in\Omega$，存在$A>0$及函数$x:(-\infty,t_0+A)\to\mathbf{R}^n$，$(t,x_t)\in\Omega$，使得$x(t)$在$[t_0,t_0+A)$上满足方程(8)且$x_{t_0}=\varphi$。则称$x$是满足初始条件$(t_0,\varphi)$的解，记作$x(t_0,\varphi)$。

例4 微分积分方程 $\dot{x}(t)=\int_{-\infty}^t g(t,s,x(s))ds$，是一种无穷延滞的方程，它显然是方程(8)的一个特例。

2 中立型泛函微分方程的概念

首先考察中立型的微分差分方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-r_1(t)),x(t-r_2(t)),\dot{x}(t),\\ \dot{x}(t-r_1(t)),\dot{x}(t-r_2(t)))。\tag{9}$$

其中f：$\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\cdots\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$，$0\leqslant r_i(t)\leqslant r$，$i=1,2$，$r>0$，以及中立型的微分积分方程

$$\dot{x}(t)=\int_{t-r}^{t} g(t,x(\theta),\dot{x}(\theta))d\theta. \tag{10}$$

其中$r>0$，g：$\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$。

这两个方程有一个共同之处，即方程的右边函数都含有函数x的导数$\dot{x}$，且$\dot{x}$是在区间$[t-r,t]$上取值的。

仿照滞后型泛函微分方程的观点，方程(9)和(10)可自然地抽象为泛函微分方程的形式如下：

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t,\dot{x}_t). \tag{11}$$

其中f：$\mathbf{R}\times C\times C\to\mathbf{R}^n$，$\dot{x}_t\in C$是由$\dot{x}_t(\theta)=\frac{d}{dt}x(t+\theta)$所定义。

我们称方程(11)为中立型泛函微分方程(Neutal Functional Differential Equation，简写为NFDE)。或者更确切地说是有界滞量的NFDE。

关于方程(11)的初值问题的提法是困难的，这一点在中立型微分差分方程的初值问题上我们已经看到（见§1中的3的(B)）。其基本原因是方程(11)的右端显含$\dot{x}_t$之故。这使得对它的研究要比RFDE困难得多。1970年，M.A.Cruz和K.J.Hale[14]提出一种特殊的中立型泛函微分方程，这类方程是以如下的中立型微分差分方程

$$\frac{d}{dt}[ax(t)+bx(t-r)]=f(t,x(t),x(t-r)) \tag{12}$$

为基础的。这个方程有两个特点：一是比较广泛，它包含了滞后型微分差分方程(即$b=0$的情形)，二是方程中不要求$x(t)$可微，只要求$ax(t)+bx(t-r)$可微即可，从而方程中不含滞后项的导数$\dot{x}(t-r)$。因此，初值问题的提法要简单得多，首先对初始函数φ只要求连续，不要求可微，其次对解$x(t)$的要求也低些，只要$ax(t)+bx(t-r)$可微并且满足(12)即可，不要求$x(t)$连续可微。

若(12)为纯量方程，显然a不能等于零，(如果(12)是方程

组，则a和b均为矩阵，此时要求$\det a \neq 0$)否则方程变成

$$\frac{d}{dt}bx(t-r)=f(t,x(t),x(t-r)).$$

令$u=t-r$，上式化为

$$b\dot{x}(u)=f(u+r,x(u+r),\ x(u)).$$

这就成了超前型泛函微分方程了。由于我们不考虑这种类型，所以a不能为零。

现将(12)一般化，抽象为泛函的形式：

$$\frac{d}{dt}D(t,x_t)=f(t,x_t).$$

其中D和f都是将集合$\Omega \subseteq \mathbf{R}\times C$映入$\mathbf{R}^n$中的连续泛函。为了保证$D(t,x_t)$中所含的$x(t)$的系数不为零(或非奇异矩阵)，我们需要引入"$D$在0处是原子的"的概念。

定义1 设$\Omega \subseteq \mathbf{R}\times C$为开集，$D(t,\phi)$为$\Omega \to \mathbf{R}^n$的连续泛函，且对$\phi$是线性的。由Riesz定理知存在一个$n\times n$的有界变差矩阵函数$\eta(t,\theta)$，使得

$$D(t,\phi)=\int_{-r}^{0}[d_\theta \eta(t,\theta)]\phi(\theta),\quad (t,\phi)\in\Omega.$$

对于$t_0 \in \mathbf{R}_\Omega=\{t,\ (t,\phi)\in\Omega\}$及$\theta_0\in[-r,0]$如果$\det[\eta(t_0,\theta_0^+)-\eta(t_0,\ \theta_0^-)]\neq 0$，则称线性泛函$D$在$t_0$于$\theta_0$处是原子的。若$D$在任一个$t\in K\subseteq \mathbf{R}_\Omega$于$\theta_0$处是原子的，则称$D$在集K上于$\theta_0$处是原子的。(注：当$\theta_0=0$时，取$0^+=0$，当$\theta_0=-r$时，取$-r^-=-r$)。

定义2 设$\Omega \subseteq \mathbf{R}\times C$为开集，$D(t,\phi)$为$\Omega \to \mathbf{R}^n$的连续泛函，对$\phi$是非线性的，又设$D(t,\phi)$对$\phi$具有连续的Fréchet导数$D_\phi(t,\phi)$，则$D_\phi(t,\phi)\in C(\Omega,\mathscr{L}(C,\mathbf{R}^n))$，(这里$\mathscr{L}(C,\mathbf{R}^n)$表示由$C\to\mathbf{R}^n$的具有算子拓扑的线性连续泛函所组成的Banach空间)，由Riesz定理知存在一个$n\times n$的有界变差矩阵函数$\mu(t,\phi,\theta)$，$(t,\phi)\in\Omega$，$\theta\in[-r,0]$，使得

$$D_\phi(t,\phi)\psi=\int_{-r}^{0}[d_\theta \mu(t,\phi,\theta)]\psi(\theta),\quad \psi\in C.$$

对于$(t_0,\phi_0)\in\Omega$及$\theta_0\in[-r,0]$，如果$\det[\mu(t_0,\phi_0,\ \theta_0^+)-\mu(t_0,$

$\phi_0,\theta_0^-)]\neq 0$，则称非线性泛函$D$在$(t_0,\phi_0)$对于$\theta_0$处是原子的，如果$D$在任一个$(t,\phi)\in H\subseteq\Omega$于$\theta_0$处是原子的，则称$D$在$H$上于$\theta_0$处是原子的。

其实定义 2 包含了定义1，因为当 $D(t,\phi)$ 对ϕ为线性时，有$D_\phi(t,\phi)\psi=D(t,\psi)$，故$D_\phi$在 (t_0,ϕ_0) 于 θ_0 处为原子其实就是$D(t,\psi)$在t_0于θ_0处为原子。

例1 设$D(t,\phi)=a(t)\phi(0)+b(t)\phi(-r)$是 $\Omega\to R^n$ 上的连续泛函，现取$n\times n$有界变差矩阵函数

$$\eta(t,\theta)=\begin{cases}a(t)\quad, & 当\theta=0时,\\ 0,\quad, & 当-r<\theta<0时,\\ -b(t), & 当\theta=-r时.\end{cases}$$

则
$$D(t,\phi)=\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(t,\theta)]\phi(\theta),\quad (t,\phi)\in\Omega.$$

于是 $\det[\eta(t_0,0)-\eta(t_0,0^-)]=\det[a(t_0)]$，$\det[\eta(t_0,-r^+)-\eta(t_0,-r)]=\det[b(t_0)]$，可见 D 在 t_0 于 0 处是原子的相当于$\det[a(t_0)]\neq 0$，D在t_0于$-r$ 处是原子的相当于$\det[b(t_0)]\neq 0$.

现考察微分差分方程

$$\frac{d}{dt}[a(t)x(t)+b(t)x(t-r)]=f(t,x(t),x(t-r)).\tag{13}$$

由方程(12)的讨论中我们可以看到，要保证方程(13)为中立型就必须在某一区间上 $\det[a(t)]\neq 0$。如令

$$D(t,x_t)=a(t)x(t)+b(t)x(t-r).$$

那末要求$a(t)$在某一区间上为非奇异矩阵，相当于要求D 在此区间上于 0 处是原子的。

上例是线性的情形，下面我们讨论一个非线性的例子。

例2 考虑纯量的微分差分方程

$$2a(t)x(t)\dot{x}(t)+b(t)x(t-r)\dot{x}(t-r)+\dot{a}(t)x^2(t)$$
$$+\frac{1}{2}b(t)x^2(t-r)=f(t,x(t),x(t-r)).\tag{14}$$

正如对方程(12)的讨论一样，要方程 (14) 为中立型，必需

$\dot{x}(t)$的系数$2a(t)x(t)\neq 0$，否则方程(14)变为超前型。下面研究当方程(14)的左边写成泛函形式$\frac{d}{dt}D(t,x_t)$时，$\dot{x}(t)$的系数不为零在$D(t,x_t)$上有什么特征。

此时

$$\frac{d}{dt}D(t,\ x_t)=\frac{d}{dt}\left[a(t)x^2(t)+\frac{1}{2}b(t)x^2(t-r)\right]$$

由复合函数求导公式知

$$\frac{d}{dt}D(t,\ x_t)=D_t(t,\ x_t)+D_\phi(t,\ x_t)\dot{x}_t$$

其中$D_\phi(t,\ x_t)$是$D(t,\ x_t)$对第二个变元的Fréchet导数，它由下式来计算：

$$\begin{aligned}D(t,\ \phi+\psi)-D(t,\ \phi)&=a(t)[\phi(0)+\psi(0)]^2\\&\quad+\frac{1}{2}b(t)[\phi(-r)+\psi(-r)]^2\\&\quad-a(t)\phi^2(0)-\frac{1}{2}b(t)\phi^2(-r)\\&=2a(t)\phi(0)\psi(0)\\&\quad+b(t)\phi(-r)\psi(-r)+a(t)\psi^2(0)\\&\quad+\frac{1}{2}b(t)\psi^2(-r),\end{aligned}$$

故　　$D_\phi(t,\ \phi)\psi=2a(t)\phi(0)\psi(0)+b(t)\phi(-r)\psi(-r)$，

即　　$D_\phi(t,\ x_t)\dot{x}_t=2a(t)x(t)\dot{x}(t)+b(t)x(t-r)\dot{x}(t-r)$。

现取

$$\mu(t,\phi,\theta)=\begin{cases}2a(t)\phi(0), & \text{当}\theta=0,\\ 0, & \text{当}-r<\theta<0,\\ -b(t)\phi(-r), & \text{当}\theta=-r.\end{cases}$$

于是　　$D_\phi(t,\ \phi)\psi=\int_{-r}^{0}[d_\theta\mu(t,\ \phi,\ \theta)]\psi(\theta)$，

故$D(t,\ \phi)$在区间I上于0处为原子$\Longleftrightarrow D_\phi(t,\ \phi)$在I上于0处为原子$\Longleftrightarrow|\mu(t,\ \phi,\ 0)-\mu(t,\ \phi,\ 0^-)|$在I上不为零$\Longleftrightarrow 2a(t)\phi(0)$

$\neq 0\ (t\in I)\Longrightarrow 2a(t)x(t)\neq 0$，这与方程(14)为中立型的要求一致。

从上述两个例子可以看到，不论$D(t,\ \phi)$对ϕ为线性还是非线性，$D(t,\ \phi)$在0处为原子的实质是保证$\frac{d}{dt}D(t,\ x_t)$中$x(t)$的系数不为零(或非奇异矩阵)。

1970年Cruz与Hale就是根据这种思想引入一种特殊的但又有一定广泛性的中立型泛函微分方程[14][28]，其定义是：

设Ω是$\mathbf{R}\times C$中的开集，D和f均为$\Omega\to\mathbf{R}^n$的连续泛函，当$D(t,\ \phi)$对ϕ为线性时，它在集K上于0处是原子的，这里集$K\subseteq R_\Omega=\{t:(t,\ \phi)\in\Omega\}$，当$D$对$\phi$为非线性时，它在集$H\subseteq\Omega$上于0处是原子的，则关系式

$$\frac{d}{dt}D(t,\ x_t)=f(t,\ x_t) \tag{15}$$

称为D算子型的中立型泛函微分方程。D称为方程(15)的微分算子。

方程(13)当$\det[a(t)]\neq 0$就是这种类型的一个例子。

方程(15)的初值问题的提法是：对于给定的初始条件$(t_0,\ \varphi)\in\Omega$，要求找到一个函数$x(t_0,\ \varphi)\in C([t_0-r,\ t_0+a),\ \mathbf{R}^n)$，$a>0$，使得$(t,\ x_t(t_0,\ \varphi))\in\Omega$，$x_{t_0}(t_0,\ \varphi)=\varphi$，$x(t_0,\varphi)(t)$在$[t_0,\ t_0+a)$上满足方程(15)，这样的函数$x(t_0,\ \varphi)$称为方程(15)满足初始条件$(t_0,\ \varphi)$的解，或者称为过$(t_0,\ \varphi)$的解。

如果$D(t,\ \phi)=D_0(t,\ \phi)+g(t)$，$f(t,\phi)=L(t,\phi)+h(t)$，其中$D_0(t,\ \phi)$及$L(t,\ \phi)$对$\phi$是线性的，此时方程

$$\frac{d}{dt}[D_0(t,\ x_t)+g(t)]=L(t,\ x_t)+h(t) \tag{16}$$

称为中立型的线性泛函微分方程。当$g(t)\equiv 0$，$h(t)\equiv 0$时为齐次的，当$g(t)\neq 0$或$h(t)\neq 0$时则为非齐次的。

方程(15)虽然是一类特殊的中立型泛函微分方程，但亦有一定的广泛性，起码它包含滞后型的泛函微分方程。事实上，方程

(15)中如果取$D(t,\ \phi)=D(\phi)=\phi(0)$，则

$$\frac{d}{dt}D(t,\ x_t)=\dot{x}(t),$$

从而方程(15)化为滞后型方程(1)

例1 设$r>0$，A和B为$n\times n$常数矩阵，$\det A\neq 0$，泛函f和$D(\phi)=A\phi(0)-B\phi(-r)$均将$\Omega\to\mathbf{R}^n$，且为连续，则方程

$$\frac{d}{dt}[Ax(t)-Bx(t-r)]=f(t,\ x_t) \tag{17}$$

为中立型泛函微分方程。

例2 设 $0<r_1<r$，f 和 $D(\phi)=\phi(0)+\phi^2(-r_1)\phi(0)+\phi^2(-r)$均为$\Omega\to\mathbf{R}$的连续函数，则方程

$$\frac{d}{dt}[x(t)+x^2(t-r_1)x(t)+x^2(t-r)]=f(t,x_t) \tag{18}$$

为中立型泛函微分方程。

我们看到，在方程(15)的定义中，只要求算子$D(t,x_t)$对t可微，不要求$x(t)$可微，如果$x(t)$可微，且$D(t,\ \phi)$对t，ϕ有连续偏导数，则方程(15)可改写成

$$D_\phi(t,\ x_t)\dot{x}_t=f(t,\ x_t)-D_t(t,\ x_t). \tag{19}$$

因此，方程(15)如果有光滑解，它必须满足(19)，而(19)含x的导数只能是一次的。例如方程(18)写成(19)的形式便是

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)+\dot{x}(t)x^2(t-r_1)+2x(t)\dot{x}(t-r_1)\\ +2x(t-r)\dot{x}(t-r)=f(t,\ x_t).\end{aligned} \tag{20}$$

如果将其中一项譬如$2x(t-r)\dot{x}(t-r)$ 改成$2x(t-r)\dot{x}^2(t-r)$ 或$2x(t-r)\dot{x}(t-r_1)$的样子，方程(18)就不可能回到(15)的形式了。因此从这里可以看出，象方程(15)那类中立型方程是有一定局限性的。

与无穷延滞的RFDE相对应，也有无穷延滞的NFDE，以后将予以介绍，但无界滞量的NFDE尚未建立有关的理论。

第二章

有界滞量RFDE 解的基本理论

在这一章里，我们将介绍具有有界滞量的RFDE 的解的基本理论，如存在性、唯一性、连续依赖性、延展性以及对初值的可微性等．为此，我们首先介绍两个预备定理如下。

预备定理1 设$x\in C([t_0-r,\ t_0+A],\ \mathbf{R}^n)$，则$x_t$在区间$[t_0,\ t_0+A]$上是$t$的连续函数。

证 由于x在$[t_0-r,\ t_0+A]$上为一致连续，故对任意给定的$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，使得$[t_0-r,\ t_0+A]$上的任意两点t_1和t_2，当$|t_1-t_2|<\delta$时，$|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon$．从而对任一$t\in[t_0,\ t_0+A]$，当$|\Delta t|<\delta$时便有

$$|x(t+\theta)-x(t+\theta+\Delta t)|<\varepsilon \qquad 对一切\theta\in[-r,\ 0]。$$

因此，由x_t的定义便知$\|x_t-x_{t+\Delta t}\|<\varepsilon$（这里当$t=t_0$时取$\Delta t>0$，当$t=t_0+A$时取$\Delta t<0$），故$t$在$[t_0,\ t_0+A]$时，$x_t$是$t$的连续函数。证毕．

预备定理2 设$t_0\in\mathbf{R}$，$\varphi\in C$为给定，$f(t,\ \phi)$为$\mathbf{R}\times C$映入$\mathbf{R}^n$的连续泛函，则x为下列RFDE的初值问题

$$\dot{x}(t)=f(t,\ x_t),\ x_{t_0}=\varphi,\ t\geqslant t_0.$$

的解的充要条件是x满足下列的积分方程

$$\begin{cases}x(t)=\varphi(0)+\displaystyle\int_{t_0}^{t}f(s,\ x_s)ds, & t\geqslant t_0,\\ x_{t_0}=\varphi.\end{cases}$$

证 由于$f(t,\ \phi)$对$(t,\ \phi)$连续，而x_t对t连续，故$f(t,\ x_t)$

是t的连续函数，从而积分$\int_{t_0}^{t} f(s, x_s)ds$当$t\geqslant t_0$时有意义，与常微分方程的情形类似便可得证。

§1 解的存在性、唯一性和连续依赖性

考虑滞后型方程

$$\dot{x}(t)=f(t, x_t). \tag{1}$$

其中f：$\mathbf{R}\times C\to\mathbf{R}^n$为连续。

对于$(t_0, \varphi)\in\mathbf{R}\times C$，定义$\tilde{\varphi}\in C([t_0-r, \infty), \mathbf{R}^n)$如下：

$$\tilde{\varphi}_{t_0}=\varphi,\ \tilde{\varphi}(t_0+t)=\varphi(0),\quad t\geqslant 0.$$

设x为方程(1)过初值(t_0,φ)的解，如果

$$x(t_0+t)=\tilde{\varphi}(t_0+t)+y(t),\quad t\geqslant -r,$$

则由预备定理2知y满足积分方程

$$\begin{cases} y(t)=\int_0^t f(t_0+s,\ \tilde{\varphi}_{t_0+s}+y_s)ds, & t\geqslant 0,\\ y_0=0. \end{cases} \tag{2}$$

反之，若y为方程(2)的解，则x便是方程(1)过(t_0, φ)的解，因此，求方程(1)的解等价于找到函数$y\in C([-r, \alpha], \mathbf{R}^n)$，使得$y(t)$满足方程(2)。

如果$V\subseteq\mathbf{R}\times C$，我们用$C(V, \mathbf{R}^n)$表示所有连续函数$f$：$V\to\mathbf{R}^n$所组成的集合，又用$C^0(V,\mathbf{R}^n)$表示所有将$V$映入$\mathbf{R}^n$的有界连续函数所组成的集合。$C^0(V,\mathbf{R}^n)$是一个Banach空间，其范数定义为

$$\|f\|_V=\sup_{(t,\phi)\in V}|f(t, \phi)|. \tag{3}$$

对任意的正数α和β，令$C_\beta=\{\phi\in C: \|\phi\|\leqslant\beta\}$，$A(\alpha, \beta)=\{y\in C([-r, \alpha], \mathbf{R}^n): y_0=0,\ y_t\in C_\beta,\ t\in[0, \alpha]\}$。

引理1 设开集$\Omega\subseteq\mathbf{R}\times C$，紧集$W\subseteq\Omega$，给定$f^0\in C(\Omega, \mathbf{R}^n)$，则存在$W$的一个邻域$V\subseteq\Omega$，使得$f^0\in C^0(V, \mathbf{R}^n)$；存在$f^0$的一个邻域$U\subseteq C^0(V, \mathbf{R}^n)$和$M>0$，使得当$(t, \phi)\in V$，$f\in U$时，$|f(t, \phi)|<M$。此外，还存在正数$\alpha$和$\beta$，使得对任何$(t^0, \varphi^0)$

$\in W$，当$t\in[0,\alpha]$及$y\in A(\alpha,\beta)$时，有$(t^0+t,\ \varphi^0_{t_0+t}+y_t)\in V$。

证 由W的紧性及f^0的连续性，知f^0在W上有界，设$\sup\limits_{(t,\varphi)\in W}|f^0(t,\ \phi)|=B$。再由$f^0$的连续性，知存在正数$\bar{\alpha}$、$\bar{\beta}$、$\varepsilon$，使得当$t\in[0,\ \bar{\alpha}]$，$\psi\in C_{\bar{\beta}}$以及$(t^0,\ \varphi^0)\in W$时，有$|f^0(t^0+t,\ \varphi^0+\psi)|<B+\varepsilon$。

令 $V=\{(t^0+s,\ \varphi^0+\psi):(t^0,\ \varphi^0)\in W,\ \ s\in[0,\ \ \bar{\alpha}],\ \psi\in C_{\bar{\beta}}\}$及$U=\{f:\ |f(t,\ \phi)-f^0(t,\ \phi)|<\varepsilon,\ (t,\ \phi)\in V\}$。于是当$(t,\ \phi)\in V$，$f\in U$时，有

$$|f(t,\ \phi)|\leqslant|f(t,\ \phi)-f^0(t,\ \phi)|+|f^0(t,\ \phi)|$$
$$<B+2\varepsilon.$$

只要令$M=B+2\varepsilon$，便证明了引理中的第一个论断。

下面证明引理的第二个论断，设$0<\beta<\bar{\beta}$，选取α满足$\alpha<\bar{\alpha}$及$\|\varphi^0_{t_0+t}-\varphi^0\|<\bar{\beta}-\beta$对一切$(t^0,\ \varphi^0)\in W$及$t\in[0,\ \alpha]$成立。这种选取是可以实现的，因为$W$为紧之故，于是当$y\in A(\alpha,\ \beta)$时，$\|\varphi^0_{t_0+t}+y_t-\varphi^0\|<\bar{\beta}$，注意到$V$的结构便知$(t^0+t,\ \varphi^0_{t_0+t}+y_t)\in V$，证毕。

引理2 设开集$\Omega\subseteq\mathbf{R}\times C$，紧集$W\subseteq\Omega$，给定$f^0\in C(\Omega,\mathbf{R}^n)$，邻域$U$和$V$及常数$\alpha$和$\beta$均为引理1所示，若变换$T$：$W\times U\times A(\alpha,\beta)\to C([-r,\ \alpha],\ \mathbf{R}^n)$定义如下：

$T(t_0,\ \varphi,\ f,\ y)(t)=0$，当$t\in[-r,\ 0]$时，

$T(t_0,\ \varphi,\ f,\ y)(t)=\int_0^t f(t_0+s,\ \varphi_{t_0+s}+y_s)ds$，当$t\in[0,\alpha]$时，

则T为连续且存在紧集$K\subseteq C([-r,\ \alpha],\ \mathbf{R}^n)$，使得

$$T:\ W\times U\times A(\alpha,\ \beta)\to K.$$

又如果$M\alpha\leqslant\beta$，则

$$T:\ W\times U\times A(\alpha,\ \beta)\to A(\alpha,\ \beta).$$

证 对任意的t、$\tau\in[0,\ \alpha]$，由引理1得

$$|T(t_0,\ \varphi,\ f,\ y)(t)-T(t_0,\ \varphi,\ f,\ y)(\tau)|$$
$$\leqslant\left|\int_\tau^t f(t_0+s,\ \varphi_{t_0+s}+y_s)ds\right|\leqslant M|t-\tau|,$$

$|T(t_0, \varphi, f, y)(t)| \leqslant Ma$.

设 $K=\{g\in C([-r, a], R^n): |g(t)-g(\tau)| \leqslant M|t-\tau|, |g(t)| \leqslant Ma, t、\tau\in[0, a], g_0=0\}$.
则K为紧集，显然，T: $W\times U\times A(\alpha, \beta) \to K$. 如果 $Ma\leqslant\beta$，则 $K\subseteq A(\alpha, \beta)$.

剩下要证的是T为连续，设$(t^k,\varphi^k,f^k,y^k)\in W\times U\times A(\alpha, \beta)$且当$k\to\infty$时$(t^k, \varphi^k, f^k, y^k)\to(t^0, \varphi^0, f^0, y^0)\in W\times U\times A(\alpha, \beta)$。由于K为紧集，而$T(t^k, \varphi^k, f^k, y^k)\in K$，故序列$\{T(t^k, \varphi^k, f^k, y^k): k=1, 2, \cdots\}$必有收敛子列，不妨设用本身的记号来表示，设其极限为λ，则$\lambda\in K$。

由引理1知函数列$f^k(t^k+s, \varphi^k_{t^k+s}+y^k_s)$是一致有界的，又当$s\in[0, a]$，$k\to\infty$时，

$$f^k(t^k+s, \varphi^k_{t^k+s}+y^k_s)\to f^0(t^0+s, \varphi^0_{t^0+s}+y^0_s)$$

由Lebesgue控制收敛定理得

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \lim_{k\to\infty}\int_0^t f^k(t^k+s, \varphi^k_{t^k+s}+y^k_s)ds \\ &= \int_0^t f^0(t^0+s, \varphi^0_{t^0+s}+y^0_s)ds \\ &= T(t^0,\varphi^0,f^0,y^0)(t).\end{aligned}$$

对所有$t\in[0, a]$成立。从这个结果看出，$\{T(t^k, \varphi^k,f^k, y^k)\}$的任何收敛子列的极限是与这个子列无关的。由于每一个子列都含有收敛子列，故$\{T(t^k, \varphi^k, f^k, y^k)\}$本身收敛，从而$T$为连续。

在证明泛函微分方程解的存在定理时，需要利用Schauder不动点定理，为此，首先需要引入算子的全连续性的概念，若X是一个Banach空间，$U\subseteq X$，算子T：$U\to X$。如果T为连续，且对U中的任何有界子集B，TB的闭包都是紧的，则称T是全连续的。

引理3 （Schauder不动点定理），如果U是Banach空间X中的闭有界凸集，T：$U\to U$为全连续，则T在U上至少有一个不动点。

定理1 （存在性）设Ω为$R\times C$中的一个开集，$f^0\in C(\Omega, R^n)$，如果$(t_0, \varphi)\in\Omega$，则滞后型泛函微分方程 $\dot{x}(t)=f^0(t,x_t)$

必存在过(t_0, φ)的解，更一般地，如果W是Ω中的一个紧子集，$f^0 \in C(\Omega, R^n)$，则存在W的一个邻域$V \subseteq \Omega$，使得$f^0 \in C^0(V, R^n)$，又存在f^0的一个邻域$U \subseteq C^0(V, R^n)$及$\alpha > 0$，使得对任何的$(\sigma, \phi) \in W$和任何的$f \in U$，方程$\dot{x}(t) = f(t, x_t)$在$[\sigma - r, \sigma + \alpha]$上都存在过$(\sigma, \phi)$的解。

证 首先证明第一个论断，取单点集$W^0 = \{(t_0, \varphi)\}$，则W^0为紧集，取算子T为

$$T(t_0, \varphi, f^0, y)(t) = \int_0^t f^0(t_0 + s, \tilde{\varphi}_{t_0+s} + y_s)ds,$$

$$t \in [0, \alpha],$$

$$T(t_0, \varphi, f^0, y)(t) = 0, \quad t \in [-r, 0].$$

因(t_0, φ)和f^0为给定，故由引理2知算子T为连续，且α、β适当小时T将$A(\alpha, \beta)$映入自身

为证明T在$A(\alpha, \beta)$上有不动点，只需证明如下两点：(i) $A(\alpha, \beta)$是一个闭有界凸集，(ii)T是全连续算子。对(i)，$A(\alpha, \beta)$的闭性和有界性是显然的，故只需证明其凸性，对任意的ξ、$\zeta \in A(\alpha, \beta)$及任意的$a > 0$，$b > 0$，$a + b = 1$，显然有$(a\xi + b\zeta)_0 = a\xi_0 + b\zeta_0 = 0$；$\|(a\xi + b\zeta)_t\| \leqslant a\|\xi_t\| + b\|\zeta_t\| \leqslant a\beta + b\beta = \beta$，这说明$a\xi + b\zeta \in A(\alpha, \beta)$，故$A(\alpha, \beta)$是凸的，对(ii)，由引理2知$TA(\alpha, \beta) \subseteq K$，$K$为紧集，故$TA(\alpha, \beta)$的闭包为紧集，从而$T$为全连续。

根据Schauder不动点定理，T在$A(\alpha, \beta)$上必存在不动点y^0，于是有

$$y^0(t) = \int_0^t f^0(t_0 + s, \tilde{\varphi}_{t_0+s} + y^0_s)ds, \quad t \in [0, \alpha],$$

$$y^0(t) = 0, \quad t \in [-r, 0].$$

再由方程(1)和方程(2)的等价性，知方程$\dot{x}(t) = f^0(t, x_t)$在$[t_0 - r, t_0 + \alpha]$上存在过(t_0, φ)的解x^0，即$x^0(t) = \tilde{\varphi}(t) + y^0(t - t_0)$。

对于第二个论断，取算子T：$W \times U \times A(\alpha, \beta) \to C([-r,$

$\alpha]$, R^n)为

$$T(\sigma,\phi,f,y)(t)=\int_0^t f(\sigma+s,\ \tilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)ds,\quad t\in[0,\alpha],$$

$$T(\sigma,\ \phi,\ f,y)(t)=0,\quad t\in[-r,\ 0].$$

由引理2知T为连续，且当α、β适当小时，$T:W\times U\times A(\alpha,\ \beta)\to A(\alpha,\ \beta)$，即当任意取定$(\sigma,\ \phi)\in W$，$f\in U$时，算子$T(\sigma,\phi,f)$将$A(\alpha,\ \beta)$映入$A(\alpha,\ \beta)$。又由引理2知$T(\sigma,\phi,f)A(\alpha,\ \beta)\subseteq K$，K为紧集，故$T(\sigma,\ \phi,\ f)A(\alpha,\ \beta)$的闭包为紧，因此$T(\sigma,\phi,\ f)$是全连续算子，由Schauder不动点定理知$T(\sigma,\ \phi,\ f)$在$A(\alpha,\ \beta)$上存在不动点$y$，于是有

$$y(t)=\int_0^t f(\sigma+s,\ \tilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)ds,\quad t\in[0,\ \alpha],$$

$$y(t)=0,\quad t\in[-r,\ 0].$$

再由方程(1)与(2)的等价性，知方程$\dot{x}(t)=f(t,\ x_t)$在$[\sigma-r,\ \sigma+\alpha]$上存在过$(\sigma,\ \phi)$的解，证毕。

定理2 （连续依赖性）。假定$\Omega\subseteq R\times C$为开集，$(\sigma^0,\phi^0)\in\Omega$，$f^0\in C(\Omega,\ R^n)$，$x^0$为方程$\dot{x}(t)=f^0(t,\ x_t)$在$[\sigma^0-r,\ b]$上过$(\sigma^0,\ \phi^0)$的唯一解，设$W^0=\{(t,\ x_t^0):t\in[\sigma^0,\ b]\}$，$V^0$为$W^0$的一个邻域并使$f^0$在它上面为有界，如果序列$\{\sigma^k\}$、$\{\phi^k\}$，$\{f^k\}$当$k\to\infty$时有$\sigma^k\to\sigma^0$，$\phi^k\to\phi^0$，$\|f^k-f^0\|_{V^0}\to0$，则有

(i) 存在正整数$\bar{k}$及正数$b_1\leqslant b$，使得$k\geqslant\bar{k}$时，方程

$$\dot{x}(t)=f^k(t,\ x_t)\tag{4}$$

过$(\sigma^k,\ \phi^k)$的解x^k在$[\sigma^k-r,\ b_1]$上存在。

(ii) 当$k\to\infty$时，$x^k\to x^0$在$[\sigma^0-r,\ b_1]$上一致成立，确切地说，是指对任何$\varepsilon>0$，存在$k_1(\varepsilon)$，使得$k\geqslant k_1(\varepsilon)$时，$x^k(t)$在$[\sigma^0-r+\varepsilon,\ b_1]$上存在并且在此区间上一致地趋于$x^0$。

证 先证(i)，由于$x^0(t)$在$[\sigma^0-r,\ b]$上连续，故必一致连续且有界，从而函数族$\{x^0(t+\theta):t\in[\sigma^0,\ b]\}$在$-r\leqslant\theta\leqslant0$上为等度连续且一致有界。因此，集合$\{x_t^0:t\in[\sigma^0,\ b]\}$是紧的，从而$W^0$也是紧的，现取定一正整数$k^0$，令$W=W^0\cup\{(\sigma^k,\ \phi^k):$

$k\geqslant k^0\}$，显然W为紧集。

由引理1，知存在$M>0$及W的邻域$V\subseteq V^0$，使得当α、β足够小及k^0足够大并且当$k\geqslant k^0$和$k=0$以及$t\in[0,\alpha]$，$y\in A(\alpha,\beta)$时，有

$$(\sigma^k+t,\ \tilde{\phi}^k_{\sigma^k+t}+y^k_t)\in V$$

及
$$|f^k(\sigma^k+t,\ \tilde{\phi}^k_{\sigma^k+t}+y^k_t)|<M.$$

由定理1，知当$k\geqslant k^0$时方程(4)在$[\sigma^k-r,\ \sigma^k+\alpha]$上存在过$(\sigma^k,\ \phi^k)$的解$x^k$，其中$\alpha$是不依赖于$k$的。不妨假定$\sigma^0+\alpha\leqslant b$，现取$b_1\in(\sigma^0,\ \sigma^0+\alpha)$，则存在正整数$\bar{k}\geqslant k^0$，使得当$k\geqslant\bar{k}$时，$\sigma^k+\alpha\geqslant b_1$，从而当$k\geqslant\bar{k}$时方程(4)过$(\sigma^k,\ \phi^k)$的解在$[\sigma^k-r,\ b_1]$上存在。

下证(ii)，由引理2知y^k当$k\geqslant k^0$时是属于紧集K的，故$\{y^k\}$必存在收敛子列$\{y^{k_i}\}$，当$i\to\infty$时y^{k_i}在$[-r,\ \alpha]$上一致地收敛于某一函数y^*，又$y^{k_i}=T(\sigma^{k_i},\ \phi^{k_i},\ f^{k_i},\ y^{k_i})$且$T$为连续算子（引理2），故$i\to\infty$时有$y^*=T(\sigma^0,\ \phi^0,\ f^0,\ y^*)$，可见$y^*$是$T$在$A(\alpha,\ \beta)$上的一个不动点，另一方面，由于$x^0$是方程$\dot{x}(t)=f^0(t,\ x_t)$在$[\sigma^0-r,\ \sigma^0+\alpha]$上过$(\sigma^0,\phi^0)$的唯一解，故$y^0$是$T$在$A(\alpha,\beta)$上的唯一不动点，所以$y^*=y^0$，由于$\{y^k\}$的每一个子列都有收敛子列，而且又都收敛到$y^0$，故$y^k\to y^0$（当$k\to\infty$时）在$[-r,\ \alpha]$上一致地成立，根据$y^k$与$x^k$的关系，即得当$k\to\infty$时，

$$[x^k(\sigma^k+t)-\tilde{\phi}^k(\sigma^k+t)]\to[x^0(\sigma^0+t)-\tilde{\phi}^0(\sigma^0+t)] \tag{5}$$

在$-r\leqslant t\leqslant\alpha$上一致地成立。

对任给$0<\varepsilon<\alpha$，必存在正整数$k(\varepsilon)$，使得当$k\geqslant k(\varepsilon)$时，$x^k(\sigma^0+t)$在$-r+\varepsilon\leqslant t\leqslant\alpha$上有定义，并且下列各式在$-r+\varepsilon\leqslant t\leqslant\alpha$上成立：

$$|x^k(\sigma^k+t)-\tilde{\phi}^k(\sigma^k+t)-x^0(\sigma^0+t)+\tilde{\phi}^0(\sigma^0+t)|<\frac{\varepsilon}{3},\qquad(\because(5))$$

$$|x^k(\sigma^k+t)-\tilde{\phi}^k(\sigma^k+t)-x^k(\sigma^0+t)+\tilde{\phi}^0(\sigma^0+t)|<$$

$\frac{\varepsilon}{3}$，（这是因为函数列$\{y^k\}$在$[-r, \alpha]$上属于紧集K，从而具有等度连续性）。

$$|\tilde{\phi}^k(\sigma^0+t)-\tilde{\phi}^0(\sigma^0+t)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

从而当$k\geqslant k(\varepsilon)$时，对一切$t\in[-r+\varepsilon, \alpha]$，有

$$\begin{aligned}
&|x^k(\sigma^0+t)-x^0(\sigma^0+t)|\\
\leqslant&|x^k(\sigma^k+t)-\tilde{\phi}^k(\sigma^k+t)-x^0(\sigma^0+t)+\tilde{\phi}^0(\sigma^0+t)|\\
&+|x^k(\sigma^0+t)-\tilde{\phi}^k(\sigma^0+t)-x^k(\sigma^k+t)+\tilde{\phi}^k(\sigma^k+t)|\\
&+|\tilde{\phi}^k(\sigma^0+t)-\tilde{\phi}^0(\sigma^0+t)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

这说明了x^k在$[\sigma^0-r+\varepsilon, b_1]$上一致地收敛到$x^0$，证毕。

定理3 （唯一性）假定$\Omega\subseteq R\times C$为开集，函数$f$：$\Omega\to R^n$为连续，又$f(t,\phi)$在$\Omega$的每一个紧子集上对$\phi$满足李普希兹(Lipschitz)条件，如果$(t_0, \varphi)\in\Omega$，则方程(1)过$(t_0, \varphi)$的解是唯一的。

证 设x，y是方程(1)过(t_0, φ)在$[t_0-r, t_0+\alpha]$上的解，并且在$[t_0, t_0+\alpha]$上$x(t)\neq y(t)$，则有

$$x(t)-y(t)=\int_{t_0}^{t}[f(s, x_s)-f(s, y_s)]ds,$$

$$t_0\leqslant t\leqslant t_0+\alpha.$$

$$x_{t_0}-y_{t_0}=\varphi-\varphi=0.$$

设Ω中包含轨线(t, x_t)，(t, y_t) $(t_0\leqslant t\leqslant t_0+\alpha)$的某个紧子集所对应于$f(t, \phi)$的李普希兹常数为$K$，

首先考虑$K\alpha<1$的情形，则当$t\in[t_0, t_0+\alpha]$时，有

$$|x(t)-y(t)|\leqslant\int_{t_0}^{t}|f(s, x_s)-f(s, y_s)|ds$$

$$\leqslant K\int_{t_0}^{t}\|x_s-y_s\|ds\leqslant K\alpha\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t_0+\alpha}\|x_s-y_s\|$$

$$<\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t_0+\alpha}\|x_s-y_s\|.$$

由于上面不等式对一切$t\in[t_0, t_0+\alpha]$成立，故有

$$\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\alpha} |x(t)-y(t)| < \sup_{t_0 \leqslant s \leqslant t_0+\alpha} \|x_s - y_s\|. \tag{6}$$

考虑到$t \in [t_0 - r,\ t_0]$时，$|x(t)-y(t)|=0$，故得

$$\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\alpha} \|x_s - y_s\| = \sup_{t_0 \leqslant s \leqslant t_0+\alpha} |x(s)-y(s)|.$$

代入(6)式便导出矛盾，故必有$x=y$。

如果$K\alpha \geqslant 1$，可选取α_1：$0<\alpha_1<\alpha$，$K\alpha_1<1$，根据上面的讨论，可知$x(t)\equiv y(t)$，$t_0 - r \leqslant t \leqslant t_0+\alpha_1$。再以$t_0+\alpha_1$为起点，重复以上的证明，可得$x(t)\equiv y(t)$，$t_0 - r \leqslant t \leqslant t_0+2\alpha_1$。经过有限次类似的步骤，便可证得$x(t)\equiv y(t)$，$t_0 - r \leqslant t \leqslant t_0+\alpha$。证毕。

例1 纯量方程$\dot{x}(t) = -x\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)$。由于它满足定理2，故对每一个初值$(t_0,\ \varphi)\in \mathbf{R}\times \boldsymbol{C}$，均有唯一解。

值得注意的是，这个方程的某些解，例如$x_1(t)=\sin t$和$x_2(t)=\cos t$，虽然它们相交无穷多次，但并不破坏唯一性，这一点与常微分方程是不同的，在常微分方程中，如果两个解$x_1(t)$和$x_2(t)$相交，例如$x_1(t_1)=x_2(t_1)$，但当$t_1<t<t_1+\delta$时，$x_1(t)\neq x_2(t)$，那末解的唯一性被破坏，因为我们把$(t_1, x_1(t_1))$作为初始条件时，在$[t_1,\ t_1+\delta)$中便存在两个不同的解，在泛函微分方程中却不一样，交点$(t_1,\ x_1(t_1))$不能作为初值，例如在例1中，它的初值是区间$\left[t_0-\dfrac{\pi}{2},\ t_0\right]$上的一段函数$\varphi(t)$，所以$x_1(t)=\sin t$与$x_2(t)=\cos t$虽然相交，但这些交点不能作为初始条件，甚至两个解在区间$[t_1, t_2]$可以相重合，只要$(t_2-t_1)<\dfrac{\pi}{2}$，也不算破坏唯一解。

为了帮助读者对解的唯一性概念的理解，我们再考察两个例子。

例2 考察纯量方程

$$\dot{x}(t) = b(t)x(t-1). \tag{7}$$

其中
$$b(t)=\begin{cases}0, & \text{当}t\leqslant 0\text{时}。\\ \cos 2\pi t-1, & \text{当}0<t\leqslant 1\text{时}。\\ 0, & \text{当}t>1\text{时}。\end{cases}$$
现取初始时刻$t_0=0$，初始函数$\varphi(t)\equiv K$ $(-1\leqslant t\leqslant 0)$,$K$为常数，于是在$[0,\ 1]$上有

$$\dot{x}(t)=(\cos 2\pi t-1)K,\quad x(0)=K。\text{积分之得}$$

$$x(t)=K\left(\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t-t+1\right),\qquad t\in[0,\ 1],$$

故 $\quad x(1)=0$。

当$t>1$时，方程(7)为$\dot{x}(t)=0$　故得$x(t)\equiv 0$。

由上可知，不论初值K取什么值，对应的解从$t\geqslant 1$都永远"粘合"在一起(见图2.1)，我们说解的唯一性并没有破坏，因每一个

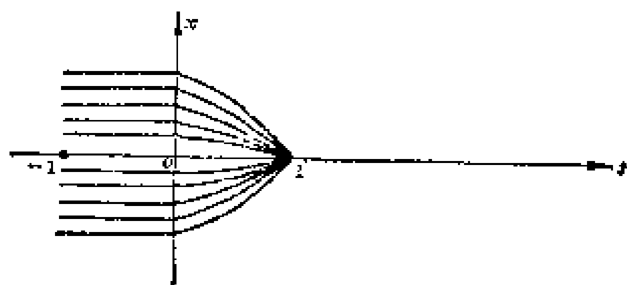


图2.1

初值仍然有它唯一的一个解，从理论上说，方程(7)满足唯一性定理，故对应每一个初值的解是唯一的。

例3 考察纯量方程

$$\dot{x}(t)=a(t)[x^{\frac{1}{2}}(t)-x(t-r)],\quad t\geqslant 0。\tag{8}$$

$$a(t)=\begin{cases}0, & \text{当}t\leqslant r\text{时}。\\ t-r, & \text{当}t>r\text{时}。\end{cases}$$

设初始时刻$t_0=0$; 在$[-r,\ 0]$上给定初始函数$\varphi(t)$，$\varphi(t)$连续且$\varphi(0)=0$，则当$t\in[0,\ r]$时 $\dot{x}(t)=0$，它的解为$x(t)\equiv 0$。当$t\in[r,\ 2r]$时，$\dot{x}(t)=(t-r)x^{\frac{1}{2}}(t)$，它存在两个解$x_1(t)=0$及$x_2=\frac{1}{16}(t-r)^4$。因此，以$\varphi(t)$为初值的解是不唯一的。

§2 解的向前及向后延展性

现讨论滞后型泛函微分方程

$$\dot{x}(t)=f(t, x_t) \tag{1}$$

的延展性.

假定f是连续的，x是方程(1)在区间$[t_0, a)$，$(a>t_0)$上的一个解.如果存在$b>a$，且$\bar{x}(t)$是方程(1)在$[t_0, b)$上的解，使得在$[t_0-r, a)$上$\bar{x}(t)$与$x(t)$相等，则称$\bar{x}$是x的延展.如果$[t_0, a)$是解x存在的最大区间，则解x就是不可延展的.

定理1 设D是$\mathbf{R}\times C$中的开集，f是$D\to\mathbf{R}^n$的连续函数.若x是方程(1)过(t_0, φ)在区间$[t_0-r, b)$上的不可延展的解，则对D中任何紧集W，总存在一个时刻t_ω，使得当$t_\omega<t<b$时，$(t, x_t)\notin W$.

证 当$b=\infty$时，结论是显然的，故只讨论b为有限的情形.

1° 先考虑$r=0$（即(1)为常微分方程的情形）.

假设定理的结论不真，则存在D中的一个紧集W及一实数序列$t_k\to b^-(k\to\infty)$使得$(t_k, x(t_k))\in W$.

由W的紧性，$(t_k, x(t_k))$必有收敛的子列，不妨就设$(t_k, x(t_k))$收敛，其极限点$(b, y)\in W$.

设$|f(b, y)|<N$，由f的连续性知存在(b, y)的一个邻域U，使得$(t, x)\in U$时$|f(t, x)|\leqslant N$，即$|\dot{x}(t)|\leqslant N$.从而可推知$x(t)$在$[t_0, b)$上一致连续.于是由$x(t_k)\to y(k\to\infty)$推知$x(t)\to y(t\to b^-)$.现定义$x(b)=y$，则点$(b, x(b))\in W\subset D$.故由解的存在定理可知，以$(b, x(b))$为初始条件的解$x(t)$必定在某一区间$[b, b+\alpha)$上存在，从而与假定$x(t)$在$[t_0-r, b)$不可延展发生矛盾.故当$r=0$时定理成立.

2° 对$r>0$的情形，仍用反证法，如果定理结论不真，则存在一序列$t_k\to b^-(k\to\infty)$，有$(t_k, x_{t_k})\in W$.由W的紧性不妨设(t_k, x_{t_k})收敛于$(b, \psi)\in W$.因此对任何$\varepsilon\in(0, r)$，有

$$\lim_{k\to\infty}\ \operatorname{Sup}_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}\ |x(t_k+\theta)-\psi(\theta)|=0.$$

从而当$-r\leqslant\theta<0$时，$x(b+\theta)=\psi(\theta)$。于是$\lim\limits_{t\to b^-}x(t)=\psi(0)$，现定义$x(b)=\psi(0)$，则$(b, x_b)=(b, \psi)\in W$，由解的存在定理知方程(1)过$(b, \psi)$的解在$b$的右边存在。从而与$x$在$[t_0-r, b)$是不可延展解的假设矛盾，故定理成立。

推论1 设D是$\mathrm{R}\times C$中的开集，f：$D\to\mathrm{R}^n$为连续，若x是方程(1)过(t_0, φ)在$[t_0-r, b)$上的一个不可延展的解。又W是$\mathrm{R}\times C$中的集$\{(t, x_t): t_0\leqslant t<b\}$的闭包，则当$W$为紧集时必存在实数列$\{t_k\}$，当$k\to\infty$时，$t_k\to b^-$，使得当$k\to\infty$时，$(t_k, x_{t_k})$趋于$D$的边界，又若$r>0$时，必存在$\psi\in C$，$(b,\psi)\in\partial D$($D$的边界)，使得当$t\to b^-$时，$(t, x_t)\to(b, \psi)$。

证 由定理1知W不会完全包含在D内，否则，必有$(t, x_t)\notin W$，这与W的定义矛盾。因此，必存在实数列$\{t_k\}$，当$k\to\infty$时$t_k\to b^-$，使得$(t_k, x_{t_k})\to\partial D$。又当$r>0$时，与定理1的证明类似，可得$(t_k, x_{t_k})\to(b, \psi)\in W$（当$k\to\infty$），从而得到$x(b+\theta)=\psi(\theta)$，$(-r\leqslant\theta<0)$。定义$x(b)=\psi(0)$，便得当$t\to b^-$时，$(t,x_t)\to(b, \psi)\in\partial D$。证毕。

在定理1中，若将f的连续性加强为全连续，则集W的紧性可减弱为有界闭集。$f: D\to\mathrm{R}^n$为全连续是指f为连续，并且将D中的有界闭集映射为有界集。

定理2 设D是$\mathrm{R}\times C$中的开集，$f: D\to\mathrm{R}^n$是全续的，又x是方程(1)过(t_0, φ)在$[t_0-r, b)$上不可延展的解，则对D中任何有界闭集W，总存在一个时刻t_w，使得当$t_w\leqslant t<b$时，$(t,x_t)\notin W$。

证 当$r=0$时，因为$\mathrm{R}\times\mathrm{R}^n$中的有界闭集是紧集，所以由定理1知本定理的结论成立。

当$r>0$时，$b=\infty$的情形定理的结论显然成立。故只需考虑b为有限的情形。用反证法，如果定理的结论不真，则必存在D中的一个有界闭集W及一实数列$t_k\to b^-(k\to\infty)$，使得$(t_k, x_{t_k})\in W$，取$0<\delta<r$，则在$[b-\delta, b)$中，由于$(t_k, x_{t_k})\in W$，而W

为有界集，故$x(t)$在$[t_k-r, t_k]$上为有界，因$t_k\to b^-(k\to\infty)$，故知$x(t)$在$[b-\delta, b)$上为有界。在$[t_0-r, b-\delta]$上，由于$x(t)$连续，故必有界。从而得知$x(t)$在$[t_0-r, b)$上为有界。这说明集合$E=\{(t, x_t): t_0\leqslant t<b\}$是有界集。由$f$的假设，必存在$M>0$，使得对$E$中的任一元素$(t, x_t)$，都有$|f(t, x_t)|\leqslant M$。因此对$[t_0, b)$中的任何两点$t_1$、$t_2$，有

$$|x(t_1)-x(t_2)|=\left|\int_{t_2}^{t_1} f(t, x_t)dt\right|\leqslant M|t_1-t_2|.$$

故$x(t)$在$[t_0-r, b)$上一致连续。加上其有界性，便可知集合$\{x_t: t_0\leqslant t<b\}$为等度连续及一致有界。因而为相对紧集。故集合$E$为相对紧集。

因序列$\{(t_k, x_{t_k})\}\subset E$，故$\{(t_k, x_{t_k})\}$必有收敛子列，不妨设为$\{(t_k, x_{t_k})\}$本身，又设$(t_k, x_{t_k})\to(b, \psi)$由于$(t_k, x_{t_k})\in W$，而$W$是闭集，故$(b, \psi)\in W$，因此对任$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{\theta\in[-r,-\varepsilon]}|x(t_k+\theta)-\psi(\theta)|=0.$$

从而当$-r\leqslant\theta<0$时，$x(b+\theta)=\psi(\theta)$。于是$\lim\limits_{t\to b^-}x(t)=\psi(0)$。现定义$x(b)=\psi(0)$，则$(b, x_b)=(b, \psi)\in W\subset D$。于是以$(b, \psi)$为初始条件的解必然在$b$的右边存在。这与$x$在$[t_0-r, b)$是不可延展的解的假设矛盾。故定理的结论为真。证毕。

定理2给出了在$[t_0, b)$上不可延展的解在$\mathbf{R}\times C$中的轨线$\{(t, x_t): t_0\leqslant t<b\}$当$t\to b^-$时趋于$D$的边界的条件，即$f$在$D$上为全连续。如果去掉这个条件，就不能保证解的轨线当$t\to b^-$时趋于D的边界，从而出现$x(t)$在b点左边无限振动的现象，以至当$t\to b^-$时，(t, x_t)没有极限点。下面举例来说明。

设$\Delta(t)=t^2$，选取两个负数的序列$\{a_k\}$，$\{b_k\}$：

$$a_1<a_2<\cdots<a_k<\cdots，当k\to\infty时\quad a_k\to 0,$$

$$b_1<b_2<\cdots<b_k<\cdots，当k\to\infty时\quad b_k\to 0.$$

且使得

$$a_k=b_k-\Delta(b_k),\ b_k\leqslant a_{k+1}-\Delta(a_{k+1}),\ k=1, 2,\cdots.$$

譬如取　$b_k=-2^{-k}$，$k=1，2，\cdots$。

设$\psi(t)$是满足下列条件的任意连续可微函数。

$$\psi(t)=\begin{cases}+1, & t\in(-\infty,\ a_1],\ [b_{2k},\ a_{2k+1}],k=1,2,\cdots\\ -1, & t\in[b_{2k-1},\ a_{2k}],\ k=1,2,\cdots\end{cases}$$

$\psi'(t)\neq 0$，$t\in(a_k,\ b_k)$，$k=1，2，\cdots$

设$H=\{(t,x):|x|<1-t\}$。这等价于

当$x>0$时$x+t<1$，当$x<0$时$-x+t<1$，因此H是楔形（见图2.2）

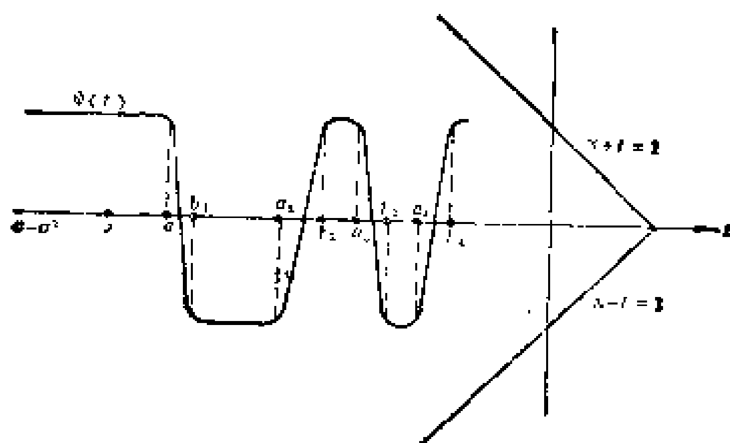


图2.2

现在区域H上定义一个函数$h(t,\ x)$如下：

(i)　在$\psi(t)$的图形上，$h(t,\ x)$满足

$$h(t-\Delta(t),\ \psi(t-\Delta(t)))=\psi'(t),\ \ -\infty<t<0;$$

(ii)　当点$(t,\ x)\in$矩形P：$|t|+|x|\leqslant 1$时，$h(t,\ x)=0$；

(iii)　当点在H的其他地方，$h(t,\ x)$可任意给定，但保持连续。

对于$h(t,\ x)$，我们可以看到以下几点现象：

①　在$\psi(t)$的图形上递增或递减的部份上的任一点$(t,\psi(t))$，则t属于某一区间$(a_k,\ b_k)$，由a_k，b_k的定义知必有一个$s\in(b_k,\ a_{k+1})$，使得$t=s-\Delta(s)$，于是有

$$h(t,\ \psi(t))=h(s-\Delta(s),\ \psi(s-\Delta(s)))=\psi'(s)=0.$$

②　(ii)和(i)并不矛盾。因为在矩形P内的$\psi(t)$的图形都是递增或递减的，从而有$h(t,\ \psi(t))=0$。而(ii)中定义在P内的

$h(t, x)=0$，正好保持$h(t, x)$的连续性。

③ 集合$E=\{(t, \psi_t): t_0\leqslant t<0\}$为有界闭集，事实上，当$t\to 0^-$时$\psi_t$不存在极限。而$t$趋于任一$\tau\in[t_0, 0)$时，$\psi_t\to\psi_\tau$，而$(\tau, \psi_\tau)\in E$，这表明$E$的一切极限点皆属于$E$，故$E$为闭集。$E$的有界性是显然的。所以$E$是一个有界闭集。

现考虑方程

$$\dot{x}(t)=h(t-\Delta(t), x(t-\Delta(t))), \quad t<0\text{且}\Delta(t)=t^2. \tag{2}$$

取$t_0<a_1$，令$r=t_0^2$，又取$\varphi(t)\equiv 1$ $(t_0-r\leqslant t\leqslant t_0)$。今以$(t_0, \varphi)$为方程(2)的初始条件。显然，$x(t)=\psi(t)$是方程(2)过$(t_0, \varphi)$在$[t_0-r, 0)$上不可延展的解。

现把(2)的右端写成泛函$f(t, x_t)$的形式，即

$$f(t, \phi)=h(t-t^2, \phi(-t^2)), \quad t\in[t_0, 0), \phi\in C([-r, 0], \mathrm{R})$$

由h的构造可知，$f(t, \phi)$并不把有界闭集映射为有界集。事实上，由前述已知E是有界闭集，但$f(E)$是无界集，因为可取一序列$\{t_k\}$，其中$t_k\in(a_k, b_k)$，于是$|f(t_k, x_{t_k})|=|h(t^k-t_k^2, \psi(t_k-t_k^2))|=|\psi'(t_k)|\to\infty$（当$k\to\infty$时）。故$f$不是全连续的。

由以上的例子可以看到，如果取消f的全连续条件，则定理2的结论就可能不成立。

以上我们讨论了泛函微分方向的解向初始时刻右方延展的性质，下面讨论泛函微分方程在初始时刻左方是否存在解的问题。

定义1 设D是$R\times C$中的开集，$f\in C(D, \mathbf{R}^n)$，$(t_0, \varphi)\in D$。如果函数$x\in D([t_0-r-\alpha, t_0], \mathbf{R}^n)$ $(\alpha>0)$满足下列条件：

(i) $x_{t_0}=\varphi$，

(ii) 对任一$t_1\in[t_0-\alpha, t_0)$，有$(t_1, x_{t_1})\in D$.

(iii) x是方程(1)过(t_1, x_{t_1})在$[t_1-r, t_0]$上的解，则称x是方程(1)过(t_0, φ)的反向延展的解。

在泛函微分方程中，往往不存在反向延展的解，例如

例1 考察纯量方程

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-r). \tag{3}$$

其中a，b，r皆为常数，$b\neq0$，$a\neq-b$，$r>0$。

现取初始时刻$t_0=0$，初始函数$\varphi(t)\equiv k$(常数)$t\in[-r,0]$。(3)可写成

$$x(t-r)=\frac{\dot{x}(t)-ax(t)}{b}.$$

令$s=t-r$，则 $x(s)=\dfrac{\dot{x}(s+r)-ax(s+r)}{b}$.

当$s\in[-2r,\ -r]$时，$x(s+r)=\varphi(s+r)=k$，$\dot{x}(s+r)=0$.故

$$x(s)=-\frac{ak}{b}.$$

由于$-\dfrac{ak}{b}\neq k$，故$x(t)$在$-r$处不连续。故方程(3) 不存在满足初值$\varphi(t)\equiv k$ $(-r\leqslant t\leqslant0)$的反向延展的解。

有时泛函微分方程的解虽然可以反向延展，但往往不唯一。如本章§1中的例2，如果给定初值为$\varphi(t)\equiv0(1\leqslant t\leqslant2)$，则反向延展的解为

$$x(t)=\begin{cases}k\left(\dfrac{1}{2\pi}\sin2\pi t-t+1\right), & (\text{当}0\leqslant t\leqslant1\text{时}),\\ k, & (\text{当}t\leqslant0\text{ 时}).\end{cases}$$

k为任意常数，k取不同的值便得到不同的解，故不唯一。

如何才能保证有唯一的反向延展解？我们先从下面的简单例子考察起。

例2 设纯量方程为$\dot{x}(t)=a(t)x(t-r)$，$x_0=\varphi$. (4)

如果满足下列条件：

(i) 存在$0<\alpha\leqslant r$，$\varphi(t)$在$[-\alpha,\ 0]$上存在且连续，

(ii) $\dot{\varphi}(0)=a(0)\varphi(-r)$.

(iii) 当$-\alpha\leqslant t\leqslant0$时，$a(t)\neq0$.

则(4)可写成

$$x(t-r)=\frac{1}{a(t)}\dot{x}(t).$$

故方程(4)存在过(0，φ)的向左延展的解为

$$x(t)=\begin{cases}\varphi(t), & \text{当} -r\leqslant t\leqslant 0\text{ 时},\\ \dfrac{1}{a(t+r)}\dot{\varphi}(t+r), & \text{当} -r-\alpha\leqslant t\leqslant -r\text{时}.\end{cases}$$

如果把方程(4)的右端看作$f(t, x_t)$，再根据第一章§2中关于原子的定义，即知$a(t)$在$[-\alpha, 0]$上不等于零相当于$f(t,\varphi)$在$[-\alpha, 0]$上于$-r$处是原子的。一般地，关于解的反向延展有如下的结果：

定理3（解的反向延展）

设D是$\mathbf{R}\times C$中的开集，$f:D\to\mathbf{R}^n$且连续，又$(t_0, \varphi)\in D$为给定的初始条件。如果满足下列条件：

(i) 存在α：$0<\alpha<r$，使得$\dot{\varphi}(\theta)$在$[-\alpha, 0]$上连续，又$\dot{\varphi}(0)=f(t_0, \varphi)$

(ii) 当$f(t, \phi)$关于ϕ为线性时，它在$[t_0-\alpha, t_0]$上于$-r$处是原子的；当$f(t, \phi)$关于ϕ为非线性时，存在$\beta>0$,使得$f(t, \phi)$在$U=[t_0-\alpha, t_0]\times C_{\varphi,\beta}$上于$-r$处是原子的，其中$C_{\varphi,\beta}=\{\psi:\psi\in C, \|\psi-\varphi\|\leqslant\beta\}$。

(iii) $f(t, \phi)$对ϕ存在连续的二阶Fréchet导数。

则存在$\bar{\alpha}>0$，使得方程(1)过(t_0, φ)的解在$[t_0-r-\bar{\alpha}, t_0]$上存在而且唯一。

证 根据定义，x为方程(1)过(t_0, φ)且定义在$[t_0-r-\alpha, t_0]$上的解的充要条件为

$$\begin{cases}f(t, x_t)=\dot{x}(t)=\dot{\varphi}(t-t_0), & t_0-\alpha\leqslant t\leqslant t_0,\\ x_{t_0}=\varphi,\end{cases}\tag{5}$$

且 $(t, x_t)\in D$, $t_0-\alpha\leqslant t\leqslant t_0$.

对任何$\alpha>0$，取$\tilde{\varphi}:[-r-\alpha, 0]\to\mathbf{R}^n$，定义如下：

$$\tilde{\varphi}(t)=\begin{cases}\varphi(t), & -r\leqslant t\leqslant 0,\\ \varphi(-r), & -r-\alpha\leqslant t\leqslant -r.\end{cases}$$

令$x(t_0+t)=\bar{\varphi}(t)+z(t)$，$-r-\alpha\leqslant t\leqslant 0$．那末求$x$满足(5)转化为求$z$满足下面的初值问题：

$$\begin{cases} f(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t+z_t)=\varphi(t), & -\alpha\leqslant t\leqslant 0, \\ z_0=0. \end{cases} \tag{6}$$

由条件(iii)，$f(t,\ \phi+\psi)$可展开为

$$f(t,\ \phi+\psi)=f(t,\ \phi)+f'_\phi(t,\ \phi)\psi+g(t,\ \phi,\ \psi)$$
$$=f(t,\ \phi)+L(t,\ \phi)\psi+g(t,\ \phi,\ \psi). \tag{7}$$

其中 $g(t,\ \phi,\ \psi)$对$(t,\ \phi,\ \psi)$是连续的，$g(t,\ \phi,\ 0)=0$，且对任意$(t,\ \phi)\subset D$，存在$\beta=\beta(t,\ \phi)\geqslant 0$及对$(t,\ \phi,\beta)$连续 的函数$\varepsilon(t,\ \phi,\ \beta)$，$\varepsilon(t,\ \phi,\ 0)=0$使得

$$|g(t,\ \phi,\ \psi)-g(t,\ \phi,\ \xi)|\leqslant\varepsilon(t,\ \phi,\beta)\ \|\psi-\xi\|. \tag{8}$$

其中 $\|\xi\|\leqslant\beta$，$\|\psi\|\leqslant\beta$．

现将(6)的右端按(7)式展开，得到

$$f(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t+z_t)=f(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t)+L(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t)z_t$$
$$+g(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t,\ z_t).$$

从而(6)式化为

$$\begin{cases} L(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t)z_t=-f(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t)-g(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t,\ z_t) \\ \qquad +\varphi(t), \quad -\alpha\leqslant t\leqslant 0, \\ z_0=0. \end{cases} \tag{9}$$

根据条件(ii)及原子的定义（见第一章§2之2），知存在一个$n\times n$的有界变差矩阵函数 $\mu(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t,\ \theta)$ $(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t)\in D$，$\theta\in[-r,\ 0]$，使得

$$L(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t)z_t=\int_{-r}^{0}[d_\theta\mu(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t,\ \theta)]z(t+\theta)$$
$$=A(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t)z(t-r)+\int_{-r^+}^{0}[d_\theta\mu(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t,\ \theta)]$$
$$z(t+\theta). \tag{10}$$

其中 $A(t_0+t,\bar{\varphi}_t)=\mu(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t,-r^+)-\mu(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t,\ -r)$且当$(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t)\in U$时，$\det A(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t)\neq 0$．

现取$\alpha>0$，使得当$-\alpha\leqslant t\leqslant 0$时，$(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t)\in U$，于是将(10)式代入(9)式便得

$$\begin{cases} A(t_0+t,\bar{\varphi}_t)z(t-r) = -\int_{-r}^{0}[d_\theta\mu(t_0+t,\bar{\varphi}_t,\theta)]z(t+\theta) \\ -f(t_0+t,\bar{\varphi}_t)-g(t_0+t,\bar{\varphi}_t,z_t)+\phi(t), \quad -\alpha\leqslant t\leqslant 0. \\ z_0 = 0. \end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases} z(t-r) = A^{-1}(t_0+t,\bar{\varphi}_t) \\ \qquad \cdot\left\{-\int_{-r}^{0}[d_\theta\mu(t_0+t,\bar{\varphi}_t,\theta)]z(t+\theta)\right. \\ \left.-f(t_0+t,\bar{\varphi}_t)-g(t_0+t,\bar{\varphi}_t,z_t)+\phi(t)\right\}, \quad -\alpha\leqslant t\leqslant 0, \\ z_0 = 0. \end{cases} \tag{11}$$

对任何$\beta>0$，令集$B_\beta=\{\psi\in C: \|\psi\|\leqslant\beta\}$。又对任何$\gamma\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$，存在$\alpha>0$，$\beta>0$，使得当$t\in[-\alpha,0]$，$\psi\in B_\beta$时，$(t_0+t,\varphi+\psi)\in D$，且

$$|A^{-1}(t_0+t,\ \varphi+\psi)|\varepsilon(t_0+t,\ \varphi+\psi,\ \beta)<\gamma, \tag{12}$$

$$|A^{-1}(t_0+t,\ \varphi+\psi)|\lambda(t_0+t,\ \varphi+\psi,\ \alpha)<\gamma. \tag{13}$$

其中$\lambda: D\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$为连续，且$\lambda(t_0+t,\ \varphi+\psi,\ 0)=0$，并且满足

$$\left|\int_{-r}^{-r+\alpha}[d\mu_\theta(t_0+t,\varphi+\psi,\theta)\phi(\theta)\right|\leqslant\lambda(t_0+t,\varphi+\psi,\alpha)\ \|\phi\| \tag{14}$$

(函数λ的存在性的证明见附注)

现再选取$\bar{\alpha}$，$\bar{\beta}$如下：先取定$\bar{\beta}\in(0,\ \beta)$，然后选取$\bar{\alpha}\in(0,\alpha)$使得当$t\in[-\bar{\alpha},\ 0]$时，有

$$\|\bar{\varphi}_t-\varphi\|<\beta-\bar{\beta},$$

$$|A^{-1}(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t)|\,|f(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t)-f(t_0,\varphi)|\leqslant\gamma\bar{\beta}, \tag{15}$$

$$|A^{-1}(t_0+t,\bar{\varphi}_t)|\,|\phi(0)-\phi(t)|\leqslant\gamma\bar{\beta}, \tag{16}$$

置$E(\bar{\alpha},\ \bar{\beta})=\{\zeta\in C([-r-\bar{\alpha},\ 0],\ \mathbf{R}^n),\ \zeta_0=0,\ \zeta_t\in B_{\bar{\beta}},\ t\in[-\bar{\alpha},\ 0]\}$，并定义变换$T: E(\bar{\alpha},\bar{\beta})\to C([-r-\bar{\alpha},0],\mathbf{R}^n)$如下：

$$(T\zeta)(t-r)=A^{-1}(t_0+t,\bar{\varphi}_t)\left\{-\int_{-r}^{0}[d_\theta\mu(t_0+t,\bar{\varphi}_t,\theta)]\zeta_t(\theta)\right.$$

$$+[f(t_0,\varphi)-f(t_0+t,\varphi_t)]-g(t_0+t,\varphi_t,\zeta_t)$$
$$+[\varphi(t)-\varphi(0)]\},t\in[-\bar{\alpha},0] \tag{17}$$

$(T\zeta)_0=0$.

由于假设$\varphi(0)=f(t_0,\varphi)$，故如果$T$在$E(\bar{\alpha},\bar{\beta})$中存在不动点$\zeta$，则$\bar{\zeta}$在$[-r-\bar{\alpha},0]$上为方程(6)的解，再通过$x(t_0+t)=\varphi(t)+\bar{\zeta}(t)$便得到方程(1)在$[t_0-r-\alpha, t_0]$上的解。因此，我们只要证明$T$在$E(\bar{\alpha},\bar{\beta})$上存在唯一的不动点就行了。为此，我们来证明$T$是$E(\bar{\alpha},\bar{\beta})\to E(\bar{\alpha},\bar{\beta})$的一个压缩映射。

当$t\in[-\bar{\alpha}, 0]$，$\theta\in[-r+\bar{\alpha}, 0]$时，则$t+\theta\in[-r, 0]$，根据$E(\bar{\alpha},\bar{\beta})$的定义知$\zeta_t(\theta)=\zeta(t+\theta)=0$，从而

$$\left|\int_{-r+\bar{\alpha}}^{0}[d_\theta\mu(t_0+t,\varphi_t,\theta)]\zeta_t(\theta)\right|=0.$$

再注意到(13)、(14)便得到

$$|A^{-1}(t_0+t,\varphi_t)|\left|\int_{-r+}^{-r+\bar{\alpha}}[d_\theta\mu(t_0+t,\varphi_t,\theta)]\zeta_t(\theta)\right|$$

$$=|A^{-1}(t_0+t,\varphi_t)|\left|\int_{-r+}^{r+\bar{\alpha}}[d_\theta\mu(t_0+t,\varphi_t,\theta)]\zeta_t(\theta)\right|$$

$$\leqslant|A^{-1}(t_0+t,\varphi_t)|\lambda(t_0+t,\varphi_t,\bar{\alpha})\|\zeta_t\|\leqslant\gamma\bar{\beta}. \tag{18}$$

由(8)得

$$|g(t_0+t,\varphi_t,\zeta_t)|=|g(t_0+t,\varphi_t,\zeta_t)-g(t_0+t,\varphi_t,0)|$$
$$\leqslant\varepsilon(t_0+t,\varphi_t,\beta)\|\zeta_t\|.$$

于是再由(12)得

$$|A^{-1}(t_0+t,\varphi_t)||g(t_0+t,\varphi_t,\zeta_t)|\leqslant\gamma\bar{\beta}. \tag{19}$$

从而由(15)、(16)、(18)、(19)，得到当$t\in[-\alpha, 0]$时有

$$|(T\zeta)(t-r)|\leqslant|A^{-1}(t_0+t,\varphi_t)|$$
$$\cdot\left\{\left|\int_{-r+}^{0}|[d_\theta\mu(t_0+t,\varphi_t,\theta)]\zeta_t(\theta)|\right.\right.$$
$$+|f(t_0+t,\varphi_t)-f(t_0,\varphi)|+|g(t_0+t,\varphi_t,\zeta_t)|$$
$$\left.+|\varphi(t)-\varphi(0)|\right\}\leqslant\gamma\bar{\beta}+\gamma\bar{\beta}+\gamma\bar{\beta}+\gamma\bar{\beta}\leqslant\bar{\beta}.$$

这表明T将$E(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$映射入$E(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$之中。

对于任意的ζ、$\xi\in E(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$，有

$$
\begin{aligned}
&|(T\zeta)(t-r)-(T\xi)(t-r)|\leqslant |A^{-1}(t_0+t, \varphi_t)| \\
&\left\{\left|\int_{-r_t}^{0}[d_\theta\mu(t_0+t, \varphi_t, \theta)|(\zeta_t(\theta)-\xi_t(\theta))|+\right.\right. \\
&\qquad +|g(t_0+t, \varphi_t, \zeta_t)-g(t_0+t, \varphi_t, \xi_t)| \\
&\qquad \leqslant \gamma\ \|\zeta_t-\xi_t\| + \gamma\ \|\zeta_t-\xi_t\| \leqslant \frac{1}{2}\ \|\zeta_t-\xi_t\|.
\end{aligned}
$$

这表明T是$E(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$上的一个压缩，因此存在唯一的不动点。证毕。

例3 考虑非线性纯量方程

$$
\dot{x}(t)=-ax(t-1)[1+x(t)],\ a>0. \tag{20}
$$

此时 $f(t,\phi)=-a\phi(-1)[1+\phi(0)]$，而

$$
\begin{aligned}
f(t,\phi+\psi)-f(t,\phi)&=-a\psi(-1)[1+\phi(0)]-a\phi(-1)\psi(0) \\
&\quad -a\psi(-1)\psi(0).
\end{aligned}
$$

故

$$
f'_\phi(t, \phi)\psi=-a\psi(-1)[1+\phi(0)]-a\phi(-1)\psi(0). \tag{21}
$$

现任取初始条件 $(t_0, \varphi)\in \mathrm{R}\times C$，满足下列条件：

(i) 存在α：$0<\alpha\leqslant 1$，$\varphi(\theta)$在$[-\alpha, 0]$上连续并且$\varphi(0)=-a\varphi(-1)[1+\varphi(0)]$。

(ii) $\varphi(\theta)\neq -1$，$-\alpha\leqslant\theta\leqslant 0$。

由(ii)，存在$\beta>0$。使得当$\phi\in C_{\varphi,\beta}=\{\xi\in C,\ \|\xi-\varphi\|\leqslant\beta\}$时$\phi(\theta)\neq -1$，$-\alpha\leqslant\theta\leqslant 0$，再由(21)式即知$f(t, \phi)$在$[t_0-\alpha, t_0]\times C_{\varphi,\beta}$上于$-1$处是原子的。

显然，方程(20)满足了定理3的条件，故存在$0<\bar{\alpha}\leqslant\alpha$，使得(20)在$[t_0-1-\bar{\alpha}, t_0]$上存在过$(t_0, \varphi)$的反向延展的唯一解。

事实上，在条件(i)、(ii)下，方程(20)的反向延展解为

$$
x(t)=\begin{cases}-\dfrac{\dot{\varphi}(t+1)}{a[1+\varphi(t+1)]}, & t_0-1-\bar{\alpha}\leqslant t\leqslant t_0-1, \\ \varphi(t), & t_0-1\leqslant t\leqslant t_0.\end{cases}
$$

§3 解对初值的可微性

大家知道，对于常微分方程组

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t)),$$

如果 $f(t, x)$ 以及 $f(t, x)$ 关于 x 的各分量的偏导数在某个区域内连续，则方程的解 $x=x(t, t_0, x_0)$ 在它的存在范围内不但 $\frac{\partial}{\partial x_0}x(t, t_0, x_0)$ 存在，连续，而且 $\frac{\partial}{\partial t_0}x(t, t_0, x_0)$ 也存在，连续。对于泛函微分方程，则情况有所不同。

设开集 $\Omega\subseteq \mathbf{R}\times C$，以 $C^p(\Omega, \mathbf{R}^n)$ 表示把 Ω 映射到 $\mathbf{R}^n$ 的函数所成的空间，并且 $C^p(\Omega, \mathbf{R}^n)$ 中的每一个函数 $f(t, \phi)$ 均对 ϕ 具有直至 p 阶的有界连续导数。这个空间是 Banach 空间，如果它的范数定义为各阶导数（直至 p 阶）的范数中最大的那一个。

定义1 设 U 是Banach空间 X 中的一个子集，映照 $T: U\to X$。如果存在一常数 $\lambda\in[0, 1)$，使得对所有的 x、$y\in U$ 都有

$$\|Tx-Ty\|\leqslant\lambda\|x-y\|.$$

则称 T 在 U 上是一个压缩。

设 V 是Banach空间 Y 中的一个子某，映照 $T: U\times V\to X$。如果存在常数 $\lambda\in[0, \lambda)$，使得对所有的 x、$y\in U$ 和 $v\in V$ 都有

$$\|T(x, v)-T(y, v)\|\leqslant\lambda\|x-y\|.$$

则称 T 在 U 上关于 V 是一致压缩的。

引理1 （压缩映像原理） 如果 U 是Banach空间 X 中的一个闭子集，$T: U\to U$ 是一个压缩，则 T 在 U 中有唯一的不动点。

引理2 设 U 是Banach空间 X 中的一个闭子集，V 是 Banach空间 Y 中的一个子集，$T: U\times V\to U$ 是一个一致压缩而且是连续的。则 $T(\cdot, v)$ 在 v 上的唯一不动点 $x(v)$ 对 v 是连续的。再者，如果 U、V 是开集 U°、V° 的闭包，$T(x, v)$ 对 x、v 具有连续的一阶导数，则 $x(v)$ 对 v 具有连续的一阶导数。这个结论对高阶导数也成立。

定理1 如果$f\in C^p(\Omega, \mathbf{R}^n)$，$p\geqslant 1$，则方程 $\dot{x}(t)=f(t, x_t)$ 过 (t_0, φ) 的解$x(t)=x(t_0, \varphi, f)(t)$ 是唯一的，而且当t在$x(t_0, \varphi, f)(t)$的定义域内的任何一个紧集上时，对 (φ, f) 为连续可微。再者，对每一个$t\geqslant t_0$，偏导数$D_\varphi x(t_0, \varphi, f)(t)$是一个将$C$映入$\mathbf{R}^n$中的线性算子。$D_\varphi x_{t_0}(t_0, \varphi, f)(t_0)=I$。又$D_\varphi x(t_0, \varphi, f)(t)\psi$对每一个$\psi\in C$均满足线性变易方程

$$\dot{y}(t)=D_\phi f(t, x_t(t_0, \varphi, f))y_t \tag{1}$$

对每一个$t\geqslant t_0$，$D_f x(t_0, \varphi, f)(t)$是一个将$C^p(\Omega, \mathbf{R}^n)$映入$\mathbf{R}^n$中的线性算子。$D_f x(t_0, \varphi, f)(t_0)=0$，对每一个$g\in C^p(\Omega, \mathbf{R}^n)$，$D_f x(t_0, \varphi, f)(t)g$满足下面的非齐次线性变易方程

$$\dot{z}(t)=D_\phi f(t, x_t(t_0, \varphi, f))Z_t+g(t, x_t(t_0,\varphi,f)). \tag{2}$$

证 由于$p\geqslant 1$，故由§1定理2即知过(t_0, φ)的解$x(t, t_0\varphi)$，是唯一的。设x存在的最大区间为$[t_0-r, t_0+\omega)$，现固定$b<\omega$。

首先证明$x(t_0,\varphi,f)(t)$在$[t_0-r,t_0+b]$关于φ是连续可微的。取定φ的一个开邻域U，使得当$\psi\in U$时$x(t_0, \psi, f)(t)$在$[t_0-r, t_0+b]$上是有意义的。现设$W=\{(t, x_t): t\in[t_0, t_0+b]\}$，则$W$是紧的。应用上一节的记号，并由上节的引理2知可以确定M、α、β、U和V。现选取α使$M\alpha<\beta$及$k\alpha<1$。其中k是f在Ω上关于ϕ的导数的界。如果$x(t_0+t)=\tilde{\varphi}(t_0+t)+y(t)$，$t\in[0, \alpha]$，则$y$是上一节引理3中的算子$T(t_0, \varphi, f)$的不动点。另一方面，由$\alpha$和$\beta$的限制知$T(t_0, \varphi, f)$将$A(\alpha, \beta)$映射入自身并且是一个压缩。而且，其压缩常数不依赖于$(t_0, \varphi, f)\in V\times U$。不难证明$T(t_0, \varphi, f)$ 关于φ和f是连续可微的。故从引理2便知其不动点$y=y(t_0, \varphi, f)$关于φ和f也是连续可微的。由于

$$x(t_0,\varphi,f)(t_0+t)=\tilde{\varphi}(t_0+t)+y(t_0,\varphi,f)(t),\quad 0\leqslant t\leqslant b.$$

故$x(t_0, \varphi, f)(t)$对于φ和f也是连续可微的。根据 Frèchet 导数的概念，知道$D_\varphi x(t_0, \varphi, f)(t)$是将$C$映射入$\mathbf{R}^n$的线性算子，

$D_f x(t_0, \varphi, f)(t)$是将$C^p(\Omega, \mathbf{R}^n)$映射入$\mathbf{R}^n$的线性算子。且有

$$D_\varphi x_{t_0}(t_0, \varphi, f)=\frac{d\varphi}{d\varphi}=I,\ D_f x(t_0, \varphi, f)(t_0)=\frac{d\varphi(0)}{df}=0.$$

因 $x(t_0, \varphi, f)(t)=\varphi(0)+\int_{t_0}^{t} f(s, x_s(t_0, \varphi, f))ds$，故对任一$\psi\in C$有

$$D_\varphi x(t_0, \varphi, f)(t)\psi=\psi(0)+\int_{t_0}^{t} D_\varphi f(s,x_s(t_0,\varphi,f))$$
$$D_\varphi x_s(t_0, \varphi, f)\psi ds$$

于是
$$\frac{d}{dt}D_\varphi x(t_0,\varphi,f)(t)\psi$$
$$=D_\varphi f(t,x_t(t_0,\varphi,f))D_\varphi x_t(t_0,\varphi,f)\psi.$$

若令$D_\varphi x(t_0,\varphi,f)(t)\psi=y(t)$，则$y_t=D_\varphi x_t(t_0,\varphi,f)\psi$。可见$D_\varphi x(t_0,\varphi,f)(t)\psi$满足线性变易方程(1)。

同理可证定理的第二个论断及(2)成立。证毕。

至于解$x(t_0,\varphi,f)$对初始时刻t_0的导数，一般是不存在的，例如方程

$$\dot{x}(t)=a(t)x(t-1) \tag{3}$$

其中$a(t)$是连续函数。假定$x(t_0, \varphi)$是方程(3)过(t_0, φ)在$[t_0, t_0+1]$上的解，则有

$$x(t_0+h, \varphi)(t)=\varphi(0)+\int_{t_0+h}^{t} a(s)x(t_0+h,\varphi)(s-1)ds$$
$$=\varphi(0)+\int_{t_0+h}^{t} a(s)\varphi(s-t_0-h-1)ds,$$
$$x(t_0,\varphi)(t)=\varphi(0)+\int_{t_0}^{t} a(s)x(t_0,\varphi)(s-1)ds$$
$$=\varphi(0)+\int_{t_0}^{t} a(s)\varphi(s-t_0-1)ds.$$

因此
$$\lim_{h\to 0}\frac{x(t_0+h, \varphi)(t)-x(t_0, \varphi)(t)}{h}$$
$$=-a(t)\varphi(t-t_0-1)$$
$$+\lim_{h\to 0}\int_{t_0}^{t}\frac{a(s+h)-a(s)}{h}\varphi(s-t_0-1)ds$$

由上式可见，如果不增加条件，右边的第二项不一定存在。如果假设导数$\dot{a}(t)$为可积，则$x(t_0, \varphi)$对t_0的导数存在，而且满足

$$\frac{\partial x(t_0,\varphi)(t)}{\partial t_0} = -a(t)\varphi(t-t_0-1)$$

$$+\int_{t_0}^{t} \dot{a}(s)\varphi(s-t_0-1)ds.$$

现在的问题是，对一般的方程$\dot{x}(t)=f(t, x_t)$来说，在什么条件下才能保证解$x(t_0, \varphi, f)(t)$对t_0可微？下面的定理作出回答(见[31])。

定理2 设方程$\dot{x}(t)=f(t,x_t)$满足定理1中$p=1$的条件外，再加上初始函数$\varphi(\theta)$的导数$\dot{\varphi}(\theta)$在$[-r, 0]$上存在，连续，且$\dot{\varphi}(0)=f(t_0,\varphi)$，则方程的解$x(t_0,\varphi)(t)$关于$t_0$的右导数$\frac{\partial}{\partial t_0}x(t_0^+, \varphi)(t)$存在。

证 不难看出，当$t_0+h\leqslant t<t_0+a$，$h>0$时，有

$$x(t_0, \varphi)(t)=x(t_0+h, x_{t_0+h}(t_0, \varphi))(t),$$

利用Banach空间上Taylor定理及$x(t_0+h, \varphi)(t)$关于φ的可微性，有

$$x(t_0+h, x_{t_0+h}(t_0, \varphi))(t)-x(t_0+h, \varphi)(t)$$

$$=\frac{\partial}{\partial\varphi}x(t_0+h, \varphi)(t)\Delta\varphi+\gamma(\Delta\varphi).$$

其中$\Delta\varphi$定义为$\Delta\varphi=x_{t_0+h}(t_0,\varphi)-\varphi$，$\lim\limits_{\|\Delta\varphi\|\to 0}\frac{|\gamma(\Delta\varphi)|}{\|\Delta\varphi\|}=0$.

又 $$\frac{\Delta\varphi}{h}(\theta)=\frac{x_{t_0+h}(t_0,\varphi)(\theta)-x_{t_0}(t_0,\varphi)(\theta)}{h}$$

$$=\frac{x(t_0,\varphi)(t_0+h+\theta)-x(t_0,\varphi)(t_0+\theta)}{h}$$

$$-r\leqslant\theta\leqslant 0.$$

当$\theta=0$时，

$$\lim_{h\to 0}\frac{x(t_0,\varphi)(t_0+h)-x(t_0,\varphi)(t_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} f(s,x_s(t_0,\varphi))ds$$

$$= f(t_0,\varphi)。\tag{4}$$

当$\theta<0$时，只要h足够小，使$t_0-r<t_0+h+\theta<t_0$，总有

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta\varphi}{h}(\theta)=\lim_{h\to 0}\frac{x(t_0,\varphi)(t_0+h+\theta)-x(t_0,\varphi)(t_0+\theta)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h+\theta)-\varphi(\theta)}{h}=\dot\varphi(\theta)。\tag{5}$$

因为$\dot\varphi(\theta)$在$[-r,0]$上连续，且$\dot\varphi(0)=f(t_0,\varphi)$，而且$x(t_0,\varphi)(t)$在$[t_0,t_0+\alpha]$上满足方程，再由(4)和(5)，故知

$$\lim_{h\to 0}\frac{x(t_0,\varphi)(t+h)-x(t_0,\varphi)(t)}{h}$$

$$=\dot x(t_0,\varphi)(t)\tag{6}$$

对 $t\in[t_0-r,\ t_0+\alpha)$ 时存在且连续。于是存在 β：$0<\beta<\alpha$，$\dot x(t_0,\varphi)(t)$ 在$[t_0-r,\ t_0+\beta]$上一致连续，对任给 $\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当t'，$t''\in[t_0-r,\ t_0+\beta]$且$|t'-t''|<\delta$时，有

$$|\dot x(t_0,\varphi)(t')-\dot x(t_0,\varphi)(t'')|<\varepsilon。\tag{7}$$

令$h\leqslant\delta$，且$0<h<\beta$，则由(6)得

$$x(t_0,\varphi)(t_0+h+\theta)-x(t_0,\varphi)(t_0+\theta)=h\dot x(t_0,\varphi)(\xi)。$$

其中$t_0+\theta<\xi<t_0+h+\theta$，从而有等式

$$\left|\frac{x(t_0,\varphi)(t_0+h+\theta)-x(t_0,\varphi)(t_0+\theta)}{h}\right.$$

$$\left.-\dot x(t_0,\varphi)(t_0+\theta)\right|$$

$$=|\dot x(t_0,\varphi)(\xi)-\dot x(t_0,\varphi)(t_0+\theta)|。$$

因为$|t_0+\theta-\xi|<h<\delta$，故由(7)得到当$\theta\in[-r,0]$时，

$$\left|\frac{x(t_0,\varphi)(t_0+h+\theta)-x(t_0,\varphi)(t_0+\theta)}{h}\right.$$

$$\left.-\dot x(t_0,\varphi)(t_0+\theta)\right|<\varepsilon,$$

即 $\sup\limits_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}\left|\left(\frac{\Delta\varphi}{h}-\dot\varphi\right)(\theta)\right|<\varepsilon$。也就是说$\lim\limits_{h\to 0}\frac{\Delta\varphi}{h}$ 存在且

等于$\dot\varphi$。这表明当$h\to 0$时，$\frac{\Delta\varphi}{h}$有界，从而有

$$\lim_{h\to 0}\frac{|\gamma(\Delta\varphi)|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|\gamma(\Delta\varphi)|}{\|\Delta\varphi\|}\cdot\frac{\|\Delta\varphi\|}{h}=0.$$

所以 $$\lim_{h\to 0^+}\frac{x(t_0+h,\varphi)(t)-x(t_0,\varphi)(t)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\left[-\frac{x(t_0+h,x_{t_0+h}(t_0,\varphi))(t)-x(t_0+h,\varphi)(t)}{h}\right]$$

$$=-\lim_{h\to 0^+}\left[\frac{\partial x(t_0+h,\varphi)(t)}{\partial\varphi}\cdot\frac{\Delta\varphi}{h}+\frac{\gamma(\Delta\varphi)}{h}\right]$$

$$=-\frac{\partial x(t_0,\varphi)(t)}{\partial\varphi}\dot\varphi,$$

故 $\frac{\partial x(t_0^+,\varphi)(t)}{\partial t_0}$存在而且有

$$\frac{\partial x(t_0^+,\varphi)(t)}{\partial t_0}=-\frac{\partial x(t_0,\varphi)(t)}{\partial\varphi}\dot\varphi.$$ 证毕。

§4 解的整体存在性

考虑泛函微分方程

$$\dot x(t)=F(t,x_t). \tag{1}$$

其中F: $\mathbf{R}\times C\to\mathbf{R}^n$连续。

定义1 称方程(1)的解整体存在，若对任意$\sigma\in\mathbf{R}$，$\varphi\in C$，方程(1)的过(σ,φ)的解$x(\sigma,\varphi)(t)$在$[\sigma-r,\infty)$上存在。

解的整体存在性是研究解的全局性质的前提，如何才能保证方程(1)的解整体存在？文[30]利用比较方法给出了若干充分条件，部分叙述如下：

在下面的讨论中，我们总假设对$\mathbf{R}\times C$中任意有界闭集U，若$x(t)$是方程(1)的定义于$[\sigma-r,\beta)$上的不可延拓解，则存在序列$t_n\to\beta^-$ ($n\to\infty$时)，使$(t_n,x_{t_n})\bar\in U$，$n=1,2,\cdots$。由第二节的定

理2知，当F全连续时，上述假设成立。显然，若上述假设成立，$\beta<+\infty$，则存在$t_n\to\beta^-$，使$|x(t_n)|\to\infty$。

设I为R中开集，V：$I\times R^n\to R$连续，对$t\in I$，$\varphi\in C$，定义

$$D^+_{(1)}V(t,\varphi(0))=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}[V(t+h,x(t,\varphi)(t+h))$$

$$-V(t,\varphi(0))],$$

$$D^-_{(1)}(t,\varphi(0))=\underline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}[V(t+h,x(t+h;t,\varphi))$$

$$-V(t,\varphi(0))].$$

引理1 设V：$[\sigma-r,T)\times R^n\to R$连续，($T>\sigma$为某一常数)使得对任给连续函数$x$：$[\sigma-r,T)\to R^n$，若当 $t-r\leqslant s\leqslant t$ 且 $V(s,x(s))\leqslant V(t,x(t))$时，有

$$D^+_{(1)}V(t,x(t))\leqslant\omega_2(t,\alpha_t) \tag{2}$$

其中 $\alpha(t)=V(t,x(t))$，$\sigma-r\leqslant t<T$，ω_2：$[\sigma-r,T)\times C([-r,0],R)\to[0,+\infty)$，连续且满足：任给连续函数$u,v$：$[\sigma-r,T)\to R$及$t\in[\sigma,T)$，当$u(t)=v(t)$，$u_t(\theta)\leqslant v_t(\theta)$，$\theta\in[-r,0]$时，$\omega_2(t,u_t)\leqslant\omega_2(t,v_t)$。

若以$\bar{\gamma}(t)$表初值问题

$$\begin{cases}\dot{\gamma}(t)=\omega_2(t,\gamma_t), & t\geqslant\sigma,\\ \gamma_\sigma=\psi\end{cases} \tag{3}$$

的右行最大解，则当 $\alpha(s)\leqslant\psi(s-\sigma)$，$s\in[\sigma-r,\sigma]$，$\psi(0)\geqslant\max\limits_{\sigma-r\leqslant s\leqslant\sigma}\alpha(s)$时，$V(t,x(t))\leqslant\bar{\gamma}(t)$ 在两者的公共存在域上成立。

证 只需证明对任给正整数 N，初值问题

$$\begin{cases}\dot{\gamma}_N(t)=\omega_2(t,\gamma_{N_t})+\dfrac{1}{N}, & t\geqslant\sigma,\\ \gamma_{N_\sigma}=\psi\end{cases} \tag{E_N}$$

的任意解$\gamma_N(t)$，有$V(t,x(t))\leqslant\gamma_N(t)$，在两者公共存在域上成立。

若不然，则有N_0及$t_1\in[\sigma,\beta)$ ($[\sigma-r,\beta)$为方程 (E_{N_0}) 的最大解与$V(t,x(t))$的公共存在区间)，使

$$V(t,x(t))\leqslant \gamma_{N_0}(t) \qquad t\in[\sigma,t_1]$$

且存在$t_n\to t_1^+$，使$V(t_n,x(t_n))\geqslant \gamma_{N_0}(t_n)$。由连续性有

$$V(t_1,x(t_1))=\gamma_{N_0}(t_1).$$

所以，$D^+_{(1)}V(t_1,x(t_1))$

$$\geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{V(t_n,x(t_n))-V(t_1,x(t_1))}{t_n-t_1}$$

$$\geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\gamma_{N_0}(t_n)-\gamma_{N_0}(t_1)}{t_n-t_1}$$

$$=\dot{\gamma}_{N_0}(t_1)=\omega_2(t_1,\gamma_{N,t_1})+\frac{1}{N_0}. \tag{4}$$

但根据t_1之定义，对$s\in[\sigma,t_1]$，有

$$V(s,x(s))\leqslant \gamma_{N_0}(s)\leqslant \gamma_{N_0}(t_1)=V(t_1,x(t_1)).$$

若$t_1-r<\sigma$，则对$s\in[t_1-r,\sigma)$，有

$$V(s,x(s))\leqslant \psi(0)\leqslant \gamma_{N_0}(t_1)=V(t_1,x(t_1)).$$

故对$s\in[t_1-r,t_1]$，总有$V(s,x(s))\leqslant V(t_1,x(t_1))$，从而

$$D^+_{(1)}V(t_1,x(t_1))\leqslant \omega_2(t_1,\alpha_{t_1})\leqslant \omega_2(t_1,\gamma_{N,t_1})$$

这与(4)矛盾。证毕。

【注】 由证明过程可以看出，若(2)式当$V(s,x(s))\leqslant V(t,x(t))$，$\sigma\leqslant s\leqslant t<T$时成立，则$\psi(0)\geqslant \max\limits_{-r\leqslant s\leqslant 0}\alpha(\sigma+s)$之要求可以去掉。对右行最小解亦有类似结论。

定理1 设存在连续函数V：$\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$，$\lim\limits_{|x|\to\infty}|V(t,x)|=\infty$满足：

任给连续函数x：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$及$t\in\mathbf{R}$，若当$t-r\leqslant s\leqslant t$时，$V(s,x(s))\leqslant V(t,x(t))$，则

$$D^+_{(1)}V(t,x(t))\leqslant \omega_1(t,\alpha_t).$$

若当$t-r\leqslant s\leqslant t$时，$V(s,x(s))\geqslant V(t,x(t))$，则

$$D^-_{(1)}V(t,x(t))\geqslant \omega_2(t,\alpha_t).$$

其中$\alpha(t)=V(t,x(t))$，ω_1，$-\omega_2$：$\mathbf{R}\times C([-r,0],\mathbf{R})\to[0,+\infty)$连续，且对任给连续函数$u$，$v$：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$及$t\in\mathbf{R}$，当$u_t(\theta)\leqslant$

$v_t(\theta)$，$\theta\in[-r,0]$，$u(t)=v(t)$时，有$\omega_i(t,u_t)\leqslant\omega_i(t,v_t)$ ($i=1$，2)。

则当$\dot{\gamma}(t)=\omega_i(t,\gamma_t)$的解整体存在($i=1$，2)时，方程(1)的解整体存在。

证 记$x(t)=x(\sigma,\varphi)(t)$，$\alpha(t)=V(t,x(t))$，$t\in[\sigma-r,\beta)$。设$\gamma_1(t)$是方程$\dot{\gamma}(t)=\omega_1(t,\gamma_t)$ 过 (σ,ψ) 的右行最大解，$\gamma_2(t)$是方程$\dot{\gamma}(t)=\omega_2(t,\gamma_t)$ 过 (σ,ξ)的右行最小解，其中ψ，$\xi\in C([-r,0],\mathbf{R})$，$\xi(s-\sigma)\leqslant\alpha(s)\leqslant\psi(s-\sigma)$，$s\in[\sigma-r,\sigma]$，$\xi(0)\leqslant\min\limits_{\sigma-r\leqslant s\leqslant\sigma}\alpha(s)\leqslant\max\limits_{\sigma-r\leqslant s\leqslant\sigma}\alpha(s)\leqslant\psi(0)$。

由定理条件及引理1得$\gamma_2(t)\leqslant\alpha(t)\leqslant\gamma_1(t)$，$t\in[\sigma-r,\beta)$。若$\beta<+\infty$，则存在$t_n\to\beta^-$，使$|x(t_n)|\to\infty$，从而$|\alpha(t_n)|\to\infty$，这与$\gamma_1(t)$，$\gamma_2(t)$于$[\sigma-r,\beta]$ 上有界性相矛盾。所以$\beta=+\infty$，证毕。

类似可证

定理2 假设存在连续函数V：$\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to[0,\infty)$，$\lim\limits_{|x|\to\infty}V(t,x)=+\infty$,使对任给连续函数$x$：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$及$t\in\mathbf{R}$，若当 $t-r\leqslant s\leqslant t$时，$V(s,x(s))\leqslant V(t,x(t))$，则

$$D^+_{(1)}V(t,x(t))\leqslant\omega_1(t,\alpha_t).$$

其中$\alpha(t)$，ω_1同定理1所设。

则当方程$\dot{\gamma}(t)=\omega_1(t,\gamma_t)$的解整体存在时，方程(1)的解整体存在。

推论1 假设存在连续函数S：$\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to[0,+\infty)$满足

(i) $S(t,x)=0$ 当且仅当$x=0$；

(ii) $S(t,\lambda x)=\lambda S(t,x)$，$S(t,x+y)\leqslant S(t,x)+S(t,y)$，$\lambda\geqslant0$，$x$，$y\in\mathbf{R}^n$，

(iii) 任给连续函数x：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$及$t\in R$，若当 $t-r\leqslant s\leqslant t$时，$S(s,x(s))\leqslant S(t,x(t))$，则

$$\frac{\partial}{\partial t}S(t,z)\Big|_{z=x(t)}+S(t,F(t,x_t))\leqslant\omega_1(t,\alpha_t)$$

其中$\alpha(t)=S(t,x(t))$，ω_1同定理1所设。

则当方程$\gamma(t)=\omega_1(t,\gamma_t)$的解整体存在时，方程(1)的解亦整体存在。

这是定理2的显易推论，只须注意$\lim\limits_{|x|\to\infty} S(t,x)=\lim\limits_{|x|\to\infty}|x|S\left(t,\frac{x}{|x|}\right)\geqslant\lim\limits_{|x|\to\infty}|x|\cdot\min\limits_{|y|=1}S(t,y)=+\infty$及$D^+_{(1)}S(t,x)\leqslant\frac{\partial}{\partial t}S(t,x)+S(t,D^+_{(1)}x)$。

若令$S(t,x)=|x|$，$\omega_1(t,z)=M(t)+N(t)z$，则得

推论2 若存在连续函数M，N：$\mathbf{R}\to[0,+\infty)$，使

$$|F(t,\varphi)|\leqslant M(t)+N(t)\|\varphi\|,\quad (t,\varphi)\in\mathbf{R}\times C,$$

则方程(1)的解整体存在。

附录 关于测度上的光滑性及Caratheodory条件

1 关于测度上的光滑性

设$\mathscr{L}(C,\mathbf{R}^n)$表示将$C$空间映入$\mathbf{R}^n$空间的有界线性映像所组成的Banach空间；$\wedge$是某个距离空间中的开子集；

L：$\wedge\to\mathscr{L}(C,\mathbf{R}^n)$。

由Riesz表示定理，知存在$n\times n$的矩阵函数$\eta(\lambda,\theta)$，它在$[-r,0]$上关于θ为有界变差，使得当$\lambda\in\wedge$及$\phi\in C$时有

$$L(\lambda)\phi=\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(\lambda,\theta)]\phi(\theta).\tag{1}$$

现将$\eta(\lambda,\theta)$的定义扩张为：

当$\theta\leqslant-r$时，$\eta(\lambda,\theta)=\eta(\lambda,-r)$；

当$\theta\geqslant0$时，$\eta(\lambda,\theta)=\eta(\lambda,0)$。

定义1 设算子L：$\wedge\to\mathscr{L}(C,\mathbf{R}^n)$。如果对任何的$\beta\in\mathbf{R}$，存在纯量函数$\gamma(\lambda,s)$，它对$\lambda\in\wedge$，$s\in\mathbf{R}$为连续，$\gamma(\lambda,0)=0$，使得若$L(\lambda)\phi$用(1)式表示且$\lambda\in\wedge$，$s>0$时有

$$\left|\int_{\beta^+}^{\beta+s}+\int_{\beta-s}^{\beta^-}[d_\theta\eta(\lambda,\theta)]\phi(\theta)\right|\leqslant\gamma(\lambda,s)\|\phi\|,\tag{2}$$

则称算子L在测度上具有光滑性。

命题 如果$L\in C(\wedge,\ \mathscr{L}(C,\ \mathbf{R}^n))$，则$L$ 在测度上具有光滑性。

证 设t表示$\wedge$中的元素，$\mathbf{V}(f,I)$表示在区间I上为有界变差的函数f的全变差。如果$\eta=(\eta_{ij})$是$[-r,0]$上有界变差的函数矩阵，则置

$$\|\eta\|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}V(\eta_{ij},[-r,0]).$$

若 $L(t)\phi=\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(t,\theta)]\phi(\theta)$，则存在常数$0<k<1$使得

$$k\|\eta(t,\cdot)\|\leqslant\|L(t)\|\leqslant\|\eta(t,\cdot)\|.\tag{3}$$

这是因为 $\|L(t)\|=\sup_{\|\phi\|\leqslant1}|L(t)\phi|$

$$=\sup_{\|\phi\|\leqslant1}\left|\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(t,\theta)]\phi(\theta)\right|$$

$$\leqslant\left|\int_{-r}^{0}d_\theta\eta(t,\theta)\right|\leqslant|V(\eta)|\leqslant\|\eta(t,\cdot)\|.$$

至于(3)中的第一个不等式，只要$k>0$适当小时总能成立。

因为$L\in C(\wedge,\mathscr{L}(C,\mathbf{R}^n))$，故对任何的$t\in\wedge$和$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，使得当$\|t-\tau\|<\delta$时有$\|L(t)-L(\tau)\|<k\varepsilon$，从而$\|\eta(t,\cdot)-\eta(\tau,\cdot)\|<\varepsilon$。由此得对任何的$[a,\ b]\subseteq[-r,0]$以及任意的$i$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，当$\|t-\tau\|<\delta$时，有

$$\begin{aligned}&\vee(\eta_{ij}(t,\cdot)-\eta_{ij}(\tau,\cdot),\ [a,b])\\ \leqslant&\vee(\eta_{ij}(t,\cdot)-\eta_{ij}(\tau,\cdot),\ [-r,0])\\ \leqslant&\|\eta(t,\cdot)-\eta(\tau,\cdot)\|<\varepsilon.\end{aligned}\tag{4}$$

对固定的i及$0<s\leqslant r$，设

$$\mu_i(t,s)=\sum_{j=1}^{n}\vee(\eta_{ij}(t,\cdot)),\ [\beta^+,\beta+s]\cup[\beta-s,\beta^-]).$$

由不等式(4)得$\mu_i(t,s)$关于s一致地是t的连续函数。又$\mu_i(t,s)$关

于s是非减的，一致有界的，且当$s\to 0$时$\mu_i(t,s)\to 0$。

在$\mathbf{R}^2$中考虑集合$Q_i=\{(s,y):y=\mu_i(t,s),\ s\in(0,\infty)\}$，记它的凸闭壳为$\Gamma_i(t)$，即$\Gamma_i(t)=\overline{C_0(Q_i)}=Cl\ (\cap\{E:\ E$为凸集，$Q_i\subseteq E\subset\mathbf{R}^2\}$，也就是包含$Q_i$的$\mathbf{R}^2$中所有凸子集之交集的闭包。若$(s,y)\in C_0(Q_i)$，则有$(s_j,\ y^{(j)})$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，$y^{(j)}=\mu_i(t,s_j)$及满足$p_j\geqslant 0$，$\sum_{j=1}^{n}p_j=1$的$p_j$使$s=\sum_{j=1}^{n}p_js_j$，$y=\sum_{j=1}^{n}p_j\cdot y^{(j)}=\sum_{j=1}^{n}p_j\mu_i(t,s_j)$。设

$$\gamma_i(t,s)=\sup\{y:\ (s,y)\in\Gamma_i(t)\}.$$

则$\gamma_i(t,s)$关于s一致地是t的连续函数。又对固定的t，它对s是连续的，且当$s\to 0$时，$\gamma_i(t,s)\to 0$。

如果我们定义$\gamma_i(t,0)=0$，则$\gamma_i(t,s)$对(t,s)是连续的。

置$\gamma(t,s)=\max\gamma_i(t,s)$，那末$\gamma(t,s)$就是满足(2)式的函数。故$L$具有测度上的光滑性。证毕。

2 Caratheodory条件

定义2 设$\Omega\subseteq\mathbf{R}\times C$为开集，$f:\ \Omega\to\mathbf{R}^n$。如果满足下列条件：

(i) $f(t,\phi)$对每一个固定的ϕ关于t为可测，对每一个固定的t关于ϕ为连续；

(ii) 对任何固定的$(t,\phi)\in\Omega$，存在邻域$\vee(t,\phi)$及Lebesgue可积函数m，使得

$$|f(s,\psi)|\leqslant m(s),\ (s,\psi)\in\vee(t,\phi),\tag{5}$$

则称f在Ω上满足Caratheodory条件。

显然，如果$f:\ \Omega\to\mathbf{R}^n$为连续，则$f$在$\Omega$上一定满足Caratheodory条件。

定义3 设f在Ω上满足Caratheodory条件，$(t_0,\varphi)\in\Omega$。如果存在$A>0$，使得函数$x=x(t_0,\varphi,f)$满足$x\in C([t_0-r,\ t_0+A],\ \mathbf{R}^n)$，$x_{t_0}=\varphi$且$x(t)$在$[t_0,\ t_0+A]$上为绝对连续及在$[t_0,\ t_0+A]$上几乎处处满足方程$\dot{x}(t)=f(t,x_t)$。则称$x$为方程

$$\begin{cases} x_{t_0} = \varphi, \\ x(t) = \varphi(0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_s) ds \quad t \geqslant t_0 \end{cases} \tag{6}$$

过(t_0, φ)的解。

对于f在Ω上满足 Caratheodory 条件的方程(6)，它的解的基本理论与前面的结果相同。证明的方法也基本一样。只是连续依赖性要得到§1中定理2的相似结果有些困难。在这里不准备介绍这个方面的结果。

第三章

无界滞量RFDE解的基本理论

在第一章§2中介绍了P—滞后型泛函微分方程，它是一种比较广泛的RFDE，当$r>0$时它包括有界滞量和无界滞量两种情形(但不包括无穷延滞的RFDE)。下面我们介绍P—RFDE的解的基本理论(参阅[32])

§1　P—RFDE的解的存在性和唯一性

现考虑下面的P—RFDE的初值问题：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,\tilde{x}_t), & (1)\\ \tilde{x}_{t_0}=\varphi. & (2)\end{cases}$$

其中$f:\Omega\to R^n$为给定的泛函，$\Omega\subseteq[\sigma,\infty)\times C$为一开集，$(t_0,\varphi)\in\Omega$，而$\tilde{x}_t(\theta)=x(p(t,\theta))$，$\theta\in[-r,0]$，$t\geqslant t_0$，$p(t,\theta)$为某个$P$函数。

对于固定的$t_0\in R$，$\varphi\in C$以及给定的常数$\alpha>0$，$\beta>0$，我们令

$$\mathscr{A}(\alpha,\beta)=\{x\in C([p(t_0-r),\ t_0+\alpha],\ R^n):\tilde{x}_{t_0}=\varphi,\ \max_{s\in\bar{I}_\alpha}|x(s)-\varphi(0)|\leqslant\beta\}.$$

其中$\bar{I}_\alpha$表示区间$[t_0,t_0+\alpha]$。

引理1　设$x\in\mathscr{A}(\alpha,\beta)$，则$\tilde{x}_t$在$\bar{I}_\alpha$上为$t$的连续函数。

证　由于$x(t)$在区间$[p(t_0,\ -r),\ t_0+\alpha]$上连续，故必一

致连续。从而对任意的$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，使得当$|s_1-s_2|<\delta$，s_1，$s_2\in[p(t_0,-r)$，$t_0+\alpha]$时，即有$|x(s_1)-x(s_2)|<\varepsilon$。

又根据$p(t,\theta)$在闭域$\bar{I}_\alpha\times[-r,0]$上的一致连续性，对上述$\delta>0$，必存在$\eta>0$，使得当$|t_1-t_2|<\eta$，$t_1,t_2\in\bar{I}_\alpha$时，有

$$|p(t_1,\theta)-p(t_2,\theta)|<\delta \quad \text{对所有的}\theta\in[-r,0]\text{成立。}$$

从而 $$\|\tilde{x}_{t_1}-\tilde{x}_{t_2}\|=\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant0}|x(p(t_1,\theta))-x(p(t_2,\theta))|<\varepsilon.$$

证毕。

定理1(存在性)。假设存在常数 $\alpha>0$，$\beta>0$ 及可积函数m：$\bar{I}_\alpha\to\mathbf{R}$满足下列的条件：

(i) 对每一个固定的$x\in\mathscr{A}(\alpha,\beta)$，$f(t,\tilde{x}_t)$关于$t$为可测；

(ii) $|f(t,\tilde{x}_t)|\leqslant m(t)$对所有$x\in\mathscr{A}(\alpha,\beta)$在$\bar{I}_\alpha$上几乎处处成立；

(iii) $\int_{t_0}^{t}f(s,\tilde{y}_s)ds\to\int_{t_0}^{t}f(s,\tilde{z}_s)ds$ 对所有$t\in\bar{I}_\alpha$ 以及所有使$\max\limits_{s\in\bar{I}_\alpha}|y(s)-z(s)|\to0$的$y$、$z\in\mathscr{A}(\alpha,\beta)$成立。

则方程(1)满足初始条件(2)的解在区间$[t_0,t_0+\alpha]$上存在（其中$\alpha>0$适当小)。

证 首先定义$C([p(t_0,-r),\ t_0+\alpha],\mathbf{R}^n)$ 中元素x的范数为

$$\|x\|_*=\sup_{p(t_0,-r)\leqslant s\leqslant t_0+\alpha}|x(s)|.$$

则显然 $C([p(t_0,-r),\ t_0+\alpha],\ \mathbf{R}^n)$为Banach空间。

根据$\mathscr{A}(\alpha,\beta)$的定义不难验证它是$C([p(t_0,-r),\ t_0+\alpha],\mathbf{R}^n)$中的一个有界闭凸集。

对于任一$x\in\mathscr{A}(\alpha,\beta)$，定义算子$T$如下：

$$(Tx)(p(t_0,\theta))=\varphi(\theta),\qquad \theta\in[-r,0],$$

$$(Tx)(t)=\varphi(0)+\int_{t_0}^{t}f(s,\ \tilde{x}_s)ds,\qquad t\in\bar{I}_\alpha.$$

(关于$f(t,\tilde{x}_t)$ 在$\bar{I}_\alpha$上的可积性由假设(i)，(ii)可得)。

由假设(ii)，得到

$$|T(x)(t)-\varphi(0)|\leqslant\int_{t_0}^{t}m(s)ds\leqslant\int_{t_0}^{t_0+\alpha}m(s)ds,$$

$t\in\bar{I}_\alpha$。

只要$\alpha>0$充分小，就可使$\int_{t_0}^{t_0+\alpha}m(s)ds\leqslant\beta$。可见算子$T$将$\mathscr{A}(\alpha,\beta)$映入自身。

下面证明T是全连续算子。

首先，对于以上所取的α，显然有

$$\|Tx\|_*\leqslant\|\varphi\|+\beta,\quad x\in\mathscr{A}(\alpha,\beta)$$

（这里$\|\cdot\|$表示C空间中的范数）。可见$\{Tx:x\in\mathscr{A}(\alpha,\beta)\}$是一致有界的。

另一方面，因$\int_{t_0}^{t}m(s)ds$在闭区间$\bar{I}_\alpha$上连续，从而一致连续。故由

$$|(Tx)(t_1)-(Tx)(t_2)|\leqslant\left|\int_{t_1}^{t_2}m(s)ds\right|,\quad t_1,\quad t_2\in\bar{I}_\alpha$$

推知$\{Tx:x\in\mathscr{A}(\alpha,\beta)\}$是等度连续的。

再根据假设(iii)，当$\max\limits_{s\in\bar{I}_\alpha}|y(s)-z(s)|\to0$时，有$\max\limits_{s\in\bar{I}_\alpha}|(Ty)(s)-(Tz)(s)|\to0$。即当$\|y-z\|_*\to0$时$\|Ty-Tz\|_*\to0$。这表明$T$是连续的。

综上所述，引用 Schauder 不动点定理，知算子T在$\mathscr{A}(\alpha,\beta)$上存在不动点$x^*$。即

$$x^*(t)=\varphi(0)+\int_{t_0}^{t}f(s,x_s^*)ds,\quad t\in\bar{I}_\alpha,\tag{3}$$

$$x^*(p(t_0,\theta))=\varphi(\theta),\quad\theta\in[-r,0],\tag{4}$$

由于(1)、(2)与(3)、(4)是等价的，故x^*在$\bar{I}_\alpha$上是满足初值问题(1)、(2)的解。证毕。

作为定理1的推论，可得到Peano型的存在定理。

推论1 假定$f\in C(\Omega,\mathbf{R}^n)$，则满足初值问题(1)、(2)的解$x(t_0,\varphi)$在某个区间$\bar{I}_\alpha$上存在。

证 根据f的连续性，存在常数$M>0$以及(t_0,φ)的开邻域$U\subseteq\Omega$，使得当$(t,\psi)\in U$时，$|f(t,\psi)|\leqslant M$。

根据引理1，只要取 $\alpha>0$，$\beta>0$ 适当小，便可使所有的$t\in \bar{I}_\alpha$和$x\in\mathscr{A}(\alpha,\beta)$都有$(t,\tilde{x}_t)\in U$。

于是有

$$|f(t,\tilde{x}_t)|\leqslant M,\quad t\in\bar{I}_\alpha,\quad x\in\mathscr{A}(\alpha,\beta). \tag{5}$$

故满足定理1中的条件(ii)，这里$m(t)=M$。

由引理1知，对每一个$x\in\mathscr{A}(\alpha,\beta)$，$\tilde{x}_t$在$\bar{I}_\alpha$上连续。又由$f(t,\psi)$在$\Omega$上的连续性，即知$f(t,\tilde{x}_t)$对每一个$x\in\mathscr{A}(\alpha,\beta)$，关于$t$为连续。故满足定理1的条件(i)。

再验证定理 1 的条件(iii)，对于任意的y，$z\in\mathscr{A}(\alpha,\beta)$，若$\max\limits_{s\in\bar{I}_\alpha}|y(s)-z(s)|\to 0$，再考虑到$\mathscr{A}(\alpha,\beta)$的定义，即有

$$\|\tilde{y}_t-\tilde{z}_t\|=\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}|y(p(t,\theta))-z(p(t,\theta))|\to 0$$

对所有的 $t\in\bar{I}_\alpha$。

再根据f的连续性及(5)式，应用Lebesgue控制收敛定理即可推知定理1的条件(iii)满足。

应用定理 1 即知解的存在性。证毕。

下面给出存在唯一性定理。

定理2(存在唯一性)　假设存在常数$\alpha>0$，$\beta>0$和可积函数$m:\bar{I}_\alpha\to R$满足定理1的条件(i)和(ii)以及下面的条件

(iii)′ $\left|\int_{t_0}^{t}[f(s,\tilde{y}_s)-f(s,\tilde{z}_s)]ds\right|\leqslant k\max\limits_{s\in\bar{I}_\alpha}|y(s)-z(s)|$ 对所有的$t\in\bar{I}_\alpha$和所有的y、$z\in\mathscr{A}(\alpha,\beta)$成立，其中$k$为常数，$0\leqslant k<1$。则(1)，(2)的解在区间$\bar{I}_\alpha$上存在且唯一。

证　如定理 1 的证明中那样，只要取$\alpha>0$适当小，即可定义算子$T:\mathscr{A}(\alpha,\beta)\to\mathscr{A}(\alpha,\beta)$。

根据条件(iii)′以及$\mathscr{A}(\alpha,\beta)$的定义，不难看出此时$T$是一个压缩映射，事实上，对任意的$y$，$z\in\mathscr{A}(\alpha,\beta)$，

$$\|Ty-Tz\|_*\leqslant k\|y-z\|_*,$$

于是由压缩映射的不动点定理知算子 T 在$\mathscr{A}(\alpha,\beta)$ 中存在唯一的

不动点。即初值问题(1)，(2)的解在区间$\bar{I}_a$上存在且唯一。

推论2 假定$f\in C(\Omega,\mathbf{R}^n)$，如果存在$(t_0,\varphi)$的某邻域$N$以及常数$L\geqslant 0$，使得当$(t,\phi)$和$(t,\psi)\in N$时，有

$$|f(t,\phi)-f(t,\psi)|\leqslant L\|\phi-\psi\|.$$

则初值问题(1)，(2)的解在某区间$\bar{I}_a$上存在且唯一。

证 取$\alpha>0$，$\beta>0$适当小，使得对所有$t\in\bar{I}_a$和$x\in\mathscr{A}(\alpha,\beta)$，都有$(t,\tilde{x}_t)\in U\cap N$。这里的$U$是推论1证明中的$(t_0,\varphi)$的邻域。故定理1的条件(i)和(ii)被满足。此外，对$t\in\bar{I}_a$，y和$z\in\mathscr{A}(\alpha,\beta)$，我们有

$$\left|\int_{t_0}^{t}[f(s,\tilde{y}_s)-f(s,\tilde{z}_s)]ds\right|\leqslant L\int_{t_0}^{t}\|\tilde{y}_s-\tilde{z}_s\|ds$$

$$\leqslant\max_{s\in\bar{I}_a}\Big[\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}|y(p(s,\theta))-z(p(s,\theta))|\Big]\cdot L\alpha$$

$$\leqslant L\alpha\max_{s\in\bar{I}_a}|y(s)-z(s)|.$$

可见只要取$\alpha>0$充分小，使$L\alpha<1$，则条件(iii)′也被满足。

因此由定理2立即得到所需的结论。证毕。

定理3 假设定理2的条件(iii)′成立并且满足(1)，(2)的解存在，则这个解在某区间$\bar{I}_a$上是唯一的。

证 设在区间$\bar{I}_a$上$y(t)$和$x(t)$同时为(1)，(2)的解。不妨设$\alpha>0$充分小而使y和$x\in\mathscr{A}(\alpha,\beta)$，此时

$$y(t)=\varphi(0)+\int_{t_0}^{t}f(s,\tilde{y}_s)ds,\quad t\in\bar{I}_a,$$

$$\tilde{y}_{t_0}=\varphi,$$

$$x(t)=\varphi(0)+\int_{t_0}^{t}f(s,\tilde{x}_s)ds,\quad t\in\bar{I}_a.$$

$$\tilde{x}_{t_0}=\varphi.$$

于是 $$|y(t)-x(t)|=\left|\int_{t_0}^{t}[f(s,\tilde{y}_s)-f(s,\tilde{x}_s)]ds\right|,\quad t\in\bar{I}_a.$$

由(iii)′得

$$|y(t)-x(t)|\leqslant k\max_{s\in\bar{I}_a}|y(s)-x(s)|,\qquad t\in\bar{I}_a$$

故 $\max_{t\in \bar{I}_\alpha}|y(t)-x(t)|\leqslant k\max_{s\in\bar{I}_\alpha}|y(s)-x(s)|$.

因此 $x(t)\equiv y(t)$, $t\in \bar{I}_\alpha$. 证毕。

§2 P—RFDE的解的延展性和连续依赖性

对 P—RFDE 来说，解的可延展和不可延展的定义与有界滞量的情形相同。下面我们给出两个延展性定理。

定理1（延展性）假设$f\in C(\Omega,\mathrm{R}^n)$，$x$为§1中的方程(1)，(2)在$[t_0,t_0+\alpha)$上的一个不可延展解，则对$\Omega$中任一紧集$W$，存在$t_W$，使得当$t_W\leqslant t<t_0+\alpha$时，$(t,\bar{x}_t)\in W$.

证 若$\alpha=\infty$，则结论显然。今设$\alpha<\infty$.

假若对某个紧集$W_0\subset\Omega$使定理不真。则存在序列$\{t_k\}$，当$k\to\infty$时，$t_k\to t_0+\alpha^-$，使得$(t_k,\bar{x}_{t_k})\in W_0$. 注意到$W_0$的紧性，故不妨设$\lim\limits_{k\to\infty}(t_k,\ \bar{x}_{t_k})=(t_0+\alpha,\psi)\in W_0$. 因而

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant0}|x(p(t_k,\theta))-\psi(\theta)|=\lim_{k\to\infty}\|\bar{x}_{t_k}-\psi\|=0.$$

但 $$\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant0}|x(p(t_k,\theta))-\psi(\theta)|\geqslant\sup_{-r\leqslant\theta<0}|x(p(t_k,\theta))-\psi(\theta)|\geqslant0,$$

故 $$\lim_{k\to\infty}\sup_{-r\leqslant\theta<0}|x(p(t_k,\theta))-\psi(\theta)|=0.$$

于是 $$\lim_{k\to\infty}|x(p(t_k,\theta))-\psi(\theta)|=0,\ -r\leqslant\theta<0.$$

注意到当$k\to\infty$时，对于$\theta\in[-r,0)$，有$p(t_k,\theta)\to p(t_0+\alpha,\ \theta)$且根据$P$函数的性质有$p(t_0,\ -r)\leqslant p(t_0+\alpha,\theta)<t_0+\alpha$. 而根据假设$x(s)$当$s\in[p(t_0,-r),\ t_0+\alpha)$时是有定义且连续的，因此

$$\lim_{k\to\infty}|x(p(t_k,\theta))-\psi(\theta)|=|x(p(t_0+\alpha,\theta))-\psi(\theta)|=0,$$
$$-r\leqslant\theta<0.$$

即 $$x(p(t_0+\alpha,\theta))=\psi(\theta),\ \ -r\leqslant\theta<0.$$

令$\theta\to0^-$即得 $x(t_0+\alpha^-)=\psi(0)$.

现定义$x(t_0+\alpha)=\psi(0)$，便有$(t_0+\alpha,\ \bar{x}_{t_0+\alpha})\in\Omega$。于是根据推论1，解$x$可延展到$t_0+\alpha$的右方。这与假设矛盾。因而定理得证。

定理2（延展性）在定理1的假定下，若f为全连续（即f将Ω的有界闭集映射为有界集），则对$[t_0,\infty)\times C$中任一有界闭集$V\subseteq\Omega$，必存在t_V，使得当$t_V\leqslant t<t_0+\alpha$时$(t,\bar{x}_t)\notin V$。

证 若$\alpha=\infty$，则结论显然成立。今设$\alpha<\infty$。

假若对某个有界闭集$V_0\subseteq\Omega$，存在序列$\{t_k\}$，当$k\to\infty$时$t_k\to t_0+\alpha^-$，使得$(t_k,\bar{x}_{t_k})\in V_0$，于是可推知$x(t)$在区间$[p(t_0,-r),\ t_0+\alpha)$上为有界，从而存在有界集$W_0$，$W_0\subseteq\Omega$，使得$\{(t,\bar{x}_t):t_0\leqslant t<t_0+\alpha\}\subseteq W_0$。

根据f的全连续性，存在$M>0$，使得当$(t,\psi)\in W_0$时，$|f(t,\psi)|\leqslant M$。于是，对于任意的t_1和$t_2\in[t_0,t_0+\alpha)$，我们有

$$|x(t_1)-x(t_2)|=\left|\int_{t_2}^{t_1}f(s,\bar{x}_s)ds\right|\leqslant M|t_1-t_2|,$$

因而$x(t)$在$[p(t_0,-r),\ t_0+\alpha)$上一致连续。

再根据$p(t,\theta)$在$[t_0,t_0+\alpha]\times[-r,0]$上的一致连续性，可推知$\{\bar{x}_t:t_0\leqslant t<t_0+\alpha\}$是$[-r,0]$上关于$\theta$的等度连续函数族。

另一方面，由以上的论证可知$\{\bar{x}_t:t_0\leqslant t<t_0+\alpha\}$又是一致有界的。

因此$\{(t,\bar{x}_t):t_0\leqslant t<t_0+\alpha\}$属于$\Omega$中的某个紧集，但根据定理1知这是不可能的，故定理得证。

下面我们来讨论解对初值的连续依赖性。

定理3（连续依赖性） 假设$f\in C(\Omega,\mathbf{R}^n)$，且$f(t,\psi)$关于$\psi$满足局部的Lipschitz条件。已知过$(t_0,\varphi)\in\Omega$的解$x(t_0,\varphi)$在$[t_0,t_0+A]$上有定义（$A>0$），则对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta(\varepsilon)>0$，使得当$(s,\psi)\in\Omega$，$|s-t_0|<\delta(\varepsilon)$，$\|\psi-\varphi\|<\delta(\varepsilon)$时，对所有$t\in[\sigma,t_0+A]$，$\sigma=\max\{t_0,s\}$，有

$$\|\bar{x}_t(s,\psi)-\bar{x}_t(t_0,\varphi)\|<\varepsilon.$$

证 由§1中的引理1知$\bar{x}_t(t_0,\varphi)$在$[t_0,t_0+A]$上关于t为连

续，故易知$\{(t,\tilde{x}_t(t_0,\varphi)):t\in[t_0,t_0+A]\}$为紧集。于是存在充分小的$\eta>0$，使得

$$W=\{(s,\psi):|s-t|\leqslant\eta,\ \|\psi-x_t(t_0,\varphi)\|\leqslant\eta,\quad t\in[t_0,t_0+A]\}\subseteq\Omega,$$

并存在$M>0$（不妨设$M>1$）和$L>0$使得

$$|f(s,\psi)|\leqslant M,\ (s,\psi)\in W,$$

及

$$|f(s,\psi_1)-f(s,\psi_2)|\leqslant L\|\psi_1-\psi_2\|,$$

$$(s,\psi_1),\ (s,\psi_2)\in W.$$

依所设，我们有

$$x(t_0,\varphi)(p(t_0,\theta))=\varphi(\theta),\ \theta\in[-r,0],$$

$$x(t_0,\varphi)(t)=\varphi(0)+\int_{t_0}^{t}f(u,\tilde{x}_u(t_0,\varphi))du,$$

$$t\in[t_0,t_0+A].$$

另一方面，设$V=\{(s,\psi)\in\Omega:|s-t_0|<\eta,\ \|\psi-\varphi\|<\eta\}$，则由§1中的推论2知方程（1）过$(s,\psi)\in V$的解$x(s,\psi)$在某区间$[s,s+\alpha]$上存在，$(\alpha>0)$。此时有

$$x(s,\psi)(p(s,\theta))=\psi(\theta),\qquad\theta\in[-r,0],$$

$$x(s,\psi)(t)=\psi(0)+\int_{s}^{t}f(u,\tilde{x}_u(s,\psi))du,\quad t\in[s,s+\alpha].$$

显然，只要$(t,\tilde{x}_t(s,\psi))\in W$，解$x(s,\psi)$必可以从$t$向右延展。

为确定起见，设 $s\leqslant t_0$（至于 $s>t_0$ 的情形，其论证完全类似），则对于区间$[t_0,t_0+A]$ 中任一使 $(u,\tilde{x}_u(s,\psi))(u\in[t_0,t])$ 保持在W内部的t，我们有

$$\begin{aligned}|x(s,\psi)(t)-x(t_0,\varphi)(t)|&\leqslant|\psi(0)-\varphi(0)|\\&+\int_{s}^{t_0}|f(u,\tilde{x}_u(s,\psi))|du+\int_{t_0}^{t}|f(u,\tilde{x}_u(s,\psi))\\&-f(u,\tilde{x}_u(t_0,\varphi))|du\leqslant\|\psi-\varphi\|+M|t_0-s|\\&+L\int_{t_0}^{t}\|\tilde{x}_u(s,\psi)-\tilde{x}_u(t_0,\varphi)\|du.\end{aligned}\tag{1}$$

根据范数的定义

$$\|\tilde{x}_t(s,\psi)-\tilde{x}_t(t_0,\varphi)\|=\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant0}|x(s,\psi)(p(t,\theta))$$
$$-x(t_0,\varphi)(p(t,\theta))|.$$

现考察满足$0<t-t_0<\lambda$的t，其中λ为满足P函数的性质(iii)的λ(见第一章§2中2°)，此时$p(t,-r)<t_0$，于是必存在一个$\xi_t\in[-r,0]$，使得当$\theta\in[-r,\xi_t]$时$p(t,\theta)\in[p(t,-r),\ t_0]$，当$\theta\in[\xi_t,0]$时$p(t,\theta)\in[t_0,t]$，由(1)知当$\theta\in[\xi_t,0]$时，有

$$|x(s,\psi)(p(t,\theta))-x(t_0,\varphi)(p(t,\theta))|$$
$$\leqslant\|\psi-\varphi\|-M|t_0-s|+L\int_{t_0}^{t}\|\tilde{x}_u(s,\psi)-\tilde{x}_u(t_0,\varphi)\|du. \qquad (2)$$

而当$\theta\in[-r,\xi_t]$时，有

$$|x(s,\psi)(p(t,\theta))-x(t_0,\varphi)(p(t,\theta))|\leqslant\|\psi-\varphi\|+\gamma. \qquad (3)$$

其中$\gamma>0$，当$s\to t_0$时$\gamma\to 0$。

综合(2)，(3)两式，我们有

$$\|\tilde{x}_t(s,\psi)-\tilde{x}_t(t_0,\varphi)\|\leqslant\|\psi-\varphi\|+\gamma+M|t_0-s|+L\int_{t_0}^{t}\|\tilde{x}_u(s,\psi)-\tilde{x}_u(t_0,\varphi)\|du.$$

应用Bellman不等式得

$$\|\tilde{x}_t(s,\psi)-\tilde{x}_t(t_0,\ \varphi)\|\leqslant[\|\psi-\varphi\|+\gamma+M|t_0-s|]e^{LA}.$$

以上的论证对于$[t_0,t_0+A]$中所有使$(t,\tilde{x}_t(s,\psi))$保持在W内部的t均成立。今对任给的$\varepsilon>0(\varepsilon<\eta)$，可取$\delta(\varepsilon)>0$充分小，$\delta(\varepsilon)<\min(\eta,\ \varepsilon e^{-LA}/3M)$并且使得当$|s-t_0|<\delta(\varepsilon)$时$\gamma<\varepsilon e^{-LA}/3$。于是，当$|s-t_0|<\delta(\varepsilon)$，$\|\psi-\varphi\|<\delta(\varepsilon)$时，对$[t_0,t_0+A]$中一切使$(u,\tilde{x}_u(s,\psi))(u\in[t_0,t])$保持在$W$内的$t$有

$$\|\tilde{x}_t(s,\psi)-\tilde{x}_t(t_0,\varphi)\|<\varepsilon<\eta. \qquad (4)$$

这表明$x(s,\psi)$必可延拓到t_0+A，且对一切$t\in[t_0,t_0+A]$，(4)式都成立。证毕。

附录　图空间上的无界滞量RFDE

关于无界滞量的RFDE的基本理论，除了上一节所述的 P—

滞后型FDE的基本理论外，文〔193〕研究出一套更为广泛的无界滞量的RFDE的解的基本理论。它首先建立一种图空间的理论，然后在图空间中建立一般的无界滞量RFDE。

$$\dot{x}(t)=F(t,x(s):a\leqslant s\leqslant t)$$

的解的基本理论，自成体系。本书由于篇幅所限，不能在此作详细介绍。希望有兴趣的读者参阅文〔193〕。

第四章

无穷延滞RFDE解的基本理论

在第一章中介绍过无穷延滞的泛函微分方程的概念。它是指函数$x(t)$的一个关系式

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t)。\tag{1}$$

其中对每一个$t\in \mathbf{R}$，x_t的定义为

$$x_t(\theta)=x(t+\theta),\quad \theta\in(-\infty,0]。$$

而$f(t,\ \phi)$则是定义在$\mathbf{R}\times B$中并取值$\mathbf{R}^n$中的泛函，B是某个由$(-\infty,0]$到$\mathbf{R}^n$的函数空间。它称为状态空间或相空间。

由于区间$(-\infty,\ 0]$不是紧的，故B中的元素即使都是连续函数，其性质也是不理想的，既不如C空间，更不如$\mathbf{R}^n$空间。为了使方程(1)的解的基本理论的建立成为可能，人们不能不对B空间加上某些限制。其中J.K.Hale和J.Kato[33]和K. Schumacher[34]于1978分别对B空间建立了一套限制性的公理系统，这两套公理系统虽然不同，但很类似。最近，一些作者对[33]和[34]所给的公理作了轻微的改进，例如Hino[35]、Kaminogo[36]、Naito[37]及Sawano[38]等，F.kappel与W.Schappacher在[39]中对[33]与[34]的公理体系作了深入的讨论与比较。我们在这里介绍的是Hale和Kato所建立的理论。

§1　B空间的公理

设$\hat{B}$是由$(-\infty,\ 0]$映入R^n中的函数所组成的线性实向量空

间，其元素记作$\hat{\phi}$，$\hat{\psi}$等等。$\hat{\phi}=\hat{\psi}$的意义是$\hat{\phi}(t)=\hat{\psi}(t)$，$t\leqslant 0$。假设在$\hat{B}$中给出了一个半范数$|\cdot|_{\hat{B}}$并设$B=\hat{B}/|\cdot|_{\hat{B}}$是一个Banach空间。其范数$|\cdot|_B$是由$|\cdot|_{\hat{B}}$自然引入的，$B$中的元素用$\phi$，$\psi$等等表示，它们相应于$\hat{B}$的等价类。对任何$\phi\in B$，在这个等价类中相应的元素记为$\hat{\phi}$，在$B$中$\phi=\psi$的意义是$|\hat{\phi}-\hat{\psi}|_{\hat{B}}=0$对一切$\hat{\phi}\in\phi$，$\hat{\psi}\in\psi$。

对于$\beta>0$及$\hat{\phi}\in\hat{B}$，以$\hat{\phi}^\beta$表示$\hat{\phi}$在$(-\infty,-\beta]$的那一部份，设$|\cdot|_\beta$为B中的半范数，其定义为

$$|\phi|_\beta=\inf_{\hat{\eta}\in\hat{B}}\{\inf_{\hat{\psi}\in\hat{B}}\{|\hat{\psi}|_{\hat{B}}:\hat{\psi}^\beta=\hat{\eta}^\beta\}:\eta=\phi\}. \tag{1}$$

由于$|\phi|_\beta\leqslant|\phi|_B$，故$\{\phi\in B:|\phi|_\beta=0\}$为$B$的一个子空间。因此

$$B^\beta=B/|\cdot|_\beta$$

变成一个Banach空间，其范数可用半范数$|\cdot|_\beta$自然地诱导出来，仍记为$|\cdot|_\beta$。若

$$\{\phi\}_\beta=\{\psi\in B:|\phi-\psi|_\beta=0\}$$

是B^β的代表元素，则当$\hat{\psi}^\beta=\hat{\phi}^\beta$时$\psi\in\{\phi\}_\beta$。

对于定义在$(-\infty,\sigma)$上取值于$\mathbf{R}^n$的函数$\hat{x}$当$t\in(-\infty,\sigma)$时，设$\hat{x}_t$定义为

$$\hat{x}_t(\theta)=\hat{x}(t+\theta),\quad \theta\leqslant 0.$$

给定$A>0$和$\hat{\phi}\in\hat{B}$，设

$$F_A(\hat{\phi})=\{\hat{x}:(-\infty,A]\to\mathbf{R}^n,\ \hat{x}_0=\hat{\phi},\ \hat{x}(t)\text{在}[0,A]\text{上连续}\},$$

及 $$F_A=\bigcup\{F_A(\hat{\phi}):\hat{\phi}\in\hat{B}\}.$$

我们的第一个公理是

公理(α_1)　对所有的$\hat{x}\in F_A$和所有的$t\in[0,A]$，$\hat{x}_t\in\hat{B}$。

现以x_t表示B中对应于$\hat{x}_t$的元素。在这公理下，对于任意的$\beta\geqslant 0$和$\hat{\phi}\in\hat{B}$，能找到$\hat{\psi}\in\hat{B}$，使得

$$\hat{\psi}(\theta)=\hat{\phi}(\theta+\beta),\quad \theta\in(-\infty,-\beta].$$

设$\hat{\tau}^\beta$为将$\hat{B}$映射到$\hat{B}^\beta=\{\{\hat{\psi}\in\hat{B}:\hat{\psi}^\beta=\hat{\phi}^\beta\}:\hat{\phi}\in\hat{B}\}$中的线性算子，

使得当且仅当$\hat{\psi}(\theta)=\hat{\phi}(\theta+B)$，$\theta\in(-\infty,\ -\beta]$时，$\hat{\psi}\in\tau^\beta\hat{\phi}$。

第二个公理是

公理(α_2) 若B中的元素$\phi=\psi$，则对任何的$\beta\geqslant0$，$|\eta-\xi|_\beta=0$，其中$\eta\in\tau^\beta\hat{\phi}$，$\xi\in\tau^\beta\hat{\psi}$。

在这个公理下，才有可能考虑线性算子$\tau^\beta:B\to B^\beta$，其定义是对使得$\hat{\psi}\in\tau^\beta\hat{\phi}$的$\psi\in B$，$\tau^\beta\phi=\{\psi\}_\beta$。

用$|\cdot|_\beta$的类似方法，我们在B中引入半范数$|\phi|_{(\beta)}$。如下

$$|\phi|_{(\beta)}=\inf_{\hat{\tau}\in\hat{B}}\{\inf_{\hat{\phi}\in\hat{B}}\{|\hat{\psi}|_{\hat{B}}:\hat{\psi}(\theta)=\hat{\eta}(Q),\ \theta\in[-\beta,\ 0]\}:\eta=\phi\}。$$

公理(α_3) $|\phi|_\beta\leqslant|\phi|_{(\beta)}+|\phi|_\beta$ 对任意的$\beta\geqslant0$。

由此公理我们可以看到，如果$x_0=y_0$并且当$t\in[0,\ A]$时$\hat{x}(t)=\hat{y}(t)$，则$x_t=y_t$。这就使得我们能够考虑$x\in F_A(\phi)$以代替$\hat{x}\in F_A(\hat{\phi})$。这样做无论如何必须当$\phi=\psi$时$\hat{\phi}(0)=\psi(0)$。因此，我们又作如下的假设。

公理(α_4') $|\hat{\phi}(0)|\leqslant k|\hat{\phi}|_{\hat{B}}$对任何$\hat{\psi}\in\hat{B}$及某一常数$k$。

此公理表明当对每一个$\hat{\psi}$当$\psi=\phi$时，$\hat{\psi}(0)$都是相同的。因此可用$\phi(0)$表示。现将(α_4')重新写为

公理(α_4) $|\phi(0)|\leqslant k|\phi|_B$ 对任何的$\phi\in B$及某一个k。

以上是空间B的基本公理。在本章中我们假定公理(α_1)至(α_4)总是被满足的，在这些基本公理下，我们用相同的字母ϕ表示B和$\hat{B}$的元素是不会混淆的。因此，今后我们将删去$\hat{B}$中元素的帽子"∧"，甚至对空间$\hat{B}$也如此，除非需要特殊考虑。

假定Ω为$R\times B$中的一个开集，$f:\Omega\to R^n$为给定的连续函数。则关系式

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t) \tag{1}$$

是Ω上的无穷延滞泛函微分方程。我们有时记作$RFDE(f)$或$RFDE(f,\ \Omega)$。设I为R中的一个区间，若函数$x:\cup\{(-\infty,f]:t\in I\}\to R^n$，使得当$t\in I$时$(t,x_t)\in\Omega$，$x(t)$为连续可微并且在$I$上满足(1)。则称$x$是方程(1)在$I$上的解。对给定的$(t_0,\varphi)\in\Omega$，

我们说$x(t_0, \varphi)$是方程(1)过(t_0, φ)的解，是指如果存在$A>t_0$使得$x(t_0, \varphi)$是方程(1)在$[t_0, A]$上的一个解且$x_{t_0}(t_0, \varphi)=\varphi$。这里，通过公理$(\alpha_4)$我们应该注意到$x(t_0, t_0, \varphi)=\varphi(0)$是$R^n$中一个确定的值。$x(t, t_0, \varphi)$表示$x(t_0, \varphi)$在$t \geqslant t_0$处的值，也是属于$R^n$的。

要讨论方程(1)的局部性或全局性的理论还必须增加假设才行。但无论如何，上述的公理对我们考虑特殊的空间的例子是有启发的。

例1 可积函数空间。假定$g:(-\infty, 0] \to R$是一个非负的局部可积的函数，并满足对任何$t<0$, $\text{ess}_\bullet\sup\{g(s): t \leqslant s \leqslant 0\}<\infty$以及对一切$t \leqslant 0$和$s \in (-\infty, 0]-N_t$,

$$g(t+s) \leqslant G(t) g(s). \tag{2}$$

其中N_t是$(-\infty, 0]$中的某一个测度为零的集合，而G为$(-\infty, 0]$上的非负函数。例如当g为非减时便能满足(2)。在上述的条件下，对任何的$\gamma<\sup\{\log G(s)/s: s<0\}$，存在常数$C(\gamma)$使得

$$g(t) \leqslant C(\gamma) e^{\gamma t} \quad \text{当} t \leqslant 0 \text{时几乎处处成立.} \tag{3}$$

事实上，可选取$s=s_\gamma<0$使$\log G(s_\gamma)/s_\gamma \geqslant \gamma$亦即$G(s_\gamma) \leqslant e^{s_\gamma \gamma}$。设$N^\gamma$为$(-\infty, 0]$中的一个集合使得对某个整数$k$有$t-ks_\gamma \in N_{s_\gamma}$，并且$N^\gamma$的测度为零。由于当$t-ms_\gamma \leqslant 0$时有

$$g(t) \leqslant G(s_\gamma) g(t-s_\gamma) \leqslant G(s_\gamma)^m g(t-ms_\gamma),$$

$$t \in (-\infty, 0]-N^\gamma.$$

因此，我们得到了(3)式，其中

$$G(\gamma)=\text{ess}_\bullet\sup\{g(s): 0 \geqslant s \geqslant s_\gamma\} \cdot \max\{1, e^{-s_\gamma \gamma}\}.$$

【注】 如果取

$$G(s)=\text{ess}_\bullet\sup_{t \leqslant 0} \frac{g(s+t)}{g(t)}.$$

则G本身就满足(2)式，对一切t, $s \leqslant 0$都有

$$G(t+s) \leqslant G(s) G(t).$$

因此，G本身满足(3)式，即当$\gamma<\sup\limits_{s<0} \frac{1}{s} \log \text{ess}_\bullet\sup\limits_{t \leqslant 0} \frac{g(t+s)}{g(t)}$

时，有

$$\operatorname{ess\,sup}_{s\leqslant 0}\frac{g(t+s)}{g(t)}\leqslant C(\gamma)e^{\gamma t}.$$

至于ess.sup$\{G(s):0\geqslant s\geqslant s_\gamma\}$的有界性请参阅[256]。

设$\widehat{B}=\{\hat{\phi}:(-\infty,0]\to \mathbf{R}^n$, 可测且$|\hat{\phi}|_{\hat{B}}<\infty\}$其中

$$|\hat{\phi}|_{\hat{B}}=|\hat{\phi}(0)|+\int_{-\infty}^{0}g(\theta)|\hat{\phi}(\theta)|d\theta.$$

对应的B空间为Banach空间，它满足公理(α_1)至(α_4)。

现验证(α_1)，设$\hat{x}\in F_A$，$A>0$，则$\hat{x}_0\in\widehat{B}$且当$t\in[0,A]$时，函数$\hat{x}_t(\theta)$关于θ可测且

$$\begin{aligned}|\hat{x}_t|_{\hat{B}}-|\hat{x}(t)|&=\int_{-\infty}^{0}g(\theta-t)|\hat{x}_0(\theta)|d\theta\\&\quad+\int_{-t}^{0}g(\theta)|\hat{x}(t+\theta)|d\theta\leqslant G(-t)|\hat{x}_0|_{\hat{B}}\\&\quad+\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|x(s)|\int_{-t}^{0}g(\theta)d\theta<\infty.\end{aligned}$$

因此$\hat{x}_t\in\widehat{B}$.

公理(α_4) 当$k=1$时是被满足的，由于当且仅当在$\{\theta:g(\theta)>0\}$上$\hat{\phi}(\theta)=\hat{\psi}(\theta)$ 几乎处处成立时$\phi=\psi$，故公理(α_2) 显然也被满足。由 (2)式我们注意到集合$Cl\{\theta:g(\theta)>0\}$当$g\not\equiv 0$ 时是一个形如$[-r,\ 0]$的区间。不难看出，$|\phi|_B=|\hat{\phi}|_{\hat{B}}$和$|\phi|_{(\beta)}=|\hat{\phi}-\hat{\psi}|_{\hat{B}}$，其中

$$\hat{\psi}(\theta)=\begin{cases}\hat{\phi}(\theta), & \theta\leqslant-\beta.\\0, & -\beta\leqslant\theta\leqslant 0.\end{cases}$$

它属于$\widehat{B}$，故公理(α_3)是被满足的。

例2 设

$\widehat{B}=\{\hat{\phi}:(-\infty,\ 0]\to\mathbf{R}^n$,在$(-\infty,-r]$上可测，在$[-r,\ 0]$上连续，$|\hat{\phi}|_{\hat{B}}<\infty\}$，其中$r\geqslant 0$。又设

$$|\hat{\phi}|_{\hat{B}}=\{\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}|\hat{\phi}(\theta)|^p+\int_{-\infty}^{0}g(\theta)|\hat{\phi}(\theta)|^p d\theta\}^{1/p},\ 1\leqslant p<\infty.$$

其中$g:(-\infty, 0]\to \mathbf{R}$如例1所给定。

读者可验证公理(α_1)至(α_4)是被满足的。

例3 连续函数空间。对任意的$\gamma>0$，设

$$\widehat{B}=\{\hat{\phi}\in C((-\infty, 0],\mathbf{R}^n): e^{\gamma\theta}\hat{\phi}(\theta)\to a\text{当}\theta\to-\infty\text{时}\}.$$

又设
$$|\hat{\phi}|_{\hat{B}}=\sup_{-\infty<\theta\leq 0} e^{\gamma\theta}|\hat{\phi}(\theta)|. \tag{4}$$

先验证(α_1)，如果当$\theta\to-\infty$时$e^{\gamma\theta}\hat{\phi}(\theta)\to a_{\hat{\phi}}$，则当$\theta\to-\infty$时，$e^{\gamma\theta}\hat{\phi}(t+\theta)\to a_{\hat{\phi}}e^{-\gamma t}$。

由于$|\hat{\phi}|_{\hat{B}}\leq\max\{\sup\limits_{-\beta\leq\theta\leq 0} e^{\gamma\theta}|\hat{\phi}(\theta)|, \sup\limits_{\theta\leq-\beta} e^{\gamma\theta}|\hat{\phi}(\theta)|\}\leq\max\{|\phi|_{(\beta)}, |\phi|_B\}$，故公理($\alpha_3$)被满足。

公理(α_2)是被满足的，因为$\phi=\psi$的意义是$\hat{\phi}(\theta)\equiv\hat{\psi}(\theta)$。公理($\alpha_4$)是被满足的只要$k=1$。

§2 解的局部性基本理论

如果我们想在B空间中建立无穷延滞泛函微分方程的基本理论，光靠公理(α_1)至(α_4)的限制是不够的，我们还需要增加一些假设。

(β_1) 对$\beta\geq 0$，存在连续函数$k_1(\beta)$使得

$$|\phi|_{(\beta)}\leq k_1(\beta)|\phi|_{[-\beta;0]}.$$

其中
$$|\phi|_{[-\beta;0]}=\inf_{\hat{\phi}\in\hat{B}}\{\sup_{-\beta\leq\theta\leq 0}|\hat{\psi}(\theta)|:\psi=\phi\}.$$

(β_2) 对$\beta\geq 0$，τ^β是一个有界线性算子，它的范数

$$M_1(\beta)=\sup_{|\phi|_B=1}|\tau^\beta\phi|,$$

是局部有界的，即对任何$\beta\geq 0$，存在β的一个邻域U，使得

$$\sup_{t\in U\cap[0,\infty)} M_1(t)<\infty.$$

(β_3) 如果$x\in F_A$，$A>0$，则x_t关于t在$[0, A]$上是连续的。

设函数$x:(-\infty,A)\to\mathbf{R}^n$满足当$t_0\in(-\infty, A)$时，$x_{t_0}\in B$，且$x(t)$在$[t_0,A)$上连续。则我们可得到下面这个重要的不等式：

$$|x_t|_B \leqslant k_1(t-t_0)\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}|x(s)| + M_1(t-t_0)|x_{t_0}|_B,$$

$$t\in[t_0,\ A)。\qquad (1)$$

这是因为由公理(α_3)及假设(β_1)，(β_2)可得

$$|x_t|_B \leqslant |x_t|_{(\beta)} + |x_t|_\beta \leqslant k_1(\beta)|x_t|_{[-\beta,0]} + |\tau^\beta x_{t-\beta}|_B.$$

置$\beta=t-t_0$便可得到(1)。

引理1 假定假设(β_1)，(β_2)，(β_3)成立，又令

$$F_A^L(\Gamma) = \bigcup_{\phi\in\Gamma}\{x\in F_A(\phi): x(t)在[0,\ A]上是L—李普兹希的\}^{[注]}.$$

如果$\Gamma\subset B$为紧且$A<\infty$，则集合

$\Gamma_0=\{x_t: t\in[0,\ A],\ x\in F_A^L(\Gamma)\}$为紧且当$x\in F_A^L(\Gamma)$时$x_t$关于$t$为同等连续。

【注】 $x(t)$在$[0,\ A]$上是L—李普兹希的是指存在正常数L，使得$[0,\ A]$中的任意两点t_1和t_2都满足

$$|x(t_1)-x(t_2)|\leqslant L|t_1-t_2|.$$

证 任选序列$\{x_{t_k}^k: t_k\in[0,A],\ x^k\in F_A^L(\Gamma)\}$。我们可以假定$t^k\to t_0\in[0,\ A]$，$x_0^k\to\phi\in\Gamma$，$x^k(t)\to x^0(t)$在$[0,\ A]$一致地成立，因为$x_0^k\in\Gamma$而$\Gamma$是紧的，又$x^k(t)$在$[0,A]$上是李普兹希的，这里我们还须注意到，由公理($\alpha_4$)知$x^k(0)\to\phi(0)=x^0(0)$及$x^k(t)$在$[0,A]$上为一致有界。现定义

$$x(t)=\begin{cases}x^0(t), & t>0.\\ \phi(t), & t\leqslant 0.\end{cases}$$

则$x\in F_A^L(\Gamma)$。于是对x^k-x应用基本不等式(1)便得

$$|x_t^k-x_t|\leqslant k_1(t)\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|x^k(s)-x^0(s)| + M_1(t)|x_0^k-\phi|_B.$$

因此，对给定的$\varepsilon>0$，我们能找到N_1使得当$k\geqslant N_1$时，有

$$|x_t^k-x_t|<\frac{\varepsilon}{2},\quad t\in[0,\ A].$$

另一方面，由于x_t在$[0,\ A]$上连续，故存在$\delta>0$使得当$|t-s|<\delta$时有

$$|x_t-x_s|<\frac{\varepsilon}{2},\quad t,s\in[0,\ A].$$

因此，可选取N_2使得当$k \geq N_2$时$|t_k - t_0| < \delta$，于是，

$$|x^k_{t_k} - x_{t_0}|_B \leq |x^k_{t_k} - x_{t_k}|_B + |x_{t_k} - x_{t_0}|_B < \varepsilon$$

当$k \geq \max(N_1, N_2)$时成立．从而结论的第一部份得证。

下证结论的第二部份，考虑函数$(\phi) \in F_\infty(\phi)$，其定义是

$$(\phi)(t) = \phi(0), \quad t \geq 0. \tag{2}$$

应用不等式(1)得

$$|(\phi)_t - (\psi)_t|_B \leq k_1(t)|\phi(0) - \psi(0)| + M_1(t)|\phi - \psi|_B$$
$$\leq \{k_1(t)k + M_1(t)\}|\phi - \psi|_B,$$

即$(\phi)_t$关于ϕ满足李普兹希条件。由于根据(β_3)知$(\phi)_t$关于t是连续的，故$(\phi)_t$关于(t, ϕ)是连续的。因此，对给定的$\varepsilon > 0$，存在$\delta(\varepsilon) > 0$，使得当$\phi \in \Gamma_0$，$A \geq t$，$s \geq 0$，$|t - s| < \delta(\varepsilon)$时$|(\phi)_t - (\phi)_s|_B < \varepsilon$，这也由于$\Gamma_0$是紧集之故。从而当$s \leq t < s + \delta(\varepsilon)$时有

$$|x_t - x_s|_B \leq |(x_s)_{t-s} - x_s|_B + |x_t - (x_s)_{t-s}|_B$$
$$\leq \varepsilon + k_1(t-s)\sup_{s \leq r \leq t}|x(r) - x(s)|$$
$$\leq \varepsilon + k_1(t-s)L|t-s|.$$

这说明了x_t关于t是同等连续的。

【注】 由证明中可看到，如果Γ仅含一个元素，则在引理的第一部份里可删去假设(β_2)。

下面的引理是显然的。

引理2 假设(β_3)蕴含了无穷延滞的$RFDE(f)$过(t_0, φ)的解必须满足下列的关系式：

$$x_{t_0} = \varphi,$$

$$x(t) = \varphi(0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_s)ds, \quad t \geq t_0.$$

反之亦然。

由引理立即可得到下面的结果。

引理3 假定假设(β_3)成立。设$x^k(t)$是无穷延滞的$RFDf(f_k, \Omega)$在$[0, A]$上的一个解，又假设存在一个$x \in F_A$使得在

$[0, A]$上$x^k(t)\to x(t)$，$x_t^k\to x_t$（当$k\to\infty$时），并且当$k\to\infty$时$f_k(t, \phi)\to f(t, \phi)$在集$\Omega_0\subset\Omega$上一致地成立，其中$\Omega_0\supseteq\{(t, x_t^k): t\in[0, A], k\geqslant 1\}$。则$x(t)$是无穷延滞的$RFDE(f, \Omega)$在$[0, A]$上的一个解。

定理1 （存在性）在任何$(t_0, \varphi)\in\Omega$，假设(β_1)和(β_3)蕴含了无穷延滞的$RFDE(f, \Omega)$存在过$(t_0\varphi)$的解。

证 我们仅给出证明的主要步骤，因为推导过程与有界滞后的情况是类似的。

设$(\phi)\in F_\infty(\phi)$为(2)式所定义的函数。由假设(β_3)知$(\phi)_t$当$t\geqslant 0$为t的连续函数。显然，若x是无穷延滞的$RFDE(f)$过(t_0, φ)的解，其充分与必要的条件是y满足下列的关系

$$\left.\begin{aligned}&y_0=0,\\&y(t)=\int_0^t f(s+t_0, (\phi)_s+y_s)ds, \quad t\in[0, A].\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

其中y的定义是$y(t)=x(t+t_0)-(\phi)(t)$。

对任何的$\delta>0$和$\eta>0$，设

$A(\delta, \eta)=\{\zeta:(-\infty, \delta]\to\mathbf{R}^n$连续，当$t\leqslant 0$当$\zeta(t)=0$，当$t\in[0, \delta]$时$|\zeta(t)|\leqslant\eta\}$，则$A(\delta, \eta)$是Banach空间$C^0((-\infty, \delta], \mathbf{R}^n)$中的一个闭有界凸集，$C^0((-\infty, \delta], \mathbf{R}^n)$表示由$(-\infty, \delta]$映射入$\mathbf{R}^n$中的所有有界连续函数所组成的空间。

对任何$\zeta\in A(\delta, \eta)$，假设(β_3)蕴含了ζ_t关于t在$[0, \delta]$上连续。设U是B中元素ϕ的一个邻域，$\delta_0>0$为固定。对任何$\varepsilon>0$，假设(β_1)蕴含了存在一个$\eta_0>0$，使得当$t\in[0, \delta_0]$，$\zeta\in A(\delta_0, \eta_0)$时$|\zeta_t|_B<\varepsilon$。因此，我们可以假设$\delta_0$和$\eta_0$足够小，使得$t\in[0, \delta_0]$，$\zeta\in A(\delta_0, \eta_0)$时，便有$\phi+\zeta_t\in U$。

现在$A(\delta, \eta)$上定义算子T如下：

$$[T\zeta](t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \int_0^t f(t_0+s, (\phi)_s+\zeta_s)ds, & t\geqslant 0,\end{cases}$$

其中$\zeta\in A(\delta, \eta)$。

由于f为连续，$(\phi)_t$关于t为连续，故由上面的论证可知当$0<\delta<\delta_0$，$0<\eta<\eta_0$，及$\xi\in A(\delta,\ \eta)$时，函数$T\xi\in C^0((-\infty,\ \delta],\ R^n)$。

不难证明：(i) 存在正数δ和η，使$TA(\delta,\ \eta)\subset A(\delta,\ \eta)$；(ii) T为紧算子；(iii) T为连续(应用假设(β_1))。故满足Schauder不动点定理。因此T在$A(\delta,\ \eta)$上存在不动点y。也就是说y满足(3)式，再由x与y的关系，便知函数x在$(-\infty,\ t_0+A]$上满足下列关系。

$$\begin{cases} x_{t_0}=\varphi, \\ x(t)=\varphi(0)+\int_{t_0}^{t} f(s,\ x_s)ds,\ t\in[t_0,\ t_0+A]. \end{cases}$$

故无穷延滞的$RFDE(f,\ \Omega)$存在过$(t_0,\ \varphi)$的解。证毕。

定理2(唯一性)　假定假设(β_1)至(β_3)成立，且存在常数L使得任何的(t,ϕ)，$(t,\psi)\in\Omega$时，有

$$|f(t,\phi)-f(t,\psi)|\leqslant L|\phi-\psi|_B. \tag{4}$$

则存在连续函数$L(t)$，使得

$$|x_t(t_0,\varphi)-x_t(t_0,\psi)|_B\leqslant L(t-t_0)|\phi-\psi|_B,\ t\geqslant t_0.$$

特殊地，无穷延滞的$RFDE(f)$过$(t_0,\ \varphi)$的解是唯一的。

证　设$u(t)=|x_t(t_0,\varphi)-x_t(t_0,\psi)|_B$，则由(1)，(2)及引理2可推得

$$u(t)\leqslant k_1(t-t_0)\{|\phi(0)-\psi(0)|+\int_{t_0}^{t} Lu(s)ds\}$$
$$+M_1(t-t_0)|\phi-\psi|_B.$$

再由公理(α_4)便得

$$u(t)\leqslant\{k_1(t-t_0)k+M_1(t-t_0)\}|\phi-\psi|_B$$
$$+k_1(t-t_0)L\int_{t_0}^{t} u(s)ds.$$

应用Gronwall引理，便得本定理之证。

定理3(延展性)　如果假设(β_1)、(β_2)、(β_3)成立，x为无穷延滞的$RFDE(f,\ \Omega)$在$[\sigma,\ \delta)$的不可延拓解，则对Ω中的任一紧集W，必存在一$t_W\in[\sigma,\ \delta)$，使得当$t_W\leqslant t<\delta$时$(t,x_t)\notin W$。

证 假定结论对某一紧集 $W\subset\Omega$ 不真，则存在一序列$\{t_k\}$，$t_k\to\delta^-$，使得 $(t_k, x_{t_k})\in W$。由于W为紧，故不妨设(t_k,x_{t_k})收敛到 (δ,ϕ)。W的紧性亦保证存在常数$\varepsilon_0>0$ 及L，使得当(s,ψ)属于W的ε_0一邻域$U\subset\Omega$时，$|f(s, \psi)|\leqslant L$。

如果我们能证明x_t当$t\to\delta^-$时收敛到ϕ，则明显地解$x(t)$可延拓超出δ，这与假设$x(t)$ 为不可延拓矛盾。定理便由此而得证。为此，我们仍用反证法，假定x_t当$t\to\delta^-$时不收敛到ϕ，于是存在一序列$\{t'_k\}$使得$t'_k\to\delta^-$并且$|x_{t'_k}-x_{t_k}|=\varepsilon$，$\varepsilon$为某正常数。显然，我们可以假设$\varepsilon<\varepsilon_0$，$t_k<t'_k$，且当 $t_k\leqslant t<t'_k$时$|x_t-x_{t_k}|_B<\varepsilon$。

现定义函数x^k为

$$x^k(t)=\begin{cases}x(t+t_k), & t\leqslant t'_k-t_k;\\ x(t'_k), & t\geqslant t'_k-t_k。\end{cases}$$

则$x^k\in F^L_\infty(\Gamma)$，这里$\Gamma=Cl(U_k\{x_{t_k}\})$ 为紧集。因此，由引理 1 并注意到当$t\leqslant t'_k-t_k$时$x^k_t=x_{t+t_k}$，便知当$t'_k-t_k\to0$时，$\varepsilon=|x_{t'_k}-x_{t_k}|_B\to0$。导出了矛盾。证毕。

定理4（延展性） 在定理3的假设下，如果f将Ω中的有界闭集映射为有界集，则对 Ω 中的任何有界闭集 W，必存在一序列$t_k\to\delta^-$，使得 $(t_k, x_{t_k})\notin W$。

此外，如果$\Omega=\mathbf{R}\times B$或$B$满足这样的条件：存在$r>0$和$k^*$使得

$$|\phi|_{[-r,0]}\leqslant k^*|\phi|_B. \qquad (*)$$

则存在一个t_W使得当$t_W\leqslant t<\delta$时，$(t,x_t)\notin W$。

证 设闭有界集$W\subset\Omega$。

假定定理的第一部份对W不成立，则存在$\sigma<\delta$使得$(t,x_t)\in W$对一切$t\in[\sigma, \delta)$成立。根据对f的假设，可知$\dot{x}(t)$ 及 $x(t)$在$[\sigma, \delta)$ 为有界。从而 $x(t)$ 必连续地延拓超出δ。由引理 1，当$t\to\delta^-$时 (t,x_t) 收敛到W中的一点 (δ,ϕ)。定理1保证了无穷延滞的 $RFDE(f)$ 存在过 (δ,ϕ) 的解，这与$x(t)$ 是$[\sigma,\delta)$ 上的不可延展解的假定矛盾。故定理的第一部份得证。

下证定理的第二部份，若结论对W不真，则存在一序列$\{t_k\}$，

$t_k \to \delta^-$，使得 $(t_k, x_{t_k}) \in W$。我们首先证明

$$\Gamma = Cl\{(t, x_t): t \in [\sigma, \delta)\}$$

是Ω中的有界集。如果$\Gamma \subset \Omega$（这种情形当$\Omega = R \times B$时总是成立的），但Γ无界，我们能够选取一序列$\{s_k\}$使 $s_k \to \delta^-$ 且 $|x_{s_k}|_B = C$，这里的C是这样定义的：对 $C_1 = \sup\{|\phi|_B: (t, \phi) \in W, \ t \in [\sigma, \delta)\}$，

$$C = \{1 + k_1(0)k + \overline{\lim_{\beta \to 0^+}} M_1(\beta)\} C_1 + 1.$$

显然，我们可以假设$s_{k-1} < t_k < s_k$，$|x_t|_B < C$，$t \in [t_k, s_k)$。置

$$\Gamma_0 = Cl\{(t, x_t): t \in J\}, \ J = \bigcup_k [t_k, s_k].$$

由于$\Gamma_0 \subset \Gamma \subset \Omega$且$\Gamma_0$为闭有界，故$f(t, x_t)$ 在 J上有界，设$|f(t, x_t)| \leqslant L$。由不等式(1) 可得

$$|x_{s_k}|_B \leqslant k_1(\beta_k) \{|x(t_k)| + L\beta_k\} + M_1(\beta_k)|x_{t_k}|_B$$

$$\leqslant \{k_1(\beta_k)k + M_1(\beta_k)\} C_1 + k_1(\beta_k)L\beta_k,$$

$$\beta_k = s_k - t_k.$$

由于 $k \to \infty$时$\beta_k \to 0$，故k充分大时有$|x_{s_k}|_B < C$。导出了与$|x_{s_k}|_B = C$的矛盾。现设$\Gamma \cap \partial\Omega \neq 0$（空集），并存在序列 $(\sigma_k, x_{\sigma_k}) \to (\delta, \phi) \in \Gamma \cap \partial\Omega$。由条件（＊），存在$r > 0$，$r < \delta - \sigma$，使$|x_{\sigma_k} - \phi|_{[-r, 0]} \to 0$。因此，$x(t)$ 具有一个离开δ的连续扩张，且由引理1知Γ为紧。由于$W_0 = W \cap \Gamma$为Ω的紧子集，故根据定理 3 知存在t_{W_0}使得当 $t \in [t_{W_0}, \delta)$时 $(t, x_t) \notin W_0$，由此可推知当$t \in [t_{W_0}, \delta)$ 时$(t, x_t) \notin W$，这是因为对所有的$t \in [\sigma, \delta)$ 时，$(t, x_t) \in \Gamma$这与序列$\{t_k\}$的存在性矛盾，因为$\{t_k\}$蕴含了Γ是Ω的闭有界子集。

再根据$\dot{x}(t)$ 和 $x(t)$ 在$[\sigma, \delta)$上的有界性及Γ的紧性，重复相同的论证，便可得到矛盾，从而定理得证。

条件（＊）可由下面的假设得到。

(β_0)　存在$\theta_0 < 0$ 使得对任意的$\phi \in B$和某一常数k_0都有

$$|\phi(\theta_0)| \leqslant k_0 |\phi|_B.$$

引理4　在假设(β_0)，(β_1)，(β_2) 之下，存在一个常数k^*，使得

$$|\phi(\theta)|\leqslant k^*|\phi|_B \tag{5}$$

对任一$\theta\in[\theta_0, 0]$及$\phi\in B$成立。

证 对$\phi\in B$，设$(\phi)\in F_+(\phi)$如(2)所定义，则由公理(α_1)，对 $t\geqslant 0$ 有$(\phi)_t\in B$。又由(β_0) 可得$|(\phi)_t(\theta_0)|\leqslant k_0|(\phi)_t|_B$。另一方面，由不等式(1)和公理$(\alpha_4)$得

$$|(\phi)_t|_B\leqslant\{k_1(t)k+M_1(t)\}|\phi|_B,$$

且当$t+\theta_0\leqslant 0$时 $(\phi)_t(\theta_0)=\phi(t+\theta_0)$。因此，对于$\theta\in[\theta_0, 0]$和$k^*=k_0\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant-\theta_0}\{k_1(t)k+M_1(t)\}$.令$t=\theta-\theta_0$ 便可得到(5)式了。证毕。

定理5（连续依赖性） 设无穷延滞的$RFDE(f, \Omega)$过$(t_0\varphi)$ 的解$x(t_0, \varphi)$ 定义在 $[t_0, t_0+A]$上，$A>0$，是唯一的，又设假设(β_1)，(β_2)，(β_3) 皆被满足。则对任一$\varepsilon>0$，存在$\delta(\varepsilon)>0$使得如果$(s, \psi)\in\Omega$，$|s-t_0|<\delta(\varepsilon)$，$|\psi-\varphi|_B<\delta(\varepsilon)$，就有

$$|x_t(s, \psi)-x_t(t_0, \varphi)|_B<\varepsilon$$

对所有$t\in[\max\{s, t_0\}, t_0+A]$成立。其中$x(s, \psi)$是$RFDE(f)$过$(s, \psi)$的任何解。

证 根据 (β_3)知$\{(t, x_t(t_0, \varphi): t\in[t_0, t_0+A]\}$ 是紧的，故存在$\varepsilon>0$，$L>0$使得 $(s, \psi)\in W$时就有 $|f(s, \psi)|\leqslant L$，这里的$W=\{(s, \psi): |t-s|\leqslant\varepsilon, |\psi-x_t(t_0, \varphi)|_B\leqslant\varepsilon$对某一$t\in[t_0, t_0+A]\}$。由于$W$是$\mathbf{R}\times B$中的闭集，故从Tietze扩张定理可知 在$\mathbf{R}\times B$上存在一连续函数$g(s, \psi)$使得在$\mathbf{R}\times B$上$|g(s, \psi)|\leqslant L$，在$W$上$g=f$。

假定定理的结论不真，则存在序列t_k，φ^k，s_k，$k=1, 2, \cdots$，使得$(t_k, \varphi^k)\in W$，$|t_k-t_0|<\frac{1}{k}$，$|\varphi^k-\varphi|_B<\frac{1}{k}$，$s_k\in[\max\{t_0, t_k\}, t_0+A]$ 及 $|x_{s_k}(t_k, \varphi^k)-x_{s_k}(t_0, \varphi)|_B=\varepsilon_0$，我们可以假定$s_k\to s_0$，$\varepsilon_0=\varepsilon$ 及当 $t\in[\max\{t_0, t_k\}, s_k]$时，$|x_t(t_k, \varphi^k)-x_t(t_0, \varphi)|<\varepsilon_0$。为方便起见，我们记$\varphi=\varphi^0$。

根据定理4，$x(t_k, \varphi^k)$作为$RFDE(g, \mathbf{R}\times B)$的解可延拓超过$s_k$至$t_0+A+1$，此延展解记为$x^k$。显然，定义为 $y^k(t)=x^k(t+t_k)$

的y^k就是$RFDE(g_k, \mathbf{R}\times B)$过$(0, \varphi^k)$在$[0, A]$上的解，其中$g_k(t, \psi)=g(t+t_k, \psi)$。因为$\Gamma=\{\varphi^k: k\geq 0\}$是紧的且$|g_k|\leq L$，故由引理1得$y^k\in F_A^L(\Gamma)$。因此，$\{(t, y_t^k): t\in[0, A], k\geq 0\}=W_0$为紧且可取一序列$\{y^{k_j}\}$使得$y_t^{k_j}$与$y^{k_j}(t)$都在$[0, A]$上收敛。

由于g_k在W_0上一致收敛于g_0，故由引理3知y^{k_j}收敛到$RFDE(g_0)$过$(0, \varphi)$的解y。显然，定义为$x(t)=y(t-t_0)$的x是$DFDE(g)$过(t_0, φ)的一个解，它满足$|x_{s_0}-x_{s_0}(t_0, \varphi)|_B=\varepsilon_0$且当$t\in[t_0, s_0]$时，$(t, x_t)\in W$。因此，$x$又是$DFDE(f)$在$[t_0, s_0]$上的解，从而产生矛盾。证毕。

应用上面相同的证明方法可得到下面的结果：

定理6（连续依赖性） 设定理5的条件被满足，如果无穷延滞的$RFDF(f)$中的$f=f_\lambda$关于λ是连续的。其中参数λ是某个Banach空间中的元素。那末，$RFDE(f_\lambda)$过(t_0, φ)的解$x_\lambda(t_0, \varphi)$关于(t_0, φ, λ)为连续。

不难看出，在§1中的例1～例3所给出的空间是满足(β_1)～(β_3)的。对例2的空间（包括例1作为$p=1$，$r=0$的特殊情形），我们可置

$$K_1(\beta)=\left[1+\int_{-\beta}^{0}g(\theta)d_\theta\right]^{1/p}, \tag{6}$$

$$M_1(\beta)=\max\left\{\lambda_r(\beta),\ \operatorname*{ess\,sup}_{s\leq 0}\left[\frac{g(s-\beta)}{g(s)}\right]^{1/p}\right\},$$

$$\lambda_r(\beta)=\begin{cases}0, & \beta>r.\\ 1, & \beta\leq r.\end{cases}$$

对例3可取

$$K_1(\beta)=\sup_{-\beta\leq\theta\leq 0}e^{r\theta},\quad M_1(\beta)=e^{-r\beta}. \tag{7}$$

另一方面，假设(β_0)对例2的空间当$r=0$时是不成立的，但当$r>0$且$\theta_0\in[-r, 0]$时却是成立的。对例3的空间则$\theta_0<0$时成立。

第五章

有界滞量及无穷延滞的NFDE的解的基本理论

在第一章§2 中曾介绍过有界滞量的中立型泛函微分方程的基本概念。在本章§1、§2中将介绍其解的基本理论。在目前，对NFDE的理论来说，只有D算子型的NFDE发展得比较完整些，故本章将主要介绍D算子型NFDE的基本理论。在§3、§4中还介绍无穷延滞的D算子型NFDE的概念及其基本理论。

为了介绍解的基本理论的需要，我们首先介绍有关的预备知识，但均只叙述结果，其证明读者可参阅有关的参考文献。

定义1 [40] 设B是Banach空间X的一个有界子集，则

$$\alpha(B)=\inf\{d:B\text{具有有限个直径小于}d\text{的复盖}\}$$

称为B的非紧性kuratowski测度。

非紧性的kuratowski测度具有下列的性质：

(i) $\alpha(A)=0$ 当且仅当$\bar{A}$为紧；

(ii) $\alpha(A\cup B)=\max(\alpha(A),\ \alpha(B))$;

(iii) $\alpha(\overline{co}A)=\alpha(A)$，($\overline{co}A$表示$A$的闭凸壳，即所有含有$A$的凸集的交)；

(iv) $\alpha(A+B)\leqslant\alpha(A)+\alpha(B)$，($A+B=\{a+b:a\in A,\ b\in B\}$)。

定义2 设X为Banach空间，α是X的子集的非紧性Kuratowski测度，$T:X\to X$为连续映射。如果存在常数k:$0\leqslant k<1$，使得对任何的有界集$B\subset X$，$\alpha(TB)\leqslant k\alpha(B)$。则称$T$是一个$\alpha$—压缩。

定理 [41] (Darbo不动点定理) 设Γ是某个 Banach 空间的一

个凸有界闭子集，$T:\Gamma\to\Gamma$是α—压缩。则T在Γ中至少有一个不动点。

§1 有界滞量NFDE的解的存在性、连续依赖性及唯一性

现考虑D算子型的中立型泛函微分方程

$$\frac{d}{dt}D(t,\ x_t)=f(t,\ x_t).\tag{1}$$

其中D和f均为$\Omega\to\mathbf{R}^n$的连续泛函，其中Ω为$\mathbf{R}\times C$中的一个开子集，D在Ω上于0处是原子的。

定理1（存在性） 如果给定初始条件$(t_0,\ \varphi)\in\Omega$，且$D(t,\ \phi)$对ϕ存在连续的二阶fréchet导数。则方程(1)存在过$(t_0,\ \varphi)$的解。

证 将方程(1)的初值问题

$$\frac{d}{dt}D(t,\ x_t)=f(t,\ x_t),\tag{1}$$

$$x_{t_0}=\varphi.\tag{2}$$

写成等价的积分方程：

$$D(t_0+t,\ x_{t_0+t})-D(t_0,\ \varphi)=\int_{t_0}^{t_0+t}f(u,\ x_u)du.\tag{3}$$

令$u=t_0+s$，(3)又可写成

$$D(t_0+t,\ x_{t_0+t})-D(t_0,\ \varphi)=\int_0^t f(t_0+s,\ x_{t_0+s})ds.\tag{4}$$

令

$$\tilde{\varphi}(t)=\begin{cases}\varphi(t) & (-r\leqslant t\leqslant 0),\\ \varphi(0) & (t\geqslant 0),\end{cases}\quad 及\quad x(t_0+t)=\tilde{\varphi}(t)+z(t).$$

则 $x_{t_0+t}=\tilde{\varphi}_t+z_t$。于是(4)又可写成

$$D(t_0+t,\ \varphi_t+z_t)-D(t_0,\ \varphi)=\int_0^t f(t_0+s,\varphi_s+z_s)ds. \tag{5}$$

由于$D(t,\ \phi)$ 对ϕ的Fréchet导数$D_\phi(t,\ \phi)$ 为$C\to R^n$ 的线性连续算子，故由Riesz表示定理知存在 $n\times n$ 的有界变差矩阵函数$\mu(t,\ \phi,\ \theta)$，使得

$$D_\phi(t,\ \phi)\psi=\int_{-r}^0[d_\theta\mu(t,\ \phi,\ \theta)]\psi(\theta),\ \psi\in C. \tag{6}$$

根据D在0处为原子的假设，则有

$$\det A(t,\ \phi)\overset{\text{def}}{=\!=}\det[\mu(t,\ \phi,\ 0)-\mu(t,\ \phi,\ 0^-)]\neq 0.$$

现将(6) 写成

$$D_\phi(t,\phi)\psi=A(t,\ \phi)\psi(0)+\int_{-r}^{0-}[d_\theta\mu(t,\phi,\theta)]\psi(\theta),\psi\in C \tag{7}$$

定义算子S和U如下，

$$S:\begin{cases}(Sz)(t)=0\quad(-r\leqslant t\leqslant 0),\\ A(t_0+t,\ \varphi_t)(Sz)(t)=-\int_{-r}^{0-}[d_\theta\mu(t_0+t,\ \varphi_t,\ \theta)]z(t+\theta)+[D(t_0,\ \varphi)-D(t_0+t,\ \varphi_t)]-[D(t_0+t,\ \varphi_t+z_t)-D(t_0+t,\ \varphi_t)-D_\varphi(t_0+t,\ \varphi_t)z_t]\\ \qquad(0\leqslant t\leqslant a,\ a\text{为某正数}).\end{cases}$$

$$U:\begin{cases}(Uz)(t)=0\quad(-r\leqslant t\leqslant 0)\\ A(t_0+t,\ \varphi_t)(Uz)(t)=\int_0^t f(t_0+s,\ \varphi_s+z_s)ds\\ \qquad(0\leqslant t\leqslant a).\end{cases}$$

不难验证

$$z=Sz+Uz. \tag{8}$$

事实上，当$-r\leqslant t\leqslant 0$时，$(Sz)(t)+(Uz)(t)=0=z(t)$。当$0\leqslant t\leqslant a$时，考虑到(7) 式便得

$$A(t_0+t,\ \varphi_t)(Sz)(t)+A(t_0+t,\ \varphi_t)(Uz)(t)=$$

$$=-\int_{-r}^0[d_\theta\mu(t_0+t,\ \varphi_t,\ \theta)]z(t+\theta)+[D(t_0,\ \varphi)$$

$$-D(t_0+t,\ \varphi_t]-[D(t_0+t,\ \varphi_t+z_t)-D(t_0+t,\ \varphi_t)$$

$$-A(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t)z(t)-\int_{-r}^{0-}[d_\theta\mu(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t,\ \theta)]z(t+\theta)]+\int_0^t f(t_0+s,\ \bar{\varphi}_s+z_s)ds$$

$$=D(t_0,\ \varphi)-D(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t+z_t)+\int_0^t f(t_0+s,\ \bar{\varphi}_s+z_s)ds+A(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t)z(t).$$

再由(4) 式即知(8) 式成立。

由(8) 式可见：

$z\in C([-r,\ \alpha],R^n)$ 满足(8)$\Longleftrightarrow z$满足(5)

$\Longleftrightarrow$由$x(t_0+t)=\bar{\varphi}(t)+z(t)$确定的$x(t)$在$[t_0-r,\ t_0+\alpha]$上满足(1)，(2)。

因此，方程(1) 过$(t_0,\ \varphi)$ 的解的存在等价于确定$\alpha>0$，使得方程(8) 在$C([-r,\ \alpha],\ R^n)$中有解。

为了证明(8) 满足Darbo不动点定理， 通过以下几个步骤进行。

设 $E(\alpha,\ \beta)=\{\zeta:\zeta\in c([-r,\ \alpha],\ \mathrm{R}^n),\ \zeta_0=0,\ \|\zeta_t\|\leqslant\beta,\ t\in[0,\ \alpha]\}$。

第一步：选取α，使$S+U:E(\alpha,\ \beta)\to E(\alpha,\ \beta)$。

为此，首先取 $\alpha_0>0$， 使 $\det A(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t)\neq 0$， 设 $M=\max\{|A^{-1}(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t)|,\ t\in[0,\ \alpha_0]\}$。

1°由$D(t,\ \phi)$的连续性，必存在$\alpha_1\leqslant\alpha_0$，使得当$t\in[0,\ \alpha_1]$时，有

$$|D(t_0,\ \varphi)-D(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t)|<\frac{\beta}{4M}.$$

2°由Fréchet 导数的定义，知存在$\alpha_2\leqslant\alpha_0$，$\beta>0$，使得当$t\in[0,\ \alpha_2]$ 且 $z\in E(\alpha_2,\ \beta)$时，有

$$|D(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t+z_t)-D(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t)-D_\phi(t_0+t,\ \bar{\varphi}_t)z_t|<\frac{\beta}{4M}.$$

3°由于$D_\phi\in C(\Omega,\ \mathscr{L}(c,\ \mathrm{R}^n))$，其中$\mathscr{L}(C,\ \mathrm{R}^n)$ 表示由C到

R^n的有界线性映像所组成的Banach空间，根据第二章的附录知D_ϕ是测度上光滑的。从而存在纯量函数$\gamma(t, \phi, s)$，对$(t, \phi) \in \Omega$，$s \in \mathbf{R}$是连续的，且$\gamma(t, \phi, 0)=0$，使得对任意的$\alpha \in [0, r]$，$(t, \varphi) \in \Omega$，有$\left|\int_{-\alpha}^{0^-}[d_\theta \mu(t, \varphi, \theta)]\psi(\theta) \leqslant \gamma(t, \varphi, \alpha)|\psi|\right.$。因此，存在$\alpha_3 \leqslant \alpha_0$，使得当$t \in [0, \alpha_3]$且$z \in E(\alpha_3, \beta)$时，有

$$\left|\int_{-\gamma}^{0^-}[d_\theta \mu(t_0+t, \tilde{\varphi}_t, \theta)]z(t+\theta)\right| = \left|\int_{-\gamma}^{-\alpha_3} + \int_{-\alpha_3}^{0^-}\right|$$

$$= \left|\int_{-\alpha_3}^{0^-}\right| \leqslant \gamma(t_0+t, \tilde{\varphi}_t, \alpha_3)\|z_t\| < \frac{\beta}{4M}.$$

4°由f的连续性，只要α_0和β适当地小，$f(t_0+s, \tilde{\varphi}_s+z_s)$当$s \in [0, \alpha_0]$及$z \in E(\alpha_0, \beta)$时有界。故存在$\alpha_4 \leqslant \alpha_0$，使得当$t \in [0, \alpha_4]$，$z \in E(\alpha_4, \beta)$时有

$$\left|\int_0^t f(t_0+s, \tilde{\varphi}_s+z_s)ds\right|$$

$$\leqslant \left|\int_0^{\alpha_4} f(t_0+s, \tilde{\varphi}_s+z_s)ds\right| < \frac{\beta}{4M}.$$

综合1°，2°，3°，4°，可知若$\alpha=\min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$且当$t \in [0, \alpha]$及$z \in E(\alpha, \beta)$时，有

$$|(Sz)(t)+(Uz)(t)|$$

$$\leqslant |A^{-1}(t_0+t, \tilde{\varphi}_t)|\left\{\left|\int_{-\gamma}^{0^-}[d_\theta \mu(t_0+t, \tilde{\varphi}_t, \theta)z(t+\theta)\right]\right|$$

$$+|D(t_0, \varphi)-D(t_0+t, \tilde{\varphi}_t)|+|D(t_0+t, \tilde{\varphi}_t+z_t)$$

$$-D(t_0+t, \tilde{\varphi}_t)-D_\phi(t_0+t, \tilde{\varphi}_t)z_t|$$

$$+|A^{-1}(t_0+t, \tilde{\varphi}_t)|\left|\int_0^t f(t_0+s, \tilde{\varphi}_s+z_s)ds\right|$$

$$< \frac{\beta}{4}+\frac{\beta}{4}+\frac{\beta}{4}+\frac{\beta}{4}=\beta.$$

第二步：S在$E(\alpha, \beta)$上为一个压缩。

设$D(t_0+t, \tilde{\varphi}_t+z_t)-D(t_0+t, \tilde{\varphi}_t)-D_\phi(t_0+t, \tilde{\varphi}_t)z_t = g(t_0+t, \tilde{\varphi}_t, z_t)$。

根据$D(t, \phi)$对ϕ有连续的二阶Fréchet导数的假设，故存在对$(t,$

ϕ, β)连续的函数$\varepsilon(t, \phi, \beta)$，$\varepsilon(t, \phi, 0)=0$，使得当$\|\psi\|\leqslant\beta$，$\|\xi\|\leqslant\beta$时有$|g(t, \phi, \psi)-g(t, \phi, \xi)|\leqslant\varepsilon(t, \phi, \beta)\|\psi-\xi\|$。因此当$\|z_t\|\leqslant\beta$，$\|y_t\|\leqslant\beta$时，有

$$|g(t_0+t, \tilde{\varphi}_t, z_t)-g(t_0+t, \tilde{\varphi}_t, y_t)|$$
$$\leqslant\varepsilon(t_0+t, \varphi_t, \beta)\|z_t-y_t\|.$$

对$E(\alpha, \beta)$上的任意两个元素z_t和y_t，有

$$|(Sz)(t)-(Sy)(t)|$$
$$\leqslant|A^{-1}(t_0+t, \tilde{\varphi}_t)|\left\{\left|\int_{-r}^{0^-}[d_\theta\mu(t_0+t, \tilde{\varphi}_t, \theta)](z(t+\theta)-y(t+\theta))\right|+|g(t_0+t, \tilde{\varphi}_t, z_t)-g(t_0+t, \tilde{\varphi}_t, y_t)|\right\}$$
$$\leqslant M\left\{\left|\int_{-r}^{0^-}[d_\theta\mu(t_0+t, \tilde{\varphi}_t, \theta)](z(t+\theta)-y(t+\theta))\right|+\varepsilon(t_0+t, \tilde{\varphi}_t, \beta)\|z_t-y_t\|\right\}$$
$$\leqslant M\{\gamma(t_0+t, \tilde{\varphi}_t, \alpha)+\varepsilon(t_0+t, \tilde{\varphi}_t, \beta)\}\|z_t-y_t\|.$$

只要取α和β适当地小，便可使

$$M\{\gamma(t_0+t, \tilde{\varphi}_t, \alpha)+\varepsilon(t_0+t, \tilde{\varphi}_t, \beta)\}\leqslant k<1.$$

从而 $$|(Sz)(t)-(Sy)(t)|\leqslant k\|z_t-y_t\|.$$

故S在$E(\alpha, \beta)$上为一压缩。

第三步：U为完全连续

为此，U必须满足下列三个条件：

1° $U: E(\alpha, \beta)\to E(\alpha, \beta)$，

2° U为连续，

3° 对任何有界集 $B\subseteq E(\alpha, \beta)$，$\overline{UB}$($UB$的闭包)为紧集。

1°和2°是显然的。下证3°。

因 $B\subseteq E(\alpha, \beta)$，由1°知$UB\subseteq E(\alpha, \beta)$，因$E(\alpha, \beta)$为闭，故$\overline{UB}\subseteq E(\alpha, \beta)$，从而$\overline{UB}$中的每一个元素都有界$\beta$。故$\overline{UB}$中的函数为一致有界。

现证$\overline{UB}$中的函数等度连续。

设$z\in\overline{UB}$，则(i)$z\in UB$，或(ii)$z\in(UB)'$(导集)。

对于(i)，首先设当$t\in[0, \alpha]$时$|f(t_0+t, \varphi_t+z_t)|\leqslant L$，

于是

$$
\begin{aligned}
&|(Uz)(t)-(Uz)(\tau)| \\
&=|A^{-1}(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t)|\left|\int_0^t f(t_0+s,\ \tilde{\varphi}_s+z_s)ds\right. \\
&\left.-\int_0^\tau f(t_0+s+\tilde{\varphi}_s+z_s)ds\right| \\
&\leqslant M\left|\int_\tau^t f(t_0+s,\ \tilde{\varphi}_s+z_s)ds\right|\leqslant ML|t-\tau|.
\end{aligned}
$$

对于(ii)，则有$z_n\in UB$，$z_n\to z(n\to\infty)$。对任给 $\varepsilon>0$，当n足够大时，有

$$
\begin{aligned}
&|(Uz)(t)-(Uz)(\tau)| \\
&=|(Uz)(t)-(Uz_n)(t)|+|(Uz_n)(t)-(Uz_n)(\tau)| \\
&+|(Uz_n)(\tau)-(Uz)(t)|<\frac{\varepsilon}{3}+ML|t-\tau|+\frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}
$$

故只要取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3ML}$，当$|t-\tau|<\delta$时，便有

$$
|(Uz)(t)-(Uz)(\tau)|<\varepsilon.
$$

故$\overline{UB}$中的函数为等度连续。可见$\overline{UB}$为紧集。

第四步：$S+U$是α—压缩

由于$S+U$是将$E(\alpha,\ \beta)$映射入自身的算子，对任何有界集$B\subseteq E(\alpha,\ \beta)$，有$(S+U)B\subseteq E(\alpha,\ \beta)$，故$(S+U)B$有界。又因$U$为完全连续，故$\overline{UB}$为紧集。

现设α为非紧性的Kuratowski测度（注意：这里的α与$E(\alpha,\ \beta)$中的α意义不同）。则$\alpha(UB)=0$。由于S是压缩，故存在压缩常数$0\leqslant k<1$，使B中任何两点的距离通过S作用后压缩了k倍，因此有$\alpha(SB)\leqslant k\alpha(B)$。于是，

$$
\alpha[(S+U)B]\leqslant\alpha(SB)+\alpha(UB)=\alpha(SB)\leqslant k\alpha(\beta).
$$

故$S+U$为α—压缩。

最后，由于$E(\alpha,\ \beta)$是$C[(-r,\ \alpha],\ \mathbf{R}^n)$中的有界闭凸子集。根据Darbo定理。$S+U$在$E(\alpha,\ \beta)$上有不动点。证毕。

为了证明连续依赖性定理。我们首先介绍如下的引理。

引理1 设Γ是Banach空间X的一个有界凸闭集，Λ是Banach空间Y的一个子集。$T:\Gamma\times\Lambda\to\Gamma$是一个映照，满足下列的假设：

(h_1) $T(\cdot,\lambda)$对每个$\lambda\in\Lambda$为连续，存在$\lambda_0\in\Lambda$使得对每个$x\in\Gamma$，$T(x,\lambda)$在(x,λ_0)连续。

(h_2) 对每个$\Gamma'\subseteq\Gamma$，且它的非紧性Kuratowski测度$\alpha(\Gamma')>0$，则存在λ_0的一个开邻域$B=B(\Gamma')$，使得对任何相对紧集$\Lambda'\subseteq\Lambda\cap B$都有$\alpha(T(\Gamma',\Lambda'))<\alpha(\Gamma')$。

(h_3) 方程 $x=T(x,\lambda)$当$\lambda=\lambda_0$时在Γ中有唯一解$x(\lambda_0)$，则Γ中的任何解$x(\lambda)$必在$\lambda=\lambda_0$处连续。

证 任取序列$\{\lambda_k\}$满足$k\to\infty$时$\lambda_k\to\lambda_0$，且$x(\lambda_k)=T(x(\lambda_k),\lambda_k)$，现要证明当$k\to\infty$时$x(\lambda_k)\to x(\lambda_0)$。

为此，取$\Gamma'=\{x(\lambda_k)\}$，并让N充分大，使得当$k\geqslant N$时$\Lambda'=\{\lambda_k\}\subseteq\Lambda\cap B(\Gamma')$。其中$B(\Gamma')$为假设$(h_2)$中的$\lambda_0$的邻域。若$\alpha(\Gamma')>0$，由$\Lambda'$的相对紧性，从$(h_2)$得到

$$\alpha(\Gamma')=\alpha(\{T(x(\lambda_k),\lambda_k)\})\leqslant\alpha(T(\Gamma'\Lambda'))<\alpha(\Gamma')。$$

这是一个矛盾。故有$\alpha(\Gamma')=0$，即$\Gamma'=\{x(\lambda_k):k\geqslant N\}$为一个相对紧集。由于$\Gamma$为闭集，故存在$v_k\in\Lambda'$，使$x(v_k)\to z\in\Gamma(k\to\infty)$。显然仍有$x(v_k)=T(x(v_k),v_k)$。由假设$(h_1)$，$T(x,\lambda)$在$(z,\lambda_0)$处连续，故有$T(x(v_k),v_k)\to T(z,\lambda_0)$ $(k\to\infty)$。由假设(h_3)，知$z=x(\lambda_0)$，即当$k\to\infty$时$x(\lambda_k)\to x(\lambda_0)$。由于$\{\lambda_k\}$的任意性，故$x(\lambda)$在$\lambda=\lambda_0$处连续。

推论1 Γ和Λ的意义同引理1，$T:\Gamma\times\Lambda\to\Gamma$满足$(h_1)$和$(h_3)$，$T=S+U$，且对每一紧集$\Lambda'\subseteq\Lambda$，有

(h_4) $S(\cdot,\lambda)$是Γ上的一个压缩，且对$\lambda\in\Lambda'$为一致；

(h_5) $U(\Gamma,\Lambda')$为相对紧。

则方程$x=T(x,\lambda)$的解$x(\lambda)$在$\lambda=\lambda_0$处连续。

证 由引理，只需验证(h_2)成立。为此，对任一$\Gamma'\subseteq\Gamma$且$\alpha(\Gamma')>0$，取定λ_0的一个邻域$B=B(\Gamma')$，则对每一个相对紧集$\Lambda'\subseteq\Lambda\cap B$，由$(h_4)$和$(h_5)$得

$$\alpha(T(\Gamma',\Lambda'))=\alpha(S(\Gamma',\Lambda')+U(\Gamma',\Lambda'))$$

$$\leqslant \alpha(S(\Gamma', \Lambda')) + \alpha(U(\Gamma', \Lambda'))$$
$$= \alpha(S(\Gamma', \Lambda')) \leqslant k\alpha(\Gamma'), \quad 0 \leqslant k < 1.$$

故(h_2)成立。

推论2 Γ和Λ的意义如上，$T: \Gamma\times\Lambda \to \Gamma$满足$(h_3)$，$T = S + U$，$U$满足$(h_5)$且有 (h_6) $S(\cdot, \lambda)$对每一个$\lambda\in\Lambda$是一个压缩，$U(\cdot, \lambda)$对每一个$\lambda\in\Lambda$为连续；

(h_7) $S(x, \lambda)$对$x\in\Gamma$一致地在λ_0处连续；

(h_8) $U(x, \lambda)$对每一个$x\in\Gamma$在(x, λ_0)处连续。

则方程$x = T(x, \lambda)$的解在$\lambda = \lambda_0$处连续。

证 首先验证(h_1)，由(h_6)，$S(\cdot, \lambda)$为压缩知它对每一$\lambda\in\Lambda$为连续。又知$U(\cdot, \lambda)$对每一$\lambda\in\Lambda$为连续。故$T = S + U$ 对$\lambda\in\Lambda$连续。

对任一$z\in\Gamma$及任一$\varepsilon > 0$，由(h_6)、(h_7)对$S(x, \lambda)$的假设，存在$\delta = \delta(\varepsilon, z) > 0$，使当$\|\lambda - \lambda_0\| < \delta$，$\|x - z\| < \delta$时，有

$$\|S(x, \lambda) - S(x, \lambda_0)\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\|S(x, \lambda_0) - S(z, \lambda_0)\| \ \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而 $\|S(x, \lambda) - S(z, \lambda_0)\|$

$$\leqslant \|S(x,\lambda) - S(x, \lambda_0)\| + \|S(x, \lambda_0) - S(z, \lambda_0)\|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

故$S(x, \lambda)$在(z, λ_0)处连续。由(h_8)，$U(x, \lambda)$在(z, λ_0) 也连续，故$T(x, \lambda) = S(x, \lambda) + U(x, \lambda)$在$(z, \lambda_0)$处连续，由$z$的任意性，即知$(h_1)$被满足。

其次验证(h_2)，由(h_7)，对任意的$\varepsilon > 0$，存在 $\beta(\varepsilon) > 0$，使当$\|\lambda - \lambda_0\| < \beta(\varepsilon)$时有$\|S(x, \lambda) - S(x, \lambda_0)\| < \varepsilon$对一切$x\in\Gamma$成立。因此，对任何的$\Gamma'\subseteq\Gamma$且$\alpha(\Gamma') > 0$，总存在$\delta(\varepsilon) > 0$，使得当 $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta(\varepsilon)$时，有

$$\alpha((S(\cdot, \lambda) - S(\cdot, \lambda_0))\Gamma') < \varepsilon\alpha(\Gamma').$$

现设k_0为$S(\cdot,\ \lambda_0)$的压缩常数，于是

$$\begin{aligned}\alpha(T(\Gamma',\ \lambda)) &= \alpha(S(\Gamma',\ \lambda)+U(\Gamma',\ \lambda))\\ &\leqslant \alpha(S(\Gamma',\ \lambda))+\alpha(U(\Gamma',\ \lambda))\\ &= \alpha((S(\cdot,\lambda)-S(\cdot,\lambda_0))\Gamma')\\ &\quad +\alpha(S(\Gamma',\lambda_0))\\ &\leqslant \varepsilon\alpha(\Gamma')+k_0\alpha(\Gamma')=(\varepsilon+k_0)\alpha(\Gamma')\end{aligned}$$

可取ε充分小，使$\varepsilon+\varepsilon_0<1$，取$B(\Gamma')=\{\lambda:\|\lambda-\lambda_0\|<\delta(\varepsilon)\}$，则对任何相对紧集$\Lambda'\subseteq\Lambda\cap B(\Gamma')$，有

$$\alpha(T(\Gamma',\ \Lambda'))<\alpha(\Gamma').$$

即满足(h_2)。证毕。

定理2 （连续依赖性）。假设$\Omega\subseteq R\times C$为开集，$\Lambda$为某 Banach 空间中的一子集，$D$和$f:\Omega\times\Lambda\to R^n$满足下列的条件：

(i) 对每一个$(t,\ \phi)\in\Omega$，$D(t,\ \phi,\ \lambda)$在0处为原子关于$\lambda\in\Lambda$一致地成立，$D_{\phi}(t,\ \phi,\ \lambda)$在$\Omega$为连续关于$\lambda\in\Lambda$一致地成立；

(ii) 对每一个$\lambda\in\Lambda$，$D(t,\ \phi,\ \lambda)$与$f(t,\ \phi,\ \lambda)$在$(t,\ \phi)\in\Omega$连续，对每一个$(t,\varphi)\in\Omega$，$D(t,\phi,\ \lambda)$与$f(t,\ \phi,\ \lambda)$在$(t,\ \phi,\ \lambda_0)$连续；

(iii) 方程$\dfrac{d}{dt}D(t,\ x_t,\ \lambda_0)=f(t,\ x_t,\ \lambda_0)$在区间$[t_0-r,b]$上存在过$(t_0,\ \varphi)$的唯一解。

则存在$(t_0,\ \varphi,\ \lambda_0)$的一个邻域$N(t_0,\ \varphi,\ \lambda_0)$，使得对于任何的$(t',\ \varphi',\ \lambda')\in N(t_0,\ \varphi,\ \lambda_0)$，方程

$$\frac{d}{dt}D(t,\ x_t,\ \lambda')=f(t,\ x_t,\ \lambda') \tag{9}$$

在区间$[t'-r,\ b]$上存在过$(t',\ \varphi')$的解，且当$t\in[t_0,\ b]$，$(t',\ \varphi',\ \lambda')\in N(t_0,\ \varphi,\ \lambda_0)$时，$x_t(t',\ \varphi',\ \lambda')$在$(t,\ t',\ \varphi',\ \lambda_0)$处是连续的。

证 对方程(9)，仿照定理1的证明，可定义算子S和$U:E(\alpha,\ \beta)\times\Lambda\to E(\alpha,\ \beta)$。令$T=S+U$。读者可以验证$S(z,\ \lambda')$和$U(z,\ \lambda')$能满足推论1中的$(h_4)$及$(h_5)$。$(h_3)$由定理的条件

(iii)必然被满足。(h_2) 也是显然的。故方程 $z=T(z,\lambda')$的解 $z(\lambda')$在$\lambda'=\lambda_0$处连续，从而方程(9) 的解$x(t',\varphi',\lambda')$ 在$\lambda'=\lambda_0$处连续。故$x_t(t',\varphi',\lambda')$在$(t,t',\varphi',\lambda')$处连续。

[注] 和RFDE一样，可以建立NFDE(D, f) 的解对 D、f 的连续依赖性定理，由于定理叙述较长，证明复杂。故不在这里介绍，读者可参看文献[42]。

定理3 (唯一性) 设 $\Omega\subseteq R\times C$ 为开集，$f:\Omega\to R^n$，在 Ω 中的紧集上对 ϕ 是满足李普希兹 (Lipschitz) 条件。则对任何 $(t_0,\varphi)\in\Omega$，方程(1) 过(t_0,φ) 的解是唯一的。

证 设方程(1) 过(t_0,φ) 在区间 $[t_0-r,\ t_0+A]$ 存在两个解x和y。于是有

$$D(t,x_t)=D(t_0,\varphi)+\int_{t_0}^{t}f(s,x_s)ds,$$

$$D(t,y_t)=D(t_0,\varphi)+\int_{t_0}^{t}f(s,y_s)ds.$$

其中$t\in[t_0,\ t_0+\alpha]$，$\alpha<A$。

设k是包含轨线$\{(t,x_t):t_0\leqslant t\leqslant t_0+\alpha\}$ 和 $\{(t,y_t):t_0\leqslant t\leqslant t_0+\alpha\}$的任一紧集上的李普兹希常数。则有

$$|D(t,x_t)-D(t,y_t)|=\left|\int_{t_0}^{t}[f(s,x_s)-f(s,y_s)]ds\right|$$

$$\leqslant\int_{t_0}^{t}|f(s,x_s)-f(s,y_s)|ds$$

$$\leqslant k\int_{t_0}^{t}\|x_s-y_s\|ds\leqslant k\alpha\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t_0+\alpha}\|x_s-y_s\|. \tag{10}$$

另一方面，由于$D(t,\phi)$对ϕ可微，故有

$$D(t,x_t)-D(t,y_t)=D_\phi(t,y_t)(x_t-y_t)+\gamma\|x_t-y_t\|.$$

其中当$\|x_t-y_t\|\to 0$时，$\gamma\to 0$。

根据线性连续泛函的 Riesz 表示定理，存在有界变差函数矩阵$\mu(t,\phi,\theta)$，使得

$$D_\phi(t,y_t)(x_t-y_t)$$

$$=\int_{-r}^{0}[d_\theta\mu(t,y_t,\theta)]\cdot[x(t+\theta)-y(t+\theta)]$$

$$= A(t,\ y_t)[x(t) - y(t)]$$

$$+ \int_{-\gamma}^{0^-} [d_\theta \mu(t,\ y_t,\ \theta)] \cdot [x(t+\theta) - y(t+\theta)]. \qquad (11)$$

其中$A(t,\ y_t) = \mu(t,\ y_t,\ 0) - \mu(t,\ y_t,\ 0^-)$ 为非奇异矩阵。

由于当 $t_0 - r \leqslant t + \theta \leqslant t_0$ 时 $x(t+\theta) = \varphi(t - t_0 + \theta) = y(t+\theta)$，故

$$\int_{-\gamma}^{t_0 - t} [d_\theta \mu(t,\ y_t,\ \theta)] \cdot [x(t+\theta) - y(t+\theta)] = 0. \quad (12)$$

由(10)，(11)，(12)得到

$$|x(t) - y(t)| \leqslant |A(t,\ y_t)|^{-1} \left\{ \left| \int_{t_0 - t}^{0^-} [d_\theta \mu(t, y_t, \theta)] \right. \right.$$

$$\left. \cdot [x(t+\theta) - y(t+\theta)] \right|$$

$$\left. + |\gamma| \cdot \|x_t - y_t\| + k\alpha \sup_{t_0 \leqslant s \leqslant t_0 + \alpha} \|x_s - y_s\| \right\}.$$

现设 $M = \max\{|A^{-1}(t,\ y_t)| : t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \alpha\}$,

$$N = \max\{ \underset{[-\gamma, 0^-]}{V} [\mu(t,\ y_t,\ \theta)] : t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \alpha \}.$$

于是 $\quad |x(t) - y(t)| \leqslant M\{N + |\gamma| + k\alpha\} \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \alpha} \|x_t - y_t\|$

对一切$t \in [t_0,\ t_0 + \alpha]$成立，又因 $\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \alpha} \|x_t - y_t\| = \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \alpha}$

$|x(t) - y(t)|$，故有

$$\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \alpha} |x(t) - y(t)| \leqslant M\{N + |\gamma| + k\alpha\} \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \alpha}$$

$$\cdot |x(t) - y(t)|.$$

因为当$\alpha \to 0$时$|\gamma| \to 0$，$N \to 0$，故α充分小时，有$M\{N + |\gamma| + k\alpha\} < 1$。

故 $x(t) \equiv y(t)$，$t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \alpha$，如此分步进行，便可证明在整个存在区间上$x(t) \equiv y(t)$。证毕。

§2 有界滞量NFDE的解的延展性和可微性

在本节中我们考察有界滞量的中立型方程的解的延展性、向

后延展性、对初始函数的可微性以及解对t的可微性等问题。

我们仍然考虑D算子型的NEDE

$$\frac{d}{dt}D(t,x_t)=f(t,x_t) \tag{1}$$

其中D和f均为$\Omega\to\mathbf{R}^n$的连续泛函，$\Omega\subseteq\mathbf{R}\times C$为开集，$D$在$\Omega$上于0处是原子的。

定理1 （延展性）设W为Ω中的任一个有界闭集且有一个δ邻域仍含于Ω中。此外还满足下列的条件：

(i) f将W映为$\mathbf{R}^n$中的有界集；

(ii) $D(t,\phi)$，$D_\phi(t,\phi)$ 在W上一致连续；

(iii) D在W上于0处为一致原子〔注〕，$D_{\phi\phi}(t,\phi)$ 存在且在W上一致连续。如果$x(t)$ 是方程（1）在$[t_0-r,b)$ 上的一个不可延展解，则存在$t'\in[t_0,b)$ 使得 $(t',x_{t'})\notin W$。

【注】D在W上于0处为一致原子的定义是：D在Ω上于0处为原子。且存在常数$N>0$，使$|A^{-1}(t,\phi,0)|\leqslant N$，$\|D_\phi(t,\phi)\|\leqslant N$对一切 $(t,\phi)\in W$成立，$D_\phi(t,\phi)$ 所具测度光滑性中的$\gamma(t,\phi,s)$ 当$s\to 0$时对 $(t,\phi)\in W$一致地趋于零。（关于测度光滑的概念请参看第二章的附录）。

证 当$r=0$时，方程退化为常微分方程，由已知的结果知结论为真。故只需证明$r>0$的情形。我们不妨设b为有限，因为当b为无限时，由W的有界性，结论显然成立。

1°如果存在序列$t_k\to b^-$及C中的ψ使$x_{t_k}\to\psi$，则$t\to b^-$时$x(t)\to\psi(0)$。定义$x(b)=\psi(0)$，则 (b,x_b) 必位于Ω的边界上，否则由存在定理知$x(t)$ 可再向右延展。与$x(t)$ 为不可延展解的假定矛盾。注意到x_t对t的连续性及 $\mathrm{dis}((b,x_b),W)>0$，即知存在$t_W<b$，使得$t_W<t<b$时，$(t,x_t)\notin W$。此时结论成立。

2° 如果不存在1°那种序列$\{t_k\}$，这时有两种情形：集合$V=\{(t,x_t):t\in[t_0,b)\}$有界或无界。当$V$无界时，由于$W$有界，结论显然成立。故下面假设$V$为有界并设$\sup\limits_{t_0\leqslant t<b}\|x_t\|=M$。

这时如果定理结论不成立，即对一切 $t\in[t_0,b)$，均有$(t,$

$x_t)\in W$。从而 $V\subseteq W$。如果我们证得存在 $a>0$，使得 $x(t)$ 在 $[b-a, b)$ 上一致连续，则可推知 V 是相对紧的。从而必存在1° 那种性质的序列 $\{t_k\}$，导出了矛盾。故定理的结论成立。

下面证明，存在 $a>0$，使 $x(t)$ 在 $[b-d, b)$ 上一致连续。由于 $V\subseteq W$，故定理中对 W 成立的条件对 V 也成立。由条件（iii），存在某个 $N>0$ 以及连续函数 $\gamma(s)$ $(0\leqslant s\leqslant r)$ 和 $\eta(\beta)$ $(0\leqslant\beta\leqslant M)$，$\gamma(0)=\eta(0)=0$，使得对一切 $(t,\phi)\in V$，$\|\psi\|\leqslant\beta$，$0\leqslant\beta\leqslant\beta_0$，$0\leqslant s\leqslant r$，有

$$D(t,\phi+\psi)=D(t,\phi)+D_\phi(t,\phi)\psi+g(t,\phi,\psi),$$

$$|A^{-1}(t,\phi,0)|\leqslant N,\quad |D_\phi(t,\phi)|\leqslant N,$$

$$|g(t,\phi,\psi)|\leqslant\eta(\beta)\|\psi\|,$$

$$\left|\int_{-s}^{0-}[d_\theta\mu(t,\phi,\theta)]\psi(\theta)\right|\leqslant\gamma(s)\|\psi\|.$$

于是

$$|D(t,\phi+\psi)-D(t,\phi)|=|D_\phi(t,\phi)\psi+g(t,\phi,\psi)|$$

$$=\left|A(t,\phi,0)\psi(0)+\int_{-r}^{0-}[d_\theta\mu(t,\phi,\theta)]\psi(\theta)+g(t,\phi,\psi)\right|$$

$$=\left|A(t,\phi,0)\psi(0)+\int_{-r}^{-s}+\int_{-s}^{0-}+g(t,\phi,\psi)\right|$$

$$\geqslant\frac{|\psi(0)|}{N}-N\|\psi\|-\gamma(s)\|\psi\|-\eta(\beta)\|\psi\|.$$

如果 $x(t)$ 在 $[t_0-r,b)$ 上不一致连续，则有某个常数 $\varepsilon_0>0$ 以及数列 $\{t_k\}$ 和单调趋于零的正数列 $\{\delta_k\}$，使 t_k、$t_k-\delta_k$ 均在 $[t_0, b)$ 上，且有

$$|x(t_k)-x(t_k-\delta_k)|\geqslant\varepsilon_0.$$

对一切 k 成立。任取 $s>0$，由于 $x(t)$ 在 $[t_0-r, b-s]$ 上一致连续，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|t-t'|<\delta$，t、$t'\in[t_0-r, b-s]$ 时，$|x(t)-x(t')|\leqslant\varepsilon$。由条件（ii），知 $D(t,\phi)$ 在 V 上为一致连续，可选 $\delta>0$ 充分小，使当 $|t-t'|<\delta$，$(t,\phi)\in V$，$(t',\phi)\in V$ 时，有

$$|D(t,\phi)-D(t'\phi)|\leqslant\varepsilon.$$

现选定一 $\beta(0<\beta\leqslant\beta_0)$，取 $\varepsilon<\min(\beta,\varepsilon_0)$，设正整数 k_0 充分大，

使得当$k\geqslant k_0$时$\delta_k<\delta$，并对$k\geqslant k_0$作数列$\{s_k\}$如下：

$$s_k=\inf\{t\in[t_0,b):|x(t)-x(t-\delta_k)|\geqslant\min(\beta,\varepsilon_0)\}.$$

注意到$|x(t_k)-x(t_k-\delta_k)|\geqslant\varepsilon_0\geqslant\min(\beta,\varepsilon_0)$，上述的作法总是能够办到的。从而有

$$\begin{aligned}&|D(s_k,x_{s_k})-D(s_k-\delta_k,x_{s_k-\delta_k})|\\ \geqslant&|D(s_k,x_{s_k})-D(s_k,x_{s_k-\delta_k})|-|D(s_k,x_{s_k-\delta_k})\\ &\qquad-D(s_k-\delta_k,x_{s_k-\delta_k})|\\ \geqslant&|D(s_k,x_{s_k})-D(s_k,x_{s_k-\delta_k})|-\varepsilon\\ \geqslant&\min(\beta,\varepsilon_0)/N-N\varepsilon-\gamma(s)\beta-\eta(\beta)\min(\beta,\varepsilon_0)\overset{def}{=}\bar{\varepsilon}.\end{aligned}$$

适当选取β_0，s，ε，可使$\bar{\varepsilon}>0$。上式表明$D(t,x_t)$在$[t_0,b)$上非一致连续。

但另一方面，由条件（i），存在$B>0$，使对一切$t\in[t_0,b)$，有$|f(t,x_t)|<B$，从而当t，$t+\tau\in[t_0,b)$时有

$$|D(t+\tau,x_{t+\tau})-D(t,x_t)|=\left|\int_t^{t+\tau}f(s,x_s)ds\right|\leqslant B|\tau|.$$

即$D(t,x_t)$又在$[t_0,b)$上一致连续，这一矛盾证明了存在$\alpha>0$，使$x(t)$在$[b-\alpha,b)$上一致连续。从而定理全部证毕。

如果$D(t,\phi)$对ϕ为线性。则延展性定理的其他条件可以减弱。

定理2（延展性）设Ω、D、f均如方程（1）中所规定。又设$D(t,\phi)$对ϕ为线性，$W\subseteq\Omega$为有界闭集，$f(W)$为有界。如果α是方程(1)在$[t_0-r,b)$上的一个不可延展解，则存在$t'\in[t_0,b)$使得$(t',x_{t'})\notin W$。

证明与定理1的相同，定理1中要求W有一个δ邻域含于Ω内。这个假定是为选取与$(t,\phi)\in W$无关的β。当$D(t,\phi)$对ϕ为线性时，$g(t,\phi,\psi)$与$\eta(\beta)$同时消失，故不存在选取β的问题。

定理3（向后延展性）设$\Omega\subseteq\mathbf{R}\times C$为开集，泛函$D$和$f$：$\Omega\to\mathbf{R}^n$为连续，$D(t,\phi)$在$\Omega$上于$-r$处为原子，$D(t,\phi)$在$\Omega$上对$\phi$存在连续的二阶Fre'chet导数。如果$(t_0,\varphi)\in\Omega$，则存在$\alpha>0$，使

得方程

$$\frac{d}{dt}D(t,x_t)=f(t,x_t)$$

在区间$[t_0-r-\alpha,t_0]$上存在过(t_0,φ)的解。此外，如果$f(t,\phi)$在任何紧集上满足李普希兹条件，则这个解是唯一的。

证明从略。事实上，在D算子型的中立型方程中，$x(t)$在0处的地位与在$-r$处是等同的，既然D在0处为原子时可以证明"向前"解的存在性，那么D在$-r$处为原子时用同样的方法也可以证明"向后"解的存在性读者可参阅文[42]。

下面讨论解对初始函数的可微性。为此，首先介绍如下的引理。

引理 设Ω，D，f如方程(1)中所规定，如果$f_\phi(t,\phi)$及$D_{\varphi\phi}(t,\phi)$在Ω上存在而且连续，则对任给的紧集$W\subset\Omega$，存在W的邻域$V=V(W)\subset\Omega$和正数$\alpha=\alpha(W)$，使对任何的$(t_0,\varphi)\in V$，方程(1)过(t_0,φ)的解x在$[t_0-r,t_0+\alpha]$上存在

证 由§2定理1的证明知在引理的条件下，$x(t)=x(t_0,\varphi)(t)$为方程(1)过$(t_0,\varphi)\in\Omega$并定义在$[t_0-r,t_0+\alpha]$上的解的充要条件是$z=z(t_0,\varphi)$满足

$$z_0=0. \tag{2}$$

$$\begin{aligned}z(t)=A^{-1}(t_0+t,\bar{\varphi}_t)\Big[&-\int_{-r}^{0}[d_\theta\mu(t_0+t,\bar{\varphi}_t,\theta)]z_t(\theta)\\&+D(t_0,\varphi)-D(t_0+t,\bar{\varphi}_t)-g(t_0+t,\bar{\varphi}_t,z_t)\\&+\int_0^t f(t_0+s,\bar{\varphi}_s+z_s)ds\Big]\\=S(t_0,\varphi,z,t),&\quad t\in[0,\alpha].\end{aligned} \tag{3}$$

对任何$z\in C([-r,\alpha],R^n)$，定义$T(t_0,\varphi,z)$如下：

$T(t_0,\varphi,z)(t)=0,\quad t\in[-r,0]$,

$T(t_0,\varphi,z)(t)=S(t_0,\varphi,z,t),\quad t\in[0,\alpha]$,

则$T(t_0,\varphi,\cdot):C([-r,\alpha],R^n)\to C([-r,\alpha],R^n)$，且$z$满足(2)，(3)的充要条件是$z$为$T(t_0,\varphi,\cdot)$的不动点。

由于φ_t关于t是连续的，W是紧的，故对任给的$\varepsilon>0$，可取$\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0$和$0<\alpha_2=\alpha_2(\varepsilon)$，使得对任何的$(t_0, \varphi)\in V(W, \delta_2)$，$t\in[0, \alpha_2]$时有

$$\|\varphi_t-\varphi_0\|=\|\varphi_t-\varphi\|<\varepsilon.$$

由此易知，可取$0<\alpha_2\leqslant\alpha_1$，$0<\delta_2<\frac{\delta_1}{\alpha}$，使得对任何的$(t_0, \varphi)\in V(W, \delta_2)$，$t\in[0, \alpha_2]$，有

$$(t_0+t, \varphi_t)\in V\left(W, \frac{\delta_1}{2}\right), \ \|\varphi_t-\varphi\|<\frac{1}{2}\beta.$$

从而由(4)—(6)知，当$(t_0, \varphi)\in V(W, \delta_2)$，$t\in[0, \alpha_2]$，$\psi\in C$，$\|\psi\|<\frac{1}{2}\beta_1$时有

$$|A^{-1}(t_0+t, \varphi_t)|\gamma(t_0+t, \varphi_t, t)<\frac{1}{4}$$

$$|A^{-1}(t_0+t, \varphi_t)|\cdot|g(t_0+t, \varphi_t, \xi)-g(t_0+t, \varphi_t, \zeta)|$$

$$<\frac{1}{4}\|\xi-\zeta\|, \ \xi, \ \zeta\in C, \ \|\xi\|, \ \|\zeta\|\leqslant\frac{1}{2}\beta_1.$$

$$|f(t_0+t, \varphi_t+\psi)|\leqslant M, \ \|f_\phi(t_0+t, \varphi_t+\psi)\|\leqslant M.$$

设$E(\alpha, \beta)$如定理1证明所规定，则$E(\alpha, \beta)$为$C([-r, \alpha], R^n)$中的有界凸闭集。下证存在$\alpha=\alpha(W)>0$，$\beta=\beta(W)>0$和W的邻域$V=V(W)$，使$T(t_0, \varphi, \cdot)$为将$E(\alpha, \beta)$映射入自身的关于$(t_0, \varphi)\in V$是一致的压缩。

由f的条件和W的紧性，可取$\delta_1>0$和$M\geqslant1$，使对所有的$(t_0, \varphi)\in V(W, \delta_1)$（表$W$的$\delta_1$邻域，可设含于$\Omega$内）有

$$|A^{-1}(t_0, \varphi)|\leqslant M, \ |f(t_0, \varphi)|\leqslant M. \ \|f_\phi(t_0, \varphi)\|\leqslant M.$$

又根据γ和g的性质，易知当δ_1充分小时，必存在$\delta_0>0$，使对所有的$(t_0, \varphi)\in V(W, \delta_1)$有

$$|A^{-1}(t_0, \varphi)|\gamma(t_0, \varphi, \delta)<\frac{1}{4}, \ \delta\leqslant\delta_0.$$

$$|A^{-1}(t_0, \varphi)|\cdot|g(t_0, \varphi, \psi)-g(t_0, \varphi, \xi)|<\frac{1}{4}\|\psi-\xi\|,$$

$$\psi,\xi\in C,\ \|\psi\|,\ \|\xi\|\leqslant\delta_0.$$

再取$0<\alpha_1\leqslant\delta_0$，$0\leqslant\beta_1\leqslant\delta_0$，使当$t\in[0,\alpha_1]$，$\psi\in C,\|\psi\|\leqslant\beta_1$时对所有的$(t_0,\varphi)\in V\left(W,\ \frac{1}{2}\delta_1\right)$有$(t_0+t,\varphi+\psi)\in V(W,\delta_1)$。

从而必有

$$|A^{-1}(t_0+t,\varphi+\psi)|\,\gamma(t_0+t,\ \varphi+\psi,t)<\frac{1}{4},\tag{4}$$

$$\begin{aligned}&|A^{-1}(t_0+t,\ \varphi+\psi)|\cdot|g(t_0+t,\ \varphi+\psi,\xi)-g(t_0+t,\\&\qquad\varphi+\psi,\ \zeta)|\\&<\frac{1}{4}\|\xi-\zeta\|,\ \xi,\ \zeta\in C,\ \|\xi\|,\ \|\zeta\|\leqslant\beta_1,\end{aligned}\tag{5}$$

$$|f(t_0+t,\ \varphi+\psi)|\leqslant M,\ \|f_\phi(t_0+t,\varphi+\psi)\|\leqslant M.\tag{6}$$

又由$D(t,\phi)$在Ω上的连续性知，存在$0<\delta_3\leqslant\delta_2$使得对任何$(t_0,\varphi)\in V(W,\delta_3)$，$(t_0',\varphi')\in V(W,\ \delta_3)$，$|t_0-t_0'|\leqslant\delta_3$，$\|\varphi-\varphi'\|\leqslant\delta_3$有

$$|D(t_0,\varphi)-D(t_0',\varphi')|\leqslant\frac{1}{4M}\cdot\frac{\beta_1}{2}.\tag{7}$$

故可取$0<\alpha_3\leqslant\alpha_2$，使对任何$(t_0,\ \varphi)\in V\left(W,\ \frac{\alpha_3}{2}\right)$

$t\in[0,\alpha_3]$有$(t_0+t_1,\ \tilde{\varphi}_t)\in V(W,\ \delta_3)$，从而有

$$|D(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t)-D(t_0,\ \varphi)|<\frac{1}{4M}\cdot\frac{\beta_1}{2}$$

命$\beta=\frac{1}{2}\beta_1$，$\alpha=\min\left\{\alpha_3,\frac{1}{4M^2}\beta,\frac{1}{4M^2}\right\}$，$V=V\left(W,\ \frac{1}{2}\delta_3\right)$。

往证：$T(t_0,\varphi,\cdot):E(\alpha,\beta)\to E(\alpha,\beta)$且关于$(t_0,\varphi)\in V$是一致压缩。事实上，如注意到$V=V\left(W,\ \frac{1}{2}\delta_3\right)\subset V(W,\ \delta_2)\subset V\left(W,\ \frac{1}{2}\delta_1\right)$，$\alpha\leqslant\alpha_i(i=1,2,3)$，则对所有的$(t_0,\varphi)\in V$，$t\in[0,\alpha]$，$\|\psi\|\leqslant\beta$，有(4)—(7)成立。从而对所有的$(t_0,\varphi)\in V$，$z$，$\bar{z}\in$

$E(\alpha,\beta)$，有

$$
\begin{aligned}
|T(t_0,\varphi,z)(t)| \leqslant & |A^{-1}(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t)|\cdot[\gamma(t_0+t,\tilde{\varphi}_t,\\
& t)\|z_t\| + |D(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t) - D(t_0,\varphi)| + |g(t_0\\
& +t,\ \tilde{\varphi}_t,\ z_t)| + \alpha M]\\
& \leqslant \frac{1}{4}\beta + \frac{1}{4}\beta + \frac{1}{4}\beta + \frac{1}{4}\beta = \beta,\ t\in[0,\alpha];
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|T(t_0,\varphi,z)(t) - T(t_0,\varphi,\bar{z})(t)| \leqslant & |A^{-1}(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t)|\\
& \cdot[\gamma(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t,\ t)\cdot\|z_t-\bar{z}_t\| + |g(t_0\\
& +t,\ \tilde{\varphi}_t,\ z_t) - g(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t,\ \bar{z}_t)|\\
& + M\alpha\|z-\bar{z}\|] \leqslant \frac{3}{4}\|z-\bar{z}\|,\ t\in[0,\ \alpha].
\end{aligned}
$$

其中$\|z\| = \sup\limits_{-r\leqslant t\leqslant\alpha}|z(t)|$。可见引理的结论成立。证毕。

定理4（对初始函数的可微性）在引理的条件下，设方程(1)过（t_0,φ）$\in\Omega$的不可延展解$x(t_0,\varphi)$的存在区间是$[t_0-r,b)$，则对每一个$t\in[t_0,b)$，$x_t(t_0,\varphi)$关于φ的Fréchet 导数$\frac{\partial}{\partial\varphi}x_t(t_0,\varphi)$在$\Omega$上存在连续，且$\frac{\partial}{\partial\varphi}x_t(t_0,\varphi)$：$C\to C$是有界线性算子，$\frac{\partial}{\partial\varphi}x_{t_0}(t_0,\varphi)=I$，又对任何$\psi\in C$，$y(t)=\frac{\partial}{\partial\varphi}x(t_0,\varphi)\psi(t)$至少在$[t_0-r,b)$上是初值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}[D_\phi(t,x_t(t_0,\varphi))y_t] = f_\phi(t,x_t(t_0,\varphi))y_t, & (8)\\
y_{t_0}=\psi & (9)
\end{cases}
$$

的解。

证 任给$\bar{t}\in[t_0,b)$，取$\bar{b}$：$\bar{t}<\bar{b}<b$，由$x(t_0,\varphi)(t)$在$[t_0-r,\bar{b}]$上的一致连续性，知$W=\{(t,x_t):t\in[t_0,\bar{b}]\}$为$\Omega$中的紧集。由引理知存在$W$的邻域$V\subset\Omega$和$\alpha=\alpha(W)>0$，使对任何$(\tau,\psi)\in V$，方程(1)过（$\tau$，$\psi$）的解$x(\tau,\psi)(t)$至少在$[\tau-r,\ \tau+\alpha]$上存在，并且如果定义$\tilde{\psi}$和$z(\tau,\ \psi)$为

$$\tilde{\psi}(t)=\psi(t),\quad t\in[-r,0],\quad \tilde{\psi}(t)=\psi(0),\quad t>0,$$

$$z(\tau,\psi)(t)=x(\tau,\psi)(\tau+t)-\tilde{\psi}(t),\quad t\in[-r,\alpha]。$$

则由引理的证明中知$z(\tau,\psi)\in C([-r,\alpha],\ \mathbf{R}^n)$ 是$T(\tau,\psi,\cdot)$ 在$C([-r,\alpha],\ \mathbf{R}^n)$ 中的唯一不动点。这里的$T(\tau,\psi,\cdot)$ 是将$E(\alpha,\beta)$ 映射入自身，关于$(\tau,\psi)\in V$为一致压缩的算子。特别对$\tau=t_0$，$(t_0,\psi)\in V$，有

$$T(t_0,\psi,z)(t)=0,\quad t\in[-r,0],$$

$$\begin{aligned}T(t_0,\psi,z)(t)&=A^{-1}(t_0+t,\tilde{\psi}_t)\Big[-\int_{-r}^{0-}[d_\theta\mu(t_0+t,\tilde{\psi}_t,\\&\quad\theta)]z_t(\theta)+D(t_0,\psi)-D(t_0+t,\tilde{\psi}_t)-g(t_0+t,\tilde{\psi}_t,z_t)\\&\quad+\int_0^t f(t_0+s,\tilde{\psi}_s+z_s)ds\Big]\\&=A^{-1}(t_0+t,\tilde{\psi}_t)[-D_\phi(t_0+t,\tilde{\psi}_t)z_t\\&\quad+A(t_0+t,\tilde{\psi}_t)z(t)+D(t_0,\psi)-D(t_0+t,\ \tilde{\psi}_t)\\&\quad+g(t_0+t,\tilde{\psi}_t,\ z_t)+\int_0^t f(t_0+s,\tilde{\psi}_s+z_s)ds],\\&\qquad\qquad t\in[0,\ \alpha]。\end{aligned}$$

由D、f所满足的条件，易知$T(t_0,\psi,z)$ 关于ψ及z的Fréchet导数在$V\times E(\alpha,\beta)$ 上存在而且连续。从而可知$T(t_0,\psi,z)$ 在$E(\alpha,\beta)$中的不动点$z(t_0,\psi)$ 在V上关于ψ的偏导数存在而且连续（理由见第二章§3引理2），于是对任何$t\in[t_0,t_0+\alpha]$，$(t_0\psi)\in V$，$x_t(t_0,\psi)$ 关于ψ的偏导数存在而且连续。特别$\psi=\phi$时上述结论亦成立。

由$[t_0,\bar{b}]$的紧性，利用分步法可证明$x_t(t_0,\varphi)$ 在Ω上存在连续的关于φ的Fréchet导数。

显然，对每一个$t\in[t_0,b)$，$\dfrac{\partial}{\partial\varphi}x_t(t_0,\varphi)$ 为C到C的有界线性算子且$\dfrac{\partial}{\partial\varphi}x_{t_0}(t_0,\varphi)=I$。

下证最后的结论，因为$x(t_0,\varphi)(t)$ 是方程（1)的解，从而

$$D(t,x_t(t_0,\varphi))=D(t_0,\varphi)+\int_{t_0}^{t} f(s,x_s(t_0,\varphi))ds,$$
$$t\in[t_0,b)。$$

由此知当$\psi\in C$时有

$$D_\phi(t,x_t(t_0,\varphi))\frac{\partial}{\partial\varphi}x_t(t_0,\varphi)\psi=D_\phi(t_0,\varphi)\psi$$
$$+\int_{t_0}^{t} f_\psi(s,x_s(t_0,\varphi))\frac{\partial}{\partial\varphi}x_s(t_0,\varphi)\psi ds \quad t\in[t_0,b)。$$

将上式两边对t求导，并注意到$\frac{\partial}{\partial\varphi}x_t(t_0,\varphi)\psi=I$：$C\to c$便知(8)，(9) 成立。

我们知道，如果函数 $x(t)$ 是方程 (1) 的解，则它必须使 $D(t,x_t)$ 关于t为连续可微。至于$x(t)$ 本身，则不一定是可微的。也就是说，方程(1) 不一定存在光滑的解。文[233] 讨论了在什么条件下方程 (1)有可微解存在。这是一个有趣的结果。由于该文篇幅太长。我们只介绍其结果。不给证明。有兴趣的读者可参阅此文。

定理5[233] (对t的可微性) 设$D_t(t,\phi)$ 及 $D_{\phi\phi}(t,\phi)$ 在Ω上存在且连续。$D_t(t,\phi)$ 和$f(t,\phi)$ 均在Ω上关于ϕ满足局部李普希兹条件。则方程 (1) 过 $(t_0,\varphi)\in\bar{S}(\Omega)=\{(t_0,\phi)\in\Omega;\ \phi\in C,\ D_\phi(t_0,\phi)\dot{\phi}=f(t_0,\phi)-D_t(t_0,\phi)\}$的解在其存在区间内连续可微。

§3 无穷延滞NFDE的解的存在性、连续依赖性及唯一性

设$\hat{B}$是由某些映射φ：$(-\infty,0]\to\mathbf{R}^n$ 组成的实线性拓扑空间，其拓扑由$\hat{B}$中半范数$P(\cdot)$ 所定义。并设在P的诱导范数下，$\hat{B}$中元素关于P的等价类组成一个Banach空间$B=\hat{B}/P(\cdot)$。(设$\varphi\in\hat{B}$，以φ表ϕ中关于P的等价类，则$|\varphi|_B=P(\phi)$)。

对$\hat{x}:(-\infty,\sigma)\to\mathbf{R}^n$，$t\in(-\infty,\sigma)$，定义$\hat{x}_t:(-\infty,0]\to\mathbf{R}^n$为$\hat{x}_t(\theta)=\hat{x}(t+\theta)$，$\theta\leqslant 0$。对$\alpha\geqslant 0$，$t_0\in\mathbf{R}$，$\hat{\varphi}\in\hat{B}$，定义

$\mathscr{F}_{\alpha,t_0}(\hat{\varphi})=\{\hat{\psi}:(-\infty,t_0+\alpha]\to\mathbf{R}^n;\ \hat{\psi}_{t_0}=\hat{\varphi},\ \hat{\psi}$于$[t_0,t_0+\alpha]$连续$\}$，

$$\mathscr{F}_{\alpha,t_0}=\bigcup_{\hat{\varphi}\in\hat{B}}\mathscr{F}_{\alpha,t_0}(\hat{\varphi})。$$

设$\hat{B}$满足如下公理：

(α_1) 存在常数$K>0$，使$|\hat{\varphi}(0)|\leqslant Kp(\hat{\varphi})$对$\hat{\varphi}\in\hat{B}$成立。

(α_2) 对所有$\hat{x}\in\mathscr{F}_{\alpha,t_0}$和$t\in[t_0,t_0+\alpha]$，$\hat{x}_t\in\hat{B}$且$\hat{x}_t$关于$t\in[t_0,t_0+\alpha]$连续。

(α_3) 存在定义于$\mathbf{R}^+$上连续函数$K_1(s)$及局部有界函数$M_1(s)$，使对任给$t_0\in\mathbf{R}$，$\alpha\geqslant 0$，$\hat{x}\in\mathscr{F}_{\alpha,t_0}$，有$p(\hat{x}_{\alpha+t_0})\leqslant K_1(\alpha)\sup\limits_{t_0\leqslant\theta\leqslant t_0+\alpha}|\hat{x}(\theta)|+M_1(\alpha)p(\hat{x}_{t_0})$。

称$\hat{\psi},\hat{\omega}\in\mathscr{F}_{\alpha,t_0}$为等价的（记为$\hat{\psi}\sim\hat{\omega}$），若$p(\hat{\psi}_{t_0}-\hat{\omega}_{t_0})=0$且$\hat{\psi}(s)=\hat{\omega}(S)$，$s\in[t_0,t_0+\alpha]$。仍以$\psi$记在这种关系下$\hat{\psi}$的等价类。由$(\alpha_3)$知道对等价类$\psi$，可以定义$\psi(s)=\hat{\psi}(s)$，$s\in[t_0,t_0+\alpha]$和$\psi_t=\hat{\psi}_t$在$\hat{B}$中关于$p(\cdot)$的等价类（其中$t\in[t_0,t_0+\alpha]$）。

对任给$t_0\in\mathbf{R}$，$\alpha\geqslant 0$，$\varphi\in B$，定义

$F_{\alpha,t_0}(\varphi)=\{\psi:\ \hat{\psi}\in\mathscr{F}_{\alpha,t_0}(\hat{\varphi}),\ \hat{\varphi}\in\varphi\}$，

$$F_{\alpha,t_0}=\bigcup_{\varphi\in B}F_{\alpha,t_0}(\varphi)。$$

又由(α_1)，对$\varphi\in B$，可以定义$\varphi(0)=\hat{\varphi}(0)$，其中$\hat{\varphi}$是$\varphi$的任意代表元。相应于$(\alpha_1)$—$(\alpha_3)$，相空间$B$满足如下公理：

(β_1) $|\varphi(0)|\leqslant K|\varphi|_B$，$\varphi\in B$，

(β_2) 若$x\in F_{\alpha,t_0}$，则$x_t\in B$且关于$t\in[t_0,t_0+\alpha]$连续，

(β_3) 若$x\in F_{\alpha,t_0}$，则

$$|x_{\alpha+t_0}|_B\leqslant K_1(\alpha)\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t_0+\alpha}|x(s)|+M_1(\alpha)|x_{t_0}|_B。$$

第四章给出了很多满足这些公理的相空间的实例。在本章的最后这两节，我们将在这种相空间上引入无穷延滞*NFDE*，并建

立其基本理论。

首先给出其定义。

定义1 设Ω是$\mathbf{R}\times B$中开集，$D:\Omega\to\mathbf{R}^n$连续且$D(t,\varphi)$有关于φ的连续Fréchet导数$D_\varphi(t,\varphi)$：$B\to\mathbf{R}^n$，且

$$D_\varphi(t,\varphi)\psi=A(t,\varphi)\psi(0)+L(t,\varphi,\psi).\qquad(1)$$

其中$(t,\varphi)\in\Omega$，$\psi\in B$，$A(t,\varphi)$是一个定义于Ω上的$n\times n$阶矩阵，$A^{-1}(t,\varphi)$存在且$A(t,\varphi)$，$A^{-1}(t,\varphi)$在Ω上连续，$L(t,\varphi,\psi)$关于ψ线性且满足

(γ_1) 存在$\beta_0>0$和连续映射γ：$\Omega\times[0,\beta_0]\to\mathbf{R}^+$，$\gamma(t,\varphi,0)=0$使得当$\psi\in B$且存在$\hat{\psi}\in\psi$，$\hat{\psi}(\theta)=0$，$\theta\in(-\infty,-\beta)$时，

$$|L(t,\varphi,\psi)|\leqslant\gamma(t,\varphi,\beta)|\psi|_B\qquad(2)$$

$(\beta<\beta_0)$，则称D在Ω上原点处为广义原子的。

若D、$f\in C(\Omega,\mathbf{R}^n)$，$D$在$\Omega$上原点处为广义原子的，则称

$$\frac{d}{dt}D(t,x_t)=f(t,x_t)\qquad(3)$$

为无穷延滞中立型泛函微分方程，记为$NFDE(D,f,\Omega)$。

若存在$A>0$，$t_0\in\mathbf{R}$，$x\in F_{A,t_0}$，使当$t\in[t_0,t_0+A]$时，$(t,x_t)\in\Omega$且$D(t,x_t)$连续可微，满足(3)，则称x为(3)的解。若$x_{t_0}=\varphi$，则称x是方程(3)过(t_0,φ)的解，记为$x(t;t_0,\varphi)$。

例1 设k：$(-\infty,0]\to[0,\infty)$连续，非减，于$(-\infty,0)$上可积且使得

$$k(u+v)\leqslant k(u)k(v),\quad u,v\leqslant 0.$$

B_k^1表示从$(-\infty,0]$到$\mathbf{R}^n$的某些映射的等价类组成的集合，这些映射在$(-\infty,0]$上可测，于$[-r,0]$上连续，$(r>0$为常数)且

$$P(\varphi)=\sup_{u\in[-r,0]}|\varphi(u)|+\int_{-\infty}^{-r}k(u)|\varphi(u)|du<+\infty.$$

不难证明，B_k^1的对偶空间$(B_k^1)^*$由下述映射ψ：$(-\infty,0]\to\mathbf{R}^n$组成，$\psi$在$(-\infty,r-)$上的限制属于$L^\infty((-\infty,-r),\mathbf{R}^n)$，$\psi$在

$[-r,0]$上的限制为有界变差、左连续函数且$\psi(0)=0$。对$\varphi\in B_h^1$，$\psi\in(B_h^1)^*$，φ与ψ的对偶为

$$\langle\psi,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{-r}\psi(u)\varphi(u)k(u)du+\int_{-r}^{0}[d\psi(u)]\varphi(u)$$

其中$\psi\varphi$，$[d\psi]\varphi$表示n维欧氏空间中纯量积。

所以，若D：$B_h^1\to\mathbf{R}^n$是一个有界线性泛函，则存在η_D：$(-\infty,0]\to L(\mathbf{R}^n,\ \mathbf{R}^n)$（一个其列属于$(B_h^1)^*$的矩阵），使

$$D\varphi=\int_{-\infty}^{-r}k(s)\eta_D(s)\cdot\varphi(s)ds+\int_{-r}^{0}[d\eta_D(s)]\varphi(s),$$

则D诱导出一个有界线性映射D^r：$C([-r,\ 0],\ \mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}^n$：

$$D^r\varphi=\int_{-r}^{0}[d\eta_D(s)]\varphi(s)\qquad\varphi\in C([-r,\ 0],\ \mathbf{R}^n)$$

若D^r：$C([-r,\ 0],\ \mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}^n$在原点处是原子的，则

$$\frac{d}{dt}D(x_t)=f(t,\ x_t)$$

是一个$NFDE$。

例2 $C_\infty^\gamma=\{\varphi\in C([-\infty,\ 0],\ \mathbf{R}^n),\ e^{\gamma\theta}\varphi(\theta)\to$常数$(\theta\to-\infty$时$)\}$，

$$|\varphi|_{C_\infty^\gamma}=\sup_{\theta\le 0}e^{\gamma\theta}|\varphi(\theta)|,\ \varphi\in C_\infty^\gamma.$$

若$D_\varphi(t,\ \varphi)\psi=L_1(t,\ \varphi,\ \psi_r)+L_2(t,\ \varphi,\ \psi^r)$，其中$r$为某一正常数，$L_1$，$L_2$：$\Omega\times C_\infty^\gamma\to\mathbf{R}^n$，$\Omega\leqslant\mathbf{R}\times B$。$L_i(t,\ \varphi,\psi)$是$\psi$的有界线性泛函，

$$\psi_r(\theta)=\begin{cases}\psi(\theta), & \theta\leqslant-r\\ \psi(-r), & -r\leqslant\theta\leqslant0\end{cases},$$

$$\psi^r(\theta)=\begin{cases}\psi(-r)e^{-\gamma(\theta+r)}, & \theta<-r\\ \psi(\theta), & -r\leqslant\theta\leqslant0\end{cases}.$$

显然，$L_1(t,\ \varphi,\ \psi_r)$与$\psi$在$(-r,\ 0]$上的值无关，$L_2(t,\varphi,\psi^r)$与$\psi$在$(-\infty,\ -r)$上的值无关，因而存在一个$n\times n$矩阵$\eta(t,\ \varphi,\ \theta)$，其元素关于$\theta\in[-r,\ 0]$为有界变差，使得

$$L_2(t,\ \varphi,\ \psi^r)=\int_{-r}^{0}d\theta\eta(t,\ \varphi,\ \theta)\psi(\theta).$$

若$A(t, \varphi)=\eta(t, \varphi, 0)-\eta(t, \varphi, 0^-)$，$\gamma(t,\varphi,s)=\underset{\theta\in[-s,0]}{\mathrm{Var}}$ $\eta^*(t, \varphi, \theta)$满足定义1中条件，则

$$\frac{d}{dt}D(t, x_t)=f(t, x_t)$$

是一个$NFDE$。（其中$\eta^*(t, \varphi\theta)=\eta(t, \varphi, \theta)$，$\theta\in[-r, 0)$，$\eta^*(t, \varphi, 0)=\eta(t, \varphi, 0-)$）。

〔注〕 若取$B=C([-r, 0], \mathbf{R}^n)$，$r\geqslant0$，则(3)就是有界滞量的$NFDE$；若取$D_\varphi=\varphi(0)$，则(3)就是无穷延滞的泛函微分方程。

定理1（存在性）设Ω为$\mathbf{R}\times B$中的开集，则对任意$(t_0, \varphi)\in\Omega$，存在$NFDE(D, f, \Omega)$过(t_0, φ)的解。

证 任给$\alpha>0$，$\beta>0$，定义

$$A(\alpha, \beta)=\{y\in\mathscr{F}_{\alpha,0}(0);\ |y(t)|\leqslant\beta,\ t\in[0, \alpha]\}.$$

显然，$A(\alpha, \beta)$是$BC((-\infty, \alpha], \mathbf{R}^n)$（$(-\infty,\alpha]$上有界连续函数空间，在其上定义了上确界范数$\|\cdot\|$）中的有界闭凸子集。

取定φ的代表元$\bar\varphi$，定义

$$\hat\varphi(t)=\begin{cases}\bar\varphi(t), & t\leqslant0.\\ \bar\varphi(0), & t>0.\end{cases}$$

则 $\hat\varphi\in\mathscr{F}_{\infty,0}(\varphi)$，以$\tilde\varphi$表$\hat\varphi$之等价类。

根据f，D，D_φ，γ之连续性，存在(t_0,φ)的邻域$\mathscr{U}$，$\alpha_0>0$，$\beta_0>0$ $M>0$以及定义在$[0, \beta_0)$上的函数$\alpha_1(\beta)(\alpha_1(\beta)<\alpha_0)$使

$$|f(\sigma^*, \varphi^*)|\leqslant M,\quad (\sigma^*, \varphi^*)\in\mathscr{U},$$

且对$0\leqslant t\leqslant\alpha<\alpha_1(\beta)$，$0<\beta<\beta_0$，$\hat z\in A(\alpha, \beta)$，有

$$(t_0+t, \tilde\varphi_t+z_t)\in\mathscr{U},\quad M\alpha|A^{-1}(t_0+t, \tilde\varphi_t)|<\frac{\beta}{2},$$

$$|A^{-1}(t_0+t_1,\tilde\varphi_t)|\{|D(t_0, \varphi)-D(t_0+t,\tilde\varphi_t)|$$

$$+|D(t_0+t, \tilde\varphi_t)-D(t_0+t, \tilde\varphi_t+z_t)+D_\varphi(t_0+t,$$

$\tilde{\varphi}_t)z_t|\} < \dfrac{\beta}{4}$,

$$|A^{-1}(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t)|\ L(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t,\ z_t)|$$

$$\leqslant |A^{-1}(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t)|\gamma(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t,\ t)K_1(t)\sup_{0\leqslant\theta\leqslant t}|z(\theta)|$$

$$<\frac{\beta}{4}.$$

在 $A(\alpha,\ \beta)$上定义两个算子。对$\hat{z}\in A(\alpha,\ \beta)$，定义

$$S:\begin{cases} Sz(t)=0 & -\infty<t\leqslant 0\\ A(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t)(Sz)(t)=-L(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t,z_t) \\ \qquad +D(t_0,\ \varphi)-D(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t+z_t)+D_\varphi(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t)z_t, & 0\leqslant t\leqslant\alpha.\end{cases}$$

$$U:\begin{cases} U\hat{z}(t)=0, & -\infty<t\leqslant 0.\\ A(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t)(U\hat{z})(t)=\int_0^t f(t_0+s,\ \tilde{\varphi}_s+z_s)d_s, & 0\leqslant t\leqslant\alpha.\end{cases}$$

则当$0\leqslant t\leqslant\alpha<\alpha_1(\beta)$，$0<\beta<\beta_0$，$\hat{z}\in A(\alpha,\ \beta)$时，

$$\begin{aligned}|Sz(t)| &\leqslant |A^{-1}(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t)|\{|D(t_0,\ \varphi)\\ &\quad -D(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t)|+|L(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t,\ z_t)|\\ &\quad +|D(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t)-D(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t+z_t)\\ &\quad +D_\varphi(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t)z_t|\}\\ &<\beta/2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|U\hat{z}(t)| &\leqslant |A^{-1}(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t)|\left|\int_0^t f(t_0+s,\ \tilde{\varphi}_s+z_s)ds\right|\\ &\leqslant M\alpha|A^{-1}(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t)|<\beta/2.\end{aligned}$$

故$S+u$是$A(\alpha,\ \beta)$到自身的映射。

下面证明，对适当选取的α，β，S是压缩映射。

记

$$g(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t,\ z_t)=D(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t+z_t)$$

$$-D(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t)-D_\varphi(t_0+t,\tilde{\varphi}_t)z_t.$$

根据D_φ的连续性，任给$\varepsilon>0$，存在$\alpha(\varepsilon)$，$\beta(\varepsilon)>0$，$\beta(\varepsilon)<\beta_0$，$\alpha(\varepsilon)<\alpha_1(\beta(\varepsilon))$，使对$\hat{y}$，$\hat{z}\in A(\alpha,\ \beta)$，$t\in[0,\ \alpha]$，有

$$|g(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t,\ z_t)-g(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t,\ y_t)|\leqslant\varepsilon|y_t-z_t|_\beta.$$

则当$0<\beta\leqslant\beta(\varepsilon)<\beta_0$，$0<\alpha\leqslant\alpha(\varepsilon)<\alpha_1(\beta)<\alpha_0$时，

$$\begin{aligned}
&\|S_{\hat z}-S_{\hat y}\|\\
&\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant\alpha}\{|A^{-1}(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t)|[|L(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t,\ y_t-z_t)|\\
&\qquad+|g(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t,\ z_t)-g(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t,\ y_t)|]\}\\
&\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant\alpha}\{|A^{-1}(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t)|[\gamma(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t,\ t)\\
&\qquad+\varepsilon]|z_t-y_t|_\beta\}\\
&\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant\alpha}\{|A^{-1}(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t)|k_1(t)[\gamma(t_0+t,\tilde{\varphi}_t,\ t)\\
&\qquad+\varepsilon]\|z-y\|.
\end{aligned}$$

故存在$0<\beta_2<\beta_0$，定义于$[0,\ \beta_2]$上函数$\alpha_2(\beta)<\alpha_1(\beta)$及常数$k$：$0<k<1$，使当$0<\beta<\beta_2$，$0<\alpha<\alpha_2(\beta)$，$\hat{z}$，$\hat{y}\in A(\alpha,\beta)$时，$\|S_{\hat z}-S_{\hat y}\|\leqslant k\|\hat{z}-\hat{y}\|$。即$S$是压缩映射。

其次证明U在$A(\alpha,\ \beta)$上全连续。$(0<\alpha<\alpha_2,\ 0<\beta<\beta_2)$。

任给有界集$B\subseteq A(\alpha,\ \beta)$和$z\in B$，$0\leqslant t$，$\tau\leqslant\alpha$，有

$$\begin{aligned}
&|UZ(t)-Uz(\tau)|\\
&\leqslant|A^{-1}(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t)|\left|\int_\tau^t f(t_0+s,\ \tilde{\varphi}_s+z_s)ds\right|\\
&\quad+|A^{-1}(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t)-A^{-1}(t_0+\tau,\ \tilde{\varphi}_\tau)|\left|\int_0^\tau f(t_0\right.\\
&\quad\left.+s,\ \tilde{\varphi}_s+z_s)ds\right|\\
&\leqslant\frac{\beta}{2\alpha}|t-\tau|+M\alpha|A^{-1}(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t)-A^{-1}(t_0+\tau,\tilde{\varphi}_\tau)|.
\end{aligned}$$

因而，由Ascoli定理知任给有界集 $B\subseteq A(\alpha,\ \beta)$，$UB$是预紧集，

即U在$A(\alpha,\ \beta)$上全连续。

综上所述，$S+U$是$A(\alpha,\ \beta)$上α—压缩映射，根据Darbo定理，$S+U$在$A(\alpha,\ \beta)$上有不动点，因而积分方程

$$\begin{cases} D(t_0+t,\tilde{\varphi}_t+z_t)-D(t_0,\varphi)=\int_0^t f(t_0+s,\ \tilde{\varphi}_s+z_s)ds,\ t\geqslant 0 \\ z_0=0 \end{cases}$$

有解，则方程(3)过$(t_0,\ \varphi)$的解存在。证毕。

关于解的唯一性，我们叙述一个较弱的结论。

定理2（唯一性）若存在常数$L>0$使对$(t,\ \varphi)\in\Omega$，$(t,\psi)\in\Omega$，成立

$$|f(t,\ \varphi)-f(t,\ \psi)|\leqslant L|\varphi-\psi|_B,$$

则对任意$(t_0,\ \varphi)\in\Omega$，(3)过$(t_0,\ \varphi)$的解唯一。

证 只须证明$S+U$在$A(\alpha,\ \beta)$中有唯一不动点。设$\hat{z}_1,\hat{z}_2\in A(\alpha,\beta)$，使$\hat{z}_i=(S+U)\hat{z}_i(i=1,2)$。类似于定理1之证明可证存在常数$k_1\in(0,\ 1)$，使

$$\sup_{0\leqslant u\leqslant t}|S\hat{z}_1(u)-S\hat{z}_2(u)|$$

$$\leqslant k_1\sup_{0\leqslant u\leqslant t}|z_1(u)-z_2(u)|,$$

$$|U\hat{z}_1(t)-U\hat{z}_2(t)|$$

$$\leqslant|A^{-1}(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t)||\int_0^t[f(t_0+s,\ \tilde{\varphi}_s+z_s)$$

$$-f(t_0+s,\ \tilde{\varphi}_s+z_{2s})]ds|$$

$$\leqslant|A^{-1}(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t)|L\int_0^t|z_{1s}-z_{2s}|_B ds$$

$$\leqslant|A^{-1}(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t)|L\int_0^t k_1(s)\sup_{0\leqslant u\leqslant s}|z_1(u)-z_2(u)|ds$$

$$\leqslant L_1L\int_0^t\sup_{0\leqslant u\leqslant s}|z_1(u)-z_2(u)|du.$$

其中$L_1=\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|A^{-1}(t_0+t,\ \tilde{\varphi}_t)|\sup_{0\leqslant t\leqslant a}k_1(t)$，故

$$\sup_{0\leqslant u\leqslant t}|\hat{z}_1(u)-\hat{z}_2(u)|$$

$$\leqslant k_1\sup_{0\leqslant u\leqslant t}|\hat{z}_1(u)-\hat{z}_2(u)|+L_1L\int_0^t\sup_{0\leqslant u\leqslant s}|z_1(u)$$

$$-z_2(u)|ds,$$

从而

$$\sup_{0\leqslant u\leqslant t}|\hat{z}_1(u)-\hat{z}_2(u)|\leqslant\frac{LL_1}{1-k^1}\int_0^t\sup_{0\leqslant u\leqslant s}|z_1(u)-z_2(u)|ds.$$

根据Gronwall不等式，得 $\sup\limits_{0\leqslant u\leqslant t}|\hat{z}_1(u)-\hat{z}_2(u)|\equiv 0$，$t\in[0,\ a]$，故$\hat{z}_1\equiv\hat{z}_2$。证毕

定理3(连续依赖性)　设$\Omega\subseteq R\times B$为开集，$\Lambda^*$是另一个Banach空间中子集。$D$，$f:\Omega\times\Lambda^*\to R^n$满足

(i)　$f(t_0,\ \varphi,\ \lambda)$，$D(t_0,\ \varphi,\ \lambda)$，$D_\varphi(t_0,\varphi,\lambda)$关于$(t_0,\ \varphi,\ \lambda)\in\Omega\times\Lambda^*$连续；

(ii)　存在$\beta_0>0$和定义于$\Omega\times[0,\ \beta_0\times\Lambda^*$上连续函数$\gamma(t_0,\ \varphi,\ \beta,\ \lambda)$，使对$(t_0,\ \varphi,\ \lambda)\in\Omega\times\Lambda^*$，$\gamma(t_0,\ \varphi,\ 0,\ \lambda)=0$且

$$D_\varphi(t_0,\ \varphi,\ \lambda)\psi=A(t_0,\ \varphi,\ \lambda)\psi(0)$$
$$+L(t_0,\ \varphi,\ \psi,\ \lambda)$$

其中$A(t_0,\ \varphi,\ \lambda)$，$A^{-1}(t_0,\ \varphi,\ \lambda)$连续，$L(t_0,\ \varphi,\ \psi,\ \lambda)$关于$\psi$线性且对$\psi\in B$，若存在$\hat{\psi}\in\psi$，使$\hat{\psi}(\theta)=0$，$\theta\in(-\infty,\ -\beta)$，$\beta\leqslant\beta_0$，则

$$|L(t_0,\ \varphi,\ \psi,\ \lambda)|\leqslant\gamma(t_0,\ \varphi,\ \beta,\ \lambda)|\psi|_B,$$

(iii)　存在NFDE$(D(\cdot,\ \lambda_0),\ f(0,\ \lambda_0),\ \Omega)$过$(t_0,\ \varphi_0)\in\Omega$的唯一解，定义于$(-\infty,\ \delta)$上。

则对任意$b<\delta$，存在$(t_0,\ \varphi_0,\ \lambda_0)$的邻域$N(t_0,\ \varphi_0,\ \lambda_0)$，使对$(t_0',\ \varphi',\ \lambda')\in N(t_0,\ \varphi_0,\ \lambda_0)$，$NFDE(D(\cdot,\ \lambda'),\ f(\cdot,\ \lambda'),\ \Omega)$过$(t_0',\ \varphi')$的解于$(-\infty,b]$上存在且$x(t,\ t_0',\ \varphi',\ \lambda')$关于所有变元连续。

证　类似于定理1的证明，可证存在$\alpha>0$，$\beta>0$，(t_0,φ_0)

的邻域$N(t_0, \varphi_0)$和λ_0的邻域$O(\lambda_0)$，使得对$(t_0', \varphi', \lambda') \in N(\sigma_0, \varphi_0) \times (O(\lambda_0) \cap \Lambda^*)$，$x(t; t_0', \varphi', \lambda')$于$(-\infty, t_0+\alpha]$上存在且$S(t_0', \varphi', \lambda') + U(t_0', \varphi', \lambda'): A(\alpha, \beta) \to A(\alpha, \beta)$。($U(t_0', \varphi', \lambda')$与$S(t_0', \varphi', \lambda')$的定义类似于定理1证明中的$S$, U)

容易证明对$\Lambda = N(\sigma_0, \varphi_0) \times (\Lambda^* \cap O(\lambda_0))$，$\Gamma = A(\alpha, \beta)$，第一节的推论2之所有条件均成立，故在$[t_0', t_0'+\alpha]$上，NFDE($D(\cdot, \lambda')$, $f(\cdot, \lambda')$, Ω)过(t_0', φ')的解关于所有变元连续。

根据$\{(t, x_t(t_0, \varphi_0, \lambda_0)); t \in [t_0, b]\}$的紧性，应用有限覆盖定理，即可证明此定理。证毕。

§4 无穷延滞NFDE的解的延展性

定理1(延展性) 设$\Omega \subseteq \mathbf{R} \times B$为开集，$D$，$f$满足：若$W$为$\Omega$中有界闭集且存在$W$的$\delta$—邻域$O(W, \delta) \subseteq \Omega$，则$f$把$W$映为$\mathbf{R}^n$中有界集，$D(t, \varphi)$，$D_\varphi(t, \varphi)$在$W$上一致连续且

$$D_\varphi(t, \varphi)\psi = A(t, \varphi)\psi(0) + L(t, \varphi, \psi).$$

其中$(t, \varphi) \in W$时，$|A^{-1}(t, \varphi)| \leqslant N \equiv$常数，$L$满足

(γ_2) 存在$s_0 > 0$，使当$\psi \in F_s$，t_1，$s \in [0, s_0]$时，

$$|L(t, \varphi, \psi_{s+t_1})| \leqslant r(t, \varphi, s) \sup_{t_1 \leqslant \theta \leqslant t_1+s} |\psi(\theta)| + N_1(t, \varphi, s)|\psi_{t_1}|_B.$$

其中$\gamma(t, \varphi, s)$连续，且当$s \to 0$时，$\gamma(t, \varphi, s)$关于$(t, \varphi) \in W$一致趋于零，对$(t, \varphi) \in W$，$0 \leqslant s \leqslant s_0$，$N_1(t, \varphi, s) \leqslant N_1(s)$。若$x$是$NFDE(D, f, \Omega)$过$(t_0, \varphi)$且定义于$(-\infty, b)$上不可延展解，则存在序列$t_n \to b^-(n \to \infty)$，使$(t_n, x_{t_n}) \notin W$。

证 只须证明存在$t' \in [t_0, b)$，使$(t', x_{t'}) \notin W$。不妨设$b < +\infty$。设$V = \{(t, x_t); t \in [t_0, b)\}$。显然，若$V$是无界集，或虽为有界集但无$\delta$—邻域在$\Omega$中，则定理得证。因此，只须证明$V$不可能是有界集且其一个邻域仍在$\Omega$中。

假若不然，有界集V有一个β—邻域在Ω中，则$x(t)$于$[t_0, b)$

上不一致连续。否则，补充定义$x(b)=\lim\limits_{t\to b^-}x(t)$后，$x(t)$于$[t_0,$ $b]$上连续。由(β_2)知当$t\to b^-$时，$(t,\ x_t)\to(b,\ x_b)$，因而$(b,x_b)\in$ Ω，由上节定理1知$x(t)$可以延拓出b，这与定理假设矛盾。

设在$O(V,\ \frac{\beta}{2})$上，$|A^{-1}|\leqslant N$。存在$s_0>0$，使当$s\in[0,\ s_0]$时，

$$|N_1(t,\ \varphi,\ s)|\leqslant N_1(s),\quad (t,\varphi)\in O\left(V,\ \frac{\beta}{2}\right). \qquad (1)$$

$$\gamma(t,\ \varphi,\ s)<\frac{1}{7N},\qquad (t,\ \varphi)\in O\left(V,\ \frac{\beta}{2}\right). \qquad (2)$$

存在$\varepsilon_0>0$，$t_k\in[b-s,\ b]$，$\Delta_k>0$，$\Delta_k\to 0$（当$k\to\infty$时）使

$$|x(t_k)-x(t_k-\Delta_k)|\geqslant\varepsilon_0\quad (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots). \qquad (3)$$

记 $s_k=\inf\{t\in[b-s,\ b];\ |x(t)-x(t-\Delta k)|$
$\geqslant\min(\beta^*,\ \varepsilon_0)\}$。

其中

$$k^*_1=\sup_{0\leqslant\theta\leqslant b-t_0}k_1(\theta),\ M^*_1=\sup_{0\leqslant\theta\leqslant b-t_0}M_1(s),\ \beta^*=\frac{\beta}{4k^*_1}. \qquad (4)$$

根据$x(t)$于$[t_0,\ b)$的闭子集上的一致连续性及$D(t,\ \varphi)$于$O(V,\ \beta)$上的一致连续性，对

$$\varepsilon_1<\min\left\{\frac{\min\{\beta^*,\ \varepsilon_0\}}{7NN_1(s)k_1^*},\ \frac{\min\{\beta^*,\ \varepsilon_0\}}{2},\ \frac{\min\{\beta^*,\ \varepsilon_0\}}{7N}\right\} \qquad (5)$$

存在Δ^*，$\Delta^{**}>0$，使对$t'\in[t_0,b-\frac{s}{2}]$，$t'<t''<t'+\Delta^*$，

$$|x(t')-x(t'')|<\varepsilon_1, \qquad (6)$$

且对$(t',\ \varphi')$，$(t'',\ \varphi')\in O(V,\ \beta)$，$|t'-t''|<\Delta^{**}$，有

$$|D(t', \varphi') - D(t'', \varphi')| < \varepsilon. \tag{7}$$

选$L_1 > 0$，使当$k \geq L_1$时，$\Delta_k < \min\{\Delta^*, \Delta^{**}, \frac{s}{2}\}$且

$$M_1^* |x_{t_0+\Delta_k} - x_{t_0}|_B < \frac{\beta}{4}. \tag{8}$$

因而
$$\begin{aligned}
&|x_{s_k} - x_{s_k-\Delta_k}|_B \\
&\leq k_1(s_k - \Delta_k - t_0) \sup_{-(s_k-\Delta_k-t_0)\leq\theta\leq 0} |x(s_k+\theta) - x(s_k - \Delta_k + \theta)| \\
&\quad + M_1(s_k - \Delta_k - t_0)|x_{t_0+\Delta_k} - x_{t_0}|_B \\
&\leq k_1^* \min\{\beta^*, \varepsilon_0\} + \frac{\beta}{4} \\
&\leq \frac{\beta}{2}.
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&|L(s_k, x_{s_k}, x_{s_k} - x_{s_k-\Delta_k})| \\
&\leq r(s_k, x_{s_k}, s) \sup_{-s\leq\theta\leq 0} |x(s_k+\theta) - x(s_k - \Delta_k + \theta)| \\
&\quad + N_1(s)|x_{s_k-s} - x_{s_k-\Delta_k-s}|_B \\
&\leq \frac{1}{7N}\min\{\beta^*, \varepsilon_0\} \\
&\quad + N_1(s)k_1^* \sup_{t_0\leq\theta\leq s_k-\Delta_k-s} |x(\theta+\Delta_k) - x(\theta)| \\
&\quad + N_1(s)M_1^*|x_{t_0+\Delta_k} - x_{t_0}|_B \\
&\leq \frac{\min\{\beta^*, \varepsilon_0\}}{7N} + N_1(s)k_1^*\varepsilon_1 + N_1(s)M_1^*|x_{t_0+\Delta k} - x_{t_0}|_B.
\end{aligned} \tag{10}$$

记
$$\begin{aligned}
&g(s_k, x_{s_k}, x_{s_k-\Delta_k}) \\
&= D(s_k, x_{s_k}) - D(s_k, x_{s_k-\Delta_k}) \\
&\quad - D_\varphi(s_k, x_{s_k})(x_{s_k} - x_{s_k-\Delta_k}).
\end{aligned}$$

根据D_φ于$O\left(V, \frac{\beta}{2}\right)$上的一致连续性及(9)式知存在非负连续

函数$\sigma(\beta)$，$\sigma(0)=0$，使

$$|g(s_k, x_{s_k}, x_{s_k-\Delta_k})|$$
$$\leqslant \sigma(\beta)|x_{s_k}-x_{s_k-\Delta_k}|_B$$
$$\leqslant \sigma(\beta)k_1^*\min\{\beta^*, \varepsilon_0\}+\sigma(\beta)M_1^*|x_{t_0+\Delta_k}-x_{t_0}|_B. \tag{11}$$

由于 $D(s_k, x_{s_k})-D(s_k-\Delta_k, x_{s_k-\Delta_k})$

$$=D(s_k, x_{s_k-1_k})-D(s_k-\Delta_k, x_{s_k-\Delta_k})$$
$$+g(s_k, x_{s_k}, x_{s_k-\Delta_k})$$
$$+A(s_k, x_{s_g})[x(s_k)-x(s_k-\Delta_k)]$$
$$+L(s_k, x_{s_k}, x_{s_k}-x_{s_k-\Delta_k}),$$

又 $$|D(s_k, x_{s_k})-D(s_k-\Delta_k, x_{s_k-\Delta_k})|$$
$$\leqslant L^*{}_{\prime k}.$$

其中 $L^*=\sup\limits_{(t,\varphi)\in V}|f(t, \varphi)|<+\infty$.

根据(5)，(7)，(10)，(11)知当$k\geqslant L_1$时

$$|x(s_k)-x(s_k-\Delta_k)|$$
$$\leqslant|A^{-1}(s_k, x_{s_k})|[|D(s_k, x_{s_k})$$
$$-D(s_k-\Delta_k, x_{s_k-\Delta k})|+|D(s_k, x_{s_k-\Delta k})$$
$$-D(s_k-\Delta_k, x_{s_k-\Delta_k})|+|g(s_k, x_{s_k}, x_{s_k-\Delta_k})|$$
$$+|L(s_k, x_{s_k}, x_{s_k}-x_{s_k-\Delta_k})|]$$
$$\leqslant N[L^*\Delta_k+\varepsilon_1+\sigma(\beta)k_1^*\min\{\beta^*, \varepsilon_0\}$$
$$+\sigma(\beta)M_1^*|x_{t_0+\Delta_k}-x_{t_0}|_B$$
$$+\frac{1}{7N}\min\{\beta^*, \varepsilon_0\}+N_1(s)k_1^*\varepsilon_1$$
$$+N_1(s)M_1^*|x_{t_0+\Delta_k}-x_{t_0}|_B].$$

选$L_2>0$，使当$k\geqslant L_2$时

$$\begin{cases} L^*\Delta_k<\dfrac{1}{7N}\min\{\beta^*,\ \varepsilon_0\}, \\ N_1(s)M_1^*|x_{t_i+\Delta_k}-x_{t_i}|_B<\dfrac{1}{7N}\min\{\beta^*,\ \varepsilon_0\}. \end{cases}$$

选$\beta_0^*>0$，$L_3>0$，使当$\beta\leqslant\beta_0^*$，$k\geqslant L_3$时

$$\begin{cases} \sigma(\beta)M_1^*|x_{t_i+\Delta_k}-x_{t_i}|_B<\dfrac{1}{7N}\min\{\beta^*,\ \varepsilon_0\}, \\ \sigma(\beta)<\dfrac{1}{7Nk_1^*}. \end{cases}$$

故当$k\geqslant\max\{L_1,\ L_2,\ L_3\}$，$\beta<\beta_0^*$时，

$$|x(s_k)-x(s_k-\Delta_k)|<\min\{\beta^*,\ \varepsilon_0\}.$$

这与s_k的定义矛盾。

总之，V不可能是Ω中有界闭集且有一个δ—邻域在Ω中。证毕

引理1 对$A>0$，$C>0$，定义

$$F_{A,0}^C=\{x\in F_{A,0};\ |x(t)|\leqslant C,\ t\in[0,\ A]\},$$

若$G\subseteq F_{A,0}^C$，使$\{x_0;\ x\in G\}$为B中紧集，$x(t)$，$x\in G$，关于$t\in[0,\ A]$等度连续，则$\Gamma_0=\{x_t;\ x\in G,\ t\in[0,\ A]\}$为$B$中预紧集且关于$t\in[0,\ A]$等度连续。

证 任取序列$\{x_{t_k}^k;\ t_k\in[0,\ A],\ x^k\in G\}$。由于$\{x_0^k;\ x^k\in G\}$含于$B$中紧集$\{x_0;\ x\in G\}$中，$x^k(t)$于$[0,A]$上等度连续，$|x^k(t)|\leqslant C$，我们不妨设$t_k\to\sigma\in[0,\ A]$，$x_0^k\to\varphi$，$x^k(t)\to x^0(t)$（在$[0,\ A]$上一致地成立）(如有必要，致一个子序列以实现之)。由(β_1)知$\varphi(0)=x^0(0)$。

定义

$$x(t)=\begin{cases} x^0(t), & 0<t\leqslant A, \\ \varphi(t), & t\leqslant 0. \end{cases}$$

由(β_3)得

$$|x_t^k-x_t|_B \leqslant k_1(t)\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|x^k(s)-x^0(s)|+M_1(t)|x_0^k-\varphi|_B.$$

因此，对给定的$\varepsilon>0$，可以找到N_1，使

$|x^k_t - x_t|_B < \varepsilon/2$，当$t\in[0,\ A]$，$k\geqslant N_1$时。

另一方面，由于x_t于$[0,\ A]$上连续，故存在$\delta>0$，使

$|x_t - x_s|_B < \varepsilon/2$，当$|t-s|<\delta$，$t, s\in[0,\ A]$。

选取N_2，使

$|t_k - \sigma| < \delta$，当$k\geqslant N_2$时。

故当$k\geqslant \max\{N_1,\ N_2\}$时，有

$$|x^k_{t_k} - x_\sigma|_B \leqslant |x^k_{t_k} - x_{t_k}|_B + |x_{t_k} - x_\sigma|_B < \varepsilon.$$

故Γ_0为B中预紧集。

再证第二部分。考虑函数$(\varphi)\in F_{\infty,0}(\varphi)$，其定义为

$(\varphi)(t) = \varphi(0)$，$t\geqslant 0$。

由(β_3)得

$$\begin{aligned}
&|(\varphi)_t - (\psi)_t|_B \\
&\leqslant k_1(t)|\varphi(0)-\psi(0)| + M_1(t)|\varphi-\psi|_B \\
&\leqslant \{k_1(t)k + M_1(t)\}|\varphi-\psi|_B;
\end{aligned}$$

即$(\varphi)_t$关于φ满足局部Lipschitz条件。因为$(\varphi)_t$关于t连续，故$(\varphi)_t$关于$(t,\ \varphi)$连续。由于Γ_0是预紧集，，故对任给$\varepsilon>0$，存在$\delta(\varepsilon)>0$，使当$\varphi\in\Gamma_0$，$0\leqslant t$，$s\leqslant A$，$|t-s|<\delta(\varepsilon)$时，$|(\varphi)_t - (\varphi)_s|_B<\varepsilon$。因此，若$s\leqslant t< s+\delta(\varepsilon)$，则

$$\begin{aligned}
&|x_t - x_s|_B \\
&\leqslant |(x_s)_{t-s} - x_s|_B + |x_t - (x_s)_{t-s}|_B \\
&\leqslant \varepsilon + k_1(t-s)\sup_{s\leqslant r\leqslant t}|x(r)-x(s)|,
\end{aligned}$$

故由$\{x(t): x\in G\}$关于$t\in[0,\ A]$之等度连续性知$\{x_t: x\in G\}$关于$t\in[0,\ A]$等度连续。证毕。

下面我们对一类具体方程给出较好的延展性质。

设Ω是$\mathbf{R}\times B$中开集，$f\in C(\Omega,\ \mathbf{R}^n)$，$D(t,\ \varphi)=\varphi(0)-T(t)\varphi$，$T(t)$是一族有界线性算子（$t\in\mathbf{R}$），当$t\to t_0\in\mathbf{R}$时，$\|T(t)-T(t_0)\|\to 0$（其中$\|\cdot\|$表算子范数）。

若存在连续映射r，$N: \mathbf{R}\times R^l\to R^l$，$r(t,\ 0)=0$，$t\in\mathbf{R}$，使对任给$\alpha\geqslant 0$，$t_0\in\mathbf{R}$及$\varphi\in F_{\alpha,t_0}$，成立

$$|T(t)\varphi_{\alpha+t_0}| \leqslant r(t,\ \alpha) \sup_{t_0 \leqslant \theta \leqslant t_0+\alpha} |\varphi(\theta)| + N(t,\ \alpha)|\varphi_{t_0}|_B, \tag{12}$$

则称方程

$$\frac{d}{dt}D(t,\ x_t) = f(t,\ x_t). \tag{13}$$

为拟线性中立型泛函微分方程，记为$QLNFDE(D,\ f,\ \Omega)$。

定理2 设相空间B满足

(β_4) 若$\psi_{t_0} \in B$，ψ于$[t_0,\ t_0+\alpha)$上连续且存在常数$M>0$及序列$\alpha_k \to (t_0+\alpha)^-$($k\to\infty$时)，使$|\psi_{\alpha_k}|_B \leqslant M$对一切$k=1,\ 2,\ \cdots$成立，则存在常数$L>0$，使在$[t_0,\ t_0+\alpha)$上恒有$|\psi(t)| \leqslant L$。

若$x(t)$是QLNFDE$(D,\ f,\ \Omega)$过$(t_0,\ \varphi)\in\Omega$定义于$(-\infty,\delta)$上的不可延拓解，则对任意紧集$W\subseteq\Omega$，存在t_W，使当$t_W \leqslant t < \delta$时，$(t,\ x_t)\notin W$。

证 假若不然，则存在某个紧集$W\subseteq\Omega$及序列$t_k\to\delta^-$使$(t_k,\ x_{t_k})\in W$，$k=1,\ 2,\ \cdots$。则$\delta<+\infty$且由(β_4)知存在常数C，使当$t\in[t_0,\ \delta)$时，$|x(t)|<C$、W是紧集，因而可设$(t_k,\ x_{t_k})\to(\delta,\ \varphi)\in W\subseteq\Omega$，($k\to\infty$时)且存在$\varepsilon_0>0$，$M>0$，使当$(s,\ \psi)\in O(W,\ \varepsilon_0)$时，$|f(s,\ \psi)|\leqslant M$。

假若可以证明当$t\to\delta^-$时，x_t收敛于φ，则显然$x(t)$可延拓出δ，这与定理的假设矛盾。所以，我们可设存在序列$\{t_k'\}$及$\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0)$，使当$k=1,\ 2,\ \cdots$时，$t_k<t_k'$且

$$\begin{cases} |x_{t_k} - x_{t_k'}| = \varepsilon, \\ |x_t - x_{t_k}|_B < \varepsilon, \quad t_k \leqslant t < t_k'. \end{cases}$$

定义x^k如下

$$x^k(t) = \begin{cases} x(t+t_k), & t \leqslant t_k' - t_k, \\ x(t_k'), & t > t_k' - t_k. \end{cases}$$

显然$x^k\in F^C_{\infty,0}$，作$G=\{\overline{\varphi}\}\cup\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} x^k\right)$，其中$\overline{\overline{\varphi}}(t)=\varphi(t)$，

$t\leqslant 0$时，而当$t>0$时，$\varphi(t)=\varphi(0)$，则显然$\{x_0;\ x\in G\}=\{\varphi\}\cup\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}x_{t_k}\right)$为$B$中紧集。我们要证$x^k(t)$关于$t\geqslant 0$等度连续。假若不然，则有$\varepsilon_1>0$，$\{t_{1k}\}$，$\{t_{2k}\}$，使$t_k\leqslant t_{1k}<t_{2k}\leqslant t_k'$且

$$|x(t_{1k})-x(t_{2k})|\geqslant\varepsilon_1.$$

但是

$$\begin{aligned}
&|x(t_{1k})-x(t_{2k})|\\
&\leqslant\left|\int_{t_{1k}}^{t_{2k}}f(s,\ x_s)ds\right|+|T(t_{1k})x_{t_{1k}}-T(t_{2k})x_{t_{1k}}|\\
&\leqslant M(t_{2k}-t_{1k})+r(t_{1k},\ s)\sup_{-s\leqslant\theta\leqslant 0}|x(t_{1k}+\theta)\\
&\quad-x(t_{2k}+\theta)|+N(t_{1k},\ s)|x_{t_{1k}-s}-x_{t_{2k}-s}|_B\\
&\quad+\|T(t_{1k})-T(t_{2k})\|[|x_{t_k}|_B+\varepsilon]\\
&\leqslant M(t_k'-t_k)+\|T(t_{1k})-T(t_{2k})\|[C_1+\varepsilon]\\
&\quad+r(t_{1k},\ s)\sup_{-s\leqslant\theta\leqslant 0}|x(t_{1k}+\theta)-x(t_{2k}+\theta)|\\
&\quad+N(t_{1k},\ s)|x_{t_{1k}-s}-x_{t_{2k}-s}|_B.
\end{aligned}$$

其中$C_1=\sup\{|\varphi|_B;\ 存在t\in R,\ 使(t,\ \varphi)\in W\}$。

给定$s>0$，使当$t\in[t_0,\ \delta]$时，$|r(t,\ s)|<\dfrac{\varepsilon_1}{\delta C}$。因为$x_t$在$\delta-s$处连续，故存在$N_1>0$，使当$k\geqslant N_1$时，

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\delta}N(t,\ s)|x_{t_{1k}-s}-x_{t_{2k}-s}|_B<\frac{\varepsilon_1}{4}.$$

不妨设当$k\geqslant N_1$时，下面两式成立

$$M[t_k'-t_k]<\frac{\varepsilon_1}{4},$$

$$\|T(t_{1k})-T(t_{2k})\|<\frac{\varepsilon_1}{4(C_1+\varepsilon)}.$$

故当$k\geqslant N_1$时，$|x(t_{1k})-x(t_{2k})|<\varepsilon_1$。这与$t_{1k}$，$t_{2k}$的定义矛盾。因而$x^k(t)$关于$t\geqslant 0$等度连续。根据引理1，$x_t^k$关于$t\in[0,1]$

等度连续，因而

$$|x_0^k - x_{t_k'-t_k}^k|_B = |x_{t_k} - x_{t_k'}|_B \to 0 \quad (k\to\infty\text{时})$$

这与$|x_{t_k} - x_{t_k'}|_B = \varepsilon(k=1, 2, \cdots)$ 矛盾。矛盾说明证明过程中最初的假设不真，因而定理得证

定理3 在定理2的假设下，若 $\Omega = \boldsymbol{R}\times B$且$f$把$\Omega$中有界集映为 $\boldsymbol{R}^n$ 中有界集，则对 Ω 中任意有界闭集 W，存在 $t_W<\delta$，使当$t_W\leqslant t<\delta$时，$(t, x_t)\notin W$。

证 假若不然，则存在序列$t_k\to\delta^-(k\to\infty$时)，使对一切$k$，$(t_k, x_{t_k})\in W$，则 $\delta<+\infty$ 且存在常数 C，使$|x(t)|\leqslant C$， 其中$t\in[t_0, \delta)$。

则对$t\in[t_0, \delta)$，有

$$|x_t|_B\leqslant k_1(t-t_0)C+M_1(t-t_0)|x_{t_0}|_B,$$

故 $\{(t, x_t): t_0\leqslant t<\delta\}$ 为Ω中有界集。由定理1知存在$t_W<\delta$，使$(t_W, x_{t_W})\notin Cl\{(t, x_t); t_0\leqslant t<\delta\}$。显然这是个矛盾。 证毕。

第六章

有界滞量RFDE的解的有界性与稳定性

在本章中，主要讨论有界滞量的滞后型泛函微分方程

$$\dot{x}(t)=f(t,\ x_t) \tag{1}$$

的有界性与稳定性，其中 $f:\mathbf{R}\times C\to\mathbf{R}^n$ 为连续，并且对任一初值 (t_0,φ)，我们总假定方程(1)过 (t_0,φ) 的解 $x(t_0,\varphi)$ 在 $[t_0-r,\infty)$ 上存在。

§1 解的有界性与稳定性的定义

定义 1 对于 $(t_0,\ \varphi)\in\mathbf{R}\times C$，如果存在 $M=M(t_0,\ \varphi)$，使得方程(1)的解 $x(t_0,\ \varphi)$ 当 $t\geqslant t_0-r$ 时满足 $|x(t_0,\varphi)(t)|<M$。则称解 $x(t_0,\varphi)$ 为有界。

定义 2 对任何的 $H>0$ 及 $t_0\in\mathbf{R}$，如果存在 $M=M(t_0,H)$，使得当 $\|\varphi\|<H$ 时对一切 $t\geqslant t_0$ 有 $|x(t_0,\varphi)(t)|<M$，则称解 $x(t_0,\varphi)$ 是等度有界的。

定义 3 如果定义 2 中的 M 与 t_0 无关，则称方程(1)的解是一致有界的。

定义 4 如果存在常数 $M>0$，使得对任何的 $(t_0,\varphi)\in\mathbf{R}\times C$，总有常数 $T=T(t_0,\varphi)>0$ 存在，当 $t\geqslant t_0+T$ 时就有 $|x(t_0,\varphi)(t)|<M$，则称方程(1)的解是最终有界的。

定义 5 如果存在常数$M>0$，且对应于$H>0$及$t_0\in\mathbf{R}$，存在$T=T(t_0, H)>0$，使得当$\|\varphi\|\leqslant H$时对一切的$t\geqslant t_0+T$都有$|x(t_0,\varphi)(t)|<M$，则称方程(1)的解为等度最终有界。

定义 6 如果定义 5 中的T与t_0无关，则称方程(1)的解为一致最终有界。

定义 7 设对一切$t\in\mathbf{R}$，$f(t,0)\equiv 0$。如果对任何的$t_0\in\mathbf{R}$及任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$，使得当$\|\varphi\|<\delta$时就有$|x(t_0,\varphi)(t)|<\varepsilon$对$t\geqslant t_0$时成立，则称方程(1)的零解是稳定的。

定义 8 如果定义7中的δ与t_0无关，则称方程(1)的零解是一致稳定的。

定义 9 如果方程(1)的零解为稳定，且对任意的$t_0\in\mathbf{R}$，存在$b_0=b_0(t_0)$，使得当$\|\varphi\|\leqslant b_0$时有$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t_0,\varphi)(t)=0$，则称方程(1)的零解是渐近稳定的。

定义10 对任意的$\varepsilon>0$和任何的$t_0\in\mathbf{R}$，如果存在$\delta_0=\delta_0(t_0)>0$和$T=T(t_0,\varepsilon)>0$，使得当$\|\varphi\|<\delta_0$时对一切$t\geqslant t_0+T$都有$|x(t_0,\varphi)(t)|<\varepsilon$，则称方程(1)的零解是拟等度渐近稳定的。

定义11 如果方程(1)的零解为稳定且拟等度渐近稳定，则称它是等度渐近稳定的。

定义12 如果定义10中的δ_0和T与t_0无关，则称方程(1)的零解是拟一致渐近稳定的。

定义13 如果方程(1)的零解是一致稳定和拟一致渐近稳定的，则称它是一致渐近稳定的。

定义14 如果存在$\alpha>0$，且对任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta(\varepsilon)>0$，使得当$\|\varphi\|<\delta(\varepsilon)$时对一切$t\geqslant t_0$，都有

$$|x(t_0,\varphi)(t)|\leqslant\varepsilon\exp[-\alpha(t-t_0)],$$

则称方程(1)的零解是指数渐近稳定的。

设 $\bar{x}(t)$是方程(1)的一个解，如果方程

$$\dot{z}(t)=f(t,z_t+\bar{x}_t)-f(t,\bar{x}_t)$$

的解$z=0$为稳定，则称方程(1) 的解$\bar{x}(t)$为稳定。$\bar{x}(t)$的一致稳定、渐近稳定、一致渐近稳定等定义可类似地给出。

值得注意的是，泛函微分方程的稳定性定义实际上比常微分方程的稳定性定义加强了。在方程的解存在且唯一的前提下，常微分方程的零解如果在t_0处稳定，则在$t_1>t_0$处也一定稳定。但泛函微分方程则不一定成立。例如纯量方程

$$\dot{x}(t)=b(t)x\left(t-\frac{3\pi}{2}\right).$$

其中

$$b(t)=\begin{cases}g(t), & t\leqslant 0;\\ 0, & 0\leqslant t\leqslant\frac{3\pi}{2};\\ -\cos t, & \frac{3\pi}{2}\leqslant t\leqslant 3\pi;\\ 1, & t\geqslant 3\pi.\end{cases}$$

$g(t)$ 为连续函数，当 $t_0=0$及$\varphi\in C\left(\left[-\frac{3\pi}{2},0\right],\mathbf{R}\right)$时有解

$$x(t)=\begin{cases}\varphi(0), & 0\leqslant t\leqslant\frac{3\pi}{2};\\ (-\sin t)\varphi(0), & t\geqslant\frac{3\pi}{2}.\end{cases}$$

因此，零解在$t_0=0$处是稳定的，但对任何$t_1>3\pi$，方程化为

$$\dot{x}(t)=x\left(t-\frac{3\pi}{2}\right),\quad t\geqslant 3\pi.$$

它有解为

$$x(t)=ae^{\lambda_0 t},$$

其中 a 为任意常数，$\lambda_0>0$ 是满足 $\lambda=e^{-\frac{3\pi}{2}\lambda}$ 的解。因此，零解对任何$t_1>3\pi$是不稳定的。

这种现象对实际应用上是很不方便的，所以我们只好加强稳定性的定义，即要求零解的稳定等价于每一个时刻的零解都稳定。

对于泛函微分方程稳定性的研究，李雅普诺夫第二方法仍然是最重要的工具。其中有两种较重要的思想方法，一种是利用李雅普诺夫泛函，另一种是利用李雅普诺夫函数以及一种所谓拉什密辛（Разумйхйн）条件。但作者之一在文〔43〕〔44〕中将拉什密辛条件引入李雅普诺夫泛函之中从而把这两种思想方法统一起来。

§2 稳定性的李雅普诺夫泛函方法

现考虑 RFDE

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t), \tag{1}$$

其中$f:\mathbf{R}^+\times C\to\mathbf{R}^n$为连续，$f(t,0)\equiv 0$。

设泛函$V:\mathbf{R}^+\times C\to\mathbf{R}^+$为连续，它沿(1)的解的右上导数定义为

$$\dot{V}(t,\phi)=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}\{V(t+h,x_{t+h}(t,\phi))-V(t,\phi)\}.$$

又设u、v、$w:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$为连续非减函数，当$s>0$时$u(s)>0$，$v(s)>0$，$w(s)>0$，$u(0)=v(0)=0$。

定理 1 若存在上述的函数满足下列条件：

(i) 对任何的$t\geqslant 0$及$\phi\in C$，有

$$u(|\phi(0)|)\leqslant V(t,\phi)\leqslant v(\|\phi\|);$$

(ii) 对任何的$t_0\geqslant 0$及$\varphi\in C$，存在$r_0\in(0,r]$以及$\lambda\geqslant 1$，使得当$t\in[t_0,t_0+r_0)$且$V(t,x_t(t_0,\varphi))\geqslant\lambda v(\|\varphi\|)$，$V(t,x_t(t_0,\varphi))\geqslant V(\xi,x_\xi(t_0,\varphi))$，$t_0\leqslant\xi\leqslant t$时及当$t\geqslant t_0+r_0$且$V(t,x_t(t_0,\varphi))\geqslant V(\xi,x_\xi(t_0,\varphi))$，$t_0\leqslant\xi\leqslant t$时，有

$$\dot{V}(t,x_t(t_0,\varphi))\leqslant G(t,V(t,x_t(t_0,\varphi))),$$

其中$G:\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$为连续，$G(t,0)\equiv 0$。

(iii) 方程

$$\dot{y}(t)=G(t,y(t)) \tag{2}$$

的零解为一致稳定。

则方程(1) 的零解为一致稳定。

证 记方程(2)过(t_0,y_0)的最大右行解为$y(t)$，又将$x_t(t_0,\varphi)$ 和 $x(t_0,\varphi)(t)$ 分别简记为 x_t 和 $x(t)$。

现取 $\delta>0$ 满足 $\lambda v(\delta)<y_0$（这里取 $y_0>0$）。下面证明当$\|\varphi\|<\delta$ 时，有

$$V(t,x_t)<y(t), \quad t\geqslant t_0. \tag{3}$$

由于 $V(t_0,\varphi)\leqslant v(\|\varphi\|)\leqslant v(\delta)<y_0$，再根据条件（ii）即知当 $t\in[t_0,t_0+r_0)$ 时有

$$V(t,x_t)<y(t) \text{ 而且 } V(t_0+r_0,\ x_{t_0+r_0})<y(t_0+r_0).$$

因此，若（3）不成立，则必存在 $T>t_0+r_0$，使得

$$V(T,x_T)=y(T),$$

并且满足 (*a*) $V(T,x_T)\geqslant V(t,x_t)$，$t_0\leqslant t\leqslant T$，

(*b*) $\dot{V}(T,x_T)>\dot{y}(T)$。

由（*a*）及条件（ii）知

$$\dot{V}(T,x_T)\leqslant G(T,V(T,x_T))=G(T,y(T))=\dot{y}(T).$$

这与（*b*）矛盾，故（3）成立。

根据方程（2）的零解的一致稳定性，对任一$\varepsilon>0$，存在$\bar{\delta}>0$，使得当$y_0<\bar{\delta}$时有$y(t)<u(\varepsilon)$，$t\geqslant t_0$，从而当$\|\varphi\|<\delta$时有$V(t,x_t)<u(\varepsilon)$，$t\geqslant t_0$，由条件(i) 便得当$\|\varphi\|<\delta$时有$|x(t)|<\varepsilon$对一切$t\geqslant t_0$成立。**证毕**

下面我们对定理 1 给出较为具体的表达。

设函数 $h(t)$、$H(V)$ 均为将$\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$的连续函数，当 $V>0$时$H(V)>0$，$H(0)=0$，并且满足

$$\int^{\infty}h(t)dt<\infty, \quad \int_0^a\frac{dV}{H(V)}=\infty, \quad (a>0).$$

可以证明，方程 $\dot{y}(t)=h(t)H(y(t))$ 的零解为一致稳定。事实上，对任给 $\varepsilon>0$，可选 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 且 $\delta<\varepsilon$，使得

$$\int_{t}^{\infty} h(t)dt = \int_{0}^{\varepsilon} \frac{dV}{H(V)}.$$

设 $y(t)$ 为方程 $\dot{y}(t)=h(t)H(y(t))$ 过 (t_0, y_0) 的一个解，其中 $y_0>0$。则当 $y_0\leqslant\delta$ 时有

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{dV}{H(V)} = \int_{t_0}^{t} h(s)ds \leqslant \int_{t_1}^{\infty} h(s)ds$$

$$= \int_{0}^{\varepsilon} \frac{dV}{H(V)} \leqslant \int_{y_0}^{\varepsilon} \frac{dV}{H(V)},$$

故 $y(t)<\varepsilon$。

推论 1 若存在上述的函数满足下列条件：

(i) 对任何 $t\geqslant0$ 及 $\phi\in C$，有

$u(|\phi(0)|)\leqslant V(t,\phi)\leqslant v(\|\phi\|)$；

(ii) 对任何 $t_0\geqslant0$ 及 $\varphi\in C$，存在 $r_0\in(0,r]$ 及 $\lambda\geqslant1$，使得当 $t\in[t_0, t_0+r_0)$ 且 $V(t,x_t(t_0,\varphi))\geqslant\lambda v(\|\varphi\|)$，$V(t,x_t(t_0,\varphi))\geqslant V(\xi,x_\xi(t_0,\varphi))$，$t_0\leqslant\xi\leqslant t$；以及当 $t\geqslant t_0+r_0$ 且 $V(t,x_t(t_0,\varphi))\geqslant V(\xi,x_\xi(t_0,\varphi))$，$t_0\leqslant\xi\leqslant t$ 时，有

$\dot{V}(t,x_t(t_0,\varphi))\leqslant h(t)H(V(t,x_t(t_0,\varphi)))$。

则方程(1) 的零解为一致稳定。

作为更特殊但更常用的情形，我们有下面的推论。

推论 2 如果定理1的条件(i) 成立，且对任何 $t_0\geqslant0$ 及任何 $\varphi\in C$，有

$\dot{V}(t,x_t(t_0,\varphi))\leqslant0$，$t\geqslant t_0$。

则方程(1) 的零解为一致稳定。

另外一种特殊而常用的情形，是取泛函 $V(t,\phi)$ 为函数 $V(t,\phi(0))$，或写成 $V(t,x)$，$x\in\mathbf{R}^n$。此时 $V(t,\phi)$ 沿方程(1) 的解在 Fréchet 意义下的上右导数 $\dot{V}(t,x_t)$ 便成为 $V(t,x)$ 沿 (1) 的解在通常意义下的上右导数 $\dot{V}(t, x(t))$。于是我们又得到如下的推论，它就是人们常称之为拉什密辛 (Разумихин) 型的定理。

推论 3 如果满足下列条件：

(i) $u(|x|)\leqslant V(t,x)\leqslant v(|x|)$，$t\geqslant0$，$x\in\mathbf{R}^n$；

(ii) 对任何的$t_0\geqslant 0$及任何的$\varphi\in C$，当$V(t,x(t_0,\varphi)(t))\geqslant V(\xi,x(t_0,\varphi)(\xi))$，$t-r\leqslant\xi\leqslant t$时，有

$$\dot V(t,x(t_0,\varphi)(t))\leqslant h(t)H(V(t,x(t_0,\varphi)(t)))$$

则方程 (1)的零解为一致稳定。

证 由(i)，$u(|\phi(0)|)\leqslant V(t,\phi(0))\leqslant v(|\phi(0)|)\leqslant v(\|\phi\|)$，故满足推论1的条件 (i)，由这里的条件(ii) 可推知推论1的条件(ii) 被满足。故由推论1知方程(1) 的零解为一致稳定。证毕。

下面考察几个例子

例 1 考察纯量方程

$$\dot x(t)=-ax(t)+bx(t-r) \tag{4}$$

的解的稳定性。其中a和b为正常数，$a>b$。

方法 1 使用V泛函。取

$$V(\phi)=\frac{1}{2}\phi^2(0)+\mu\int_{-r}^{0}\phi^2(\theta)d\theta,\ \mu>0\text{为待定.}$$

于是
$$\begin{aligned}\dot V(x_t)&=x(t)\dot x(t)+\mu x^2(t)-\mu x^2(t-r)\\&=-(a-\mu)x^2(t)+bx(t)x(t-r)-\mu x^2(t-r)\\&=-(a-\mu)\Big[x(t)-\frac{b}{2(a-\mu)}x(t-r)\Big]^2\\&\quad+\frac{b^2-4\mu(a-\mu)}{4(a-\mu)}x^2(t-r).\end{aligned}$$

显然当取$\mu=\dfrac{a}{2}$时，有

$$\begin{aligned}\dot V(x_t)=&-\frac{a}{2}\Big[x(t)-\frac{b}{2(a-\mu)}x^2(t-r)\Big]^2\\&+\frac{b^2-a^2}{2a}x^2(t-r)\leqslant 0,\end{aligned}$$

故推论 2 的条件(ii)被满足，再取$u(s)=\dfrac{s^2}{2}$，$v(s)=\Big(\dfrac{1}{2}+\dfrac{ar}{2}\Big)\cdot s^2$，则推论2的条件(i) 也被满足，因此，方程(4) 的零解为一致稳定。

方法 2 使用V函数。取

$$V(x)=\frac{x^2}{2},$$

于是 $$\dot V(x(t))=-ax^2(t)+bx(t)x(t-r)$$
$$\leqslant -ax^2(t)+b|x(t)||x(t-r)|$$
$$\leqslant -ax^2(t)+\frac{b}{2}x^2(t)+\frac{b}{2}x^2(t-r).$$

当 $V(x(t))\geqslant V(x(\xi))$，$t-r\leqslant\xi\leqslant t$ 时，则 $V(x(t))\geqslant V(x(t-r))$，即 $x^2(t)\geqslant x^2(t-r)$，故

$$\dot V(x(t))\leqslant -ax^2(t)+\frac{b}{2}x^2(t)+\frac{b}{2}x^2(t)$$

$$=-(a-b)x^2(t)\leqslant 0.$$

可见推论3的条件(ii) 被满足，条件(i)显然是容易满足的，只须取$u(s)=\frac{s^2}{3}$,$v(s)=s^2$ 即可。因此，由推论3知方程 (1)的零解是一致稳定的。

例 2 考察纯量方程

$$\dot x(t)=-ax^3(t)+bx^3(t-1)+\frac{g(x(t))}{1+t^2}\Big[-\frac{1}{4}x^4(t)$$
$$-\frac{a}{2}\int_{-1}^{0}x^6(t+\theta)d\theta+\frac{1}{2}x^4\Big(t-\frac{1}{2}\Big)$$
$$+a\int_{-\frac{1}{2}}^{0}x^6\Big(t-\frac{1}{2}+\theta\Big)d\theta\Big]. \tag{5}$$

其中a、b为正常数，$a>b$；$g(x)$为连续函数，当$x\neq0$时$xg(x)>0$，$g(0)=0$；又存在$M>0$使$x^3g(x)<M$。

现取V泛函$V(\phi)=\frac{1}{4}\phi^4(0)+\frac{a}{2}\int_{-1}^{0}\phi^6(\theta)d\theta$。又取$u(s)=\frac{1}{4}s^4$，$v(s)=\frac{1}{4}s^4+\frac{a}{2}s^6$，$h(t)=\frac{1}{1+t^2}$，$H(V)=MV$。

V沿方程(5) 的解的导数为

$$\dot{V}(x_t)=x^3(t)\dot{x}(t)+\frac{a}{2}x^6(t)-\frac{a}{2}x^6(t-1)$$

$$=-\frac{a}{2}x^6(t)+bx^3(t)x^3(t-1)-\frac{a}{2}x^6(t-1)$$

$$+\frac{x^3(t)g(x(t))}{1+t^2}\Big[-\frac{1}{4}x^4(t)$$

$$-\frac{a}{2}\int_{-1}^{0}x^6(t+\theta)d\theta+\frac{1}{2}x^4\Big(t-\frac{1}{2}\Big)$$

$$+a\int_{-\frac{1}{2}}^{0}x^6\Big(t-\frac{1}{2}+\theta\Big)d\theta\Big].$$

由于二次型$-\frac{a}{2}x^6(t)+bx^3(t)x^3(t-1)-\frac{a}{2}x^6(x-1)$ 是负定的，故

$$\dot{V}(x_t)\leqslant\frac{x^3(t)g(x(t))}{1+t^2}\Big[-\frac{1}{4}x^4(t)-\frac{a}{2}\int_{-1}^{0}x^6(t+\theta)d\theta$$

$$+\frac{1}{2}x^4\Big(t-\frac{1}{2}\Big)+a\int_{-\frac{1}{2}}^{0}x^6\Big(t-\frac{1}{2}+\theta\Big)d\theta\Big].$$

现取$r_0=\frac{1}{2}$，$\lambda=2$。当$t\subset\Big[t_0,t_0+\frac{1}{2}\Big)$时，有$x^4\Big(t-\frac{1}{2}\Big)\leqslant\|\varphi\|^4$，$\int_{-\frac{1}{2}}^{0}x^6\Big(t-\frac{1}{2}+\theta\Big)d\theta\leqslant\frac{1}{2}\|\varphi\|^6$，（这里$t_0$为初始时刻，$\varphi$为初始函数）。如果$V(x_t)\geqslant\lambda v(\|\varphi\|)$成立，它就是

$$\frac{1}{4}x^4(t)+\frac{a}{2}\int_{-1}^{0}x^6(t+\theta)d\theta\geqslant\frac{1}{2}\|\varphi\|^4+a\|\varphi\|^6.$$

于是
$$\dot{V}(x_t)\leqslant\frac{x^3(t)g(x(t))}{1+t^2}\Big[-\frac{1}{2}\|\varphi\|^4-a\|\varphi\|^6+\frac{1}{2}\|\varphi\|^4$$

$$+\frac{a}{2}\|\varphi\|^6\Big]\leqslant 0.$$

可见满足推论1的条件(ii)中的第一部份。

当$t\geqslant t_0+\frac{1}{2}$时，如果$V(x_t)\geqslant V(x_\xi)$，$t_0\leqslant\xi\leqslant t$，则取$\xi=t-\frac{1}{2}$

便得到

$$\frac{1}{4}x^4(t)+\frac{a}{2}\int_{-1}^{0}x^6(t+\theta)d\theta \geqslant \frac{1}{4}x^4\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

$$+\frac{a}{2}\int_{-1}^{0}x^6\left(t-\frac{1}{2}+\theta\right)d\theta$$

$$\geqslant \frac{1}{4}x^4\left(t-\frac{1}{2}\right)+\frac{a}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}x^6\left(t-\frac{1}{2}+\theta\right)d\theta$$

于是 $$\dot{V}(x_t)\leqslant \frac{x^3(t)g(x(t))}{1+t^2}\left[-\frac{1}{4}x^4(t)-\frac{a}{2}\int_{-1}^{0}x^6(t+\theta)d\theta\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}x^4(t)+a\int_{-1}^{0}x^6(t+\theta)d\theta\right]$$

$$\leqslant \frac{M}{1+t^2}V(x_t)。$$

故满足推论1的条件(ii)中的第二部份。

推论1的条件(i)显然是被满足的。故方程(5)的零解为一致稳定。

下面我们介绍关于一致渐近稳定的判别定理。由于我们现在讨论的不是全局的稳定性问题，故不妨假定方程(1)的右端函数$f(t, x_t)$是定义在$[0, \infty)\times C_H$上的，$C_H=\{\phi\in C:\|\phi\|\leqslant H\}$。

定义1 设$f(t, \phi)$定义在$[0, \infty)\times C_H$上取值于R^n中的连续泛函，如果$[\phi(0)]^T f(t, \phi)$在$[0,\infty)\times C_H$上有上界(或有下界)，则称$f(t, \phi)$为第一类半有界(或第二类半有界)。如果$f(t,\phi)$是第一类半有界或第二类半有界，则称$f(t, \phi)$为半有界。

显然，若$f(t, \phi)$在$[0, \infty)\times C_H$上有界，则它必然是半有界。反之则不然。例如设纯量泛函$f(t,\phi)=-t^2\phi(0)+\phi(-1)$。它在$[0, \infty)\times C_H$上是无界的，但

$$[\phi(0)]^T f(t, \phi)=-t^2\phi^2(0)+\phi(0)\phi(-1)$$

$$\leqslant|\phi(0)\phi(-1)|\leqslant H^2。$$

故$f(t, \phi)$为半有界。

定义2 设$P(t, \phi)$为$[0, \infty)\times C_H$上的连续正值泛函，对于

给定的泛函V：$[0,\ \infty)\times C_H\to(0,\ \infty)$，如果

$$\inf_{a\leqslant V(t,\phi)\leqslant b}[P(t,\ \phi)-V(t,\ \phi)]>0$$

对任何的$b>a>0$成立，则称P对于V满足条件(P)。

例3 设$F:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$为连续函数，且$s>0$时$F(s)>s$。对给定的$V(t,\ \phi)$，若取$P(t,\ \phi)=F(V(t,\ \phi))$，则$P$对于$V$满足条件$(P)$。

例4 设$V(t,\ \phi)=\alpha\phi^2(0)+\beta\int_{-r}^{0}\phi^2(\theta)d\theta$，其中$\phi\in C$，$\alpha>0$，$\beta>0$。若取$P(t,\ \phi)=\delta\phi^2(0)+\mu\int_{-r}^{0}\phi^2(\theta)d\theta$，$\delta>\alpha$，$\mu>\beta$。则

$$\begin{aligned}&\inf_{a\leqslant V(t,\phi)\leqslant b}[P(t,\ \phi)-V(t,\ \phi)]\\&=\inf_{a\leqslant V(t,\phi)\leqslant b}\left[(\delta-\alpha)\phi^2(0)+(\mu-\beta)\int_{-r}^{0}\phi^2(\theta)d\theta\right]\\&\geqslant\frac{a}{\max(\alpha,\beta)}\cdot\min[(\delta-\alpha),\ (\mu-\beta)]>0,\end{aligned}$$

故P对于V满足条件(P)。

定理2 如果存在前述的函数u、v、w、V、P，其中P对于V满足条件(P)，使得下列的条件成立。

(i) 对任何$t\geqslant0$及任何$\phi\in C_H$，有

$u(|\phi(0)|)\leqslant V(t,\phi)\leqslant v(\|\phi\|)$；

(ii) 对任何$t_0\geqslant0$及任何$\varphi\in C_H$，存在$r_0\in(0,\ r]$及$\lambda\geqslant1$，使得当$t\in[t_0,\ t_0+r_0)$且$V(t,\ x_t(t_0,\ \varphi))\geqslant\lambda v(\|\varphi\|)$时，有$\dot V(t,\ x_t(t_0,\varphi))\leqslant0$；当$t\geqslant t_0+r_0$且$P(t,\ x_t(t_0,\varphi))>V(\xi,x_\xi(t_0,\ \varphi))$，$t-r_0\leqslant\xi\leqslant t$时，有$\dot V(t,x_t(t_0,\varphi))\leqslant-w(|x(t_0,\ \varphi)(t)|)$；

(iii) $f(t,\ \phi)$为半有界。

则方程(1)的零解为一致渐近稳定。

证明由后面的定理3给出。下面通过例子说明其用处。

例5 考察时滞系统

$$\dot x(t)=Ax(t)+Bx(t-r),\ \ r\geqslant0.\tag{6}$$

其中$x(t)$是n维向量值函数，A和B是$n\times n$常数矩阵。假定A的所

有特征值具有负实部。

现取V泛函为

$$V(\phi)=\phi^T(0)C\phi(0)+\int_{-r}^{0}\phi^T(\theta)E\phi(\theta)d\theta. \tag{7}$$

其中T表示转置，E和C皆为$n\times n$矩阵并满足C为正定对称矩阵，E为正定矩阵，并且使

$$A^TC+CA=-D<0.$$

V沿方程(6)的解的导数为

$$\dot V(x_t)=-x^T(t)(D-E)x(t)+2x^T(t)CBx(t-r)$$
$$-x^T(t-r)Ex(t-r). \tag{8}$$

现将(8)的右端看作$x(t)$和$x(t-r)$的二次型，如果矩阵A、B能够保证存在矩阵C、E使得这二次型为定负的话，则必存在函数w：$\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$为非减连续，使得对一切$t\in\mathbf{R}$有$\dot V(x_t)\leqslant -w(|x(t)|)$，这显然满足定理2的条件(ii)，又易知定理2的条件(i)和(iii)能被满足。故由定理2知方程(6)的零解为一致渐近稳定。事实上在特殊的情况下，如果假定$E<D$且

$$x^T(t)(D-E)x(t)\geqslant\lambda|x(t)|^2,$$
$$x^T(t)Ex(t)\geqslant\mu|x(t)|^2.$$

则
$$\dot V(x_t)\leqslant-\lambda|x(t)|^2+2\|CB\|\cdot|x(t)|\cdot|x(t-r)|$$
$$-\mu|x(t-r)|^2.$$

又若$\lambda\mu-\|CE\|^2>0$，则必存在常数$k>0$，使得

$$\dot V(x_t)\leqslant-k(|x(t)|^2+|x(t-r)|^2)\leqslant-k|x(t)|^2$$
$$\triangleq-w(|x(t)|).$$

从而满足定理2的条件(ii)。

例6 考察纯量方程

$$\dot x(t)=-a(t)x(t)+b(t)x(t-r),\ r>0. \tag{9}$$

其中$a(t)$，$b(t)$皆为连续函数，$a(t)\geqslant\delta>0$，$\overline{\lim_{t\to\infty}}a(t)=\infty$，$|b(t)|\leqslant M$，$M$为某一正常数。

显然方程右端的函数$f(t,\ \phi)=-a(t)\phi(0)+b(t)\phi(-r)$在$[0,\ \infty)\times C_H$上是无界的，但它为半有界。现取

$$V(\phi)=\frac{1}{2}\phi^2\ (0)+\frac{\delta}{2}\int_{-r}^{0}\phi^2(\theta)d\theta.$$

则显然满足定理2的条件(i)，V沿方程的解的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_t)&=-a(t)x^2(t)+b(t)x(t)x\ (t-r)+\frac{\delta}{2}x^2(t)\\&\quad-\frac{\delta}{2}x^2\ (t-r)\\&\leqslant-\left[a(t)-\frac{\delta}{2}\right]x^2(t)+|b(t)|\cdot|x(t)|\cdot|x(t-r)|\\&\quad-\frac{\delta}{2}x^2(t-r)\\&\leqslant-\frac{\delta}{2}x^2(t)+M|x(t)||x(t-r)|-\frac{\delta}{2}x^2\ (t-r).\end{aligned}$$

再加上条件$M<\delta$，则上式的二次型为负定，从而存在正常数k，使得$\dot{V}(x_t)\leqslant-k|x(t)|^2$。这满足了定理2的条件(ii)。由定理2知方程(9) 的零解是一致渐近稳定的。

下面考察更复杂的纯量方程。

例7
$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=-a(t)x(t)+b(t)x(t-r)+x^3(t)\left[\frac{1}{4}x^2\left(t-\frac{r}{4}\right)\right.\\&\quad+\frac{\delta}{4}\int_{-\frac{r}{2}}^{0}x^2\left(t-\frac{r}{4}+\theta\right)d\theta+\frac{1}{4}x^2(t-\alpha(t))+\frac{\delta}{5}\int_{-\frac{r}{2}}^{0}x^2(t-\alpha(t)\\&\quad\left.+\theta)d\theta-g\left(\frac{1}{2}x^2(t)+\frac{\delta}{2}\int_{-r}^{0}x^2(t+\theta)d\theta\right)\right]^K.\end{aligned}\tag{10}$$

其中$a(t)$、$b(t)$、$\alpha(t)$皆为连续函数,$a(t)\geqslant\delta>0$,$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}a(t)=\infty$,

$|b(t)|\leqslant M,0<M<\delta$, $\frac{r}{4}\leqslant\alpha(t)\leqslant\frac{r}{2}$, $r>0$, $g(s)$为连续有界函数，当$s>0$时$g(s)>s$，$g(0)=0$，k为正奇数。

现取 $V(\phi)=\frac{1}{2}\phi^2(0)\ +\frac{\delta}{2}\int_{-r}^{0}\phi^2(\theta)d\theta$, $u(s)=\frac{1}{2}s^2$,

$v(s)=\dfrac{1+\delta r}{2}s^2$。显然定理2的条件(i)被满足。

又取$P(\phi)=g(V(\phi))$，则P对V满足条件(P)。

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_t)=&-a(t)x^2(t)+b(t)x(t)x(t-r)\\&+x^4(t)\Big[\frac{1}{4}x^2\Big(t-\frac{r}{4}\Big)+\frac{\delta}{4}\int_{-\frac{r}{2}}^{0}x^2\Big(t-\frac{r}{4}+\theta\Big)d\theta\\&+\frac{1}{4}x^2(t-\alpha(t))+\frac{\delta}{5}\int_{-\frac{r}{2}}^{0}x^2(t-\alpha(t)+\theta)d\theta\\&-g\Big(\frac{1}{2}x^2(t)+\frac{\delta}{2}\int_{-r}^{0}x^2(t+\theta)d\theta\Big)\Big]^K\\&+\frac{\delta}{2}x^2(t)-\frac{\delta}{2}x^2(t-r).\\\leqslant&-\frac{\delta^2-M^2}{2\delta}x^2(t)+x^4(t)\Big[\frac{1}{4}x^2\Big(t-\frac{r}{4}\Big)\\&+\frac{\delta}{4}\int_{-\frac{r}{2}}^{0}x^2\Big(t-\frac{r}{4}+\theta\Big)d\theta\\&+\frac{1}{4}x^2(t-\alpha(t))+\frac{\delta}{5}\int_{-\frac{r}{2}}^{0}x^2(t-\alpha(t)+\theta)d\theta\\&-g\Big(\frac{1}{2}x^2(t)+\frac{\delta}{2}\int_{-r}^{0}x^2(t+\theta)d\theta\Big)\Big]^K.\end{aligned}$$

设$(t_0,\ \varphi)\in\mathbf{R}^+\times C_H$为任意给定的初始条件。现取$r_0=r$，取定$\lambda\geqslant1$。

今将$[t_0,\ t_0+r)$分作下列四个区间进行讨论：

①当$t\in\Big[t_0,\ t_0+\dfrac{r}{4}\Big)$时，此时点$t-\dfrac{r}{4}$和$t-\alpha(t)$皆落在$[t_0-r,\ t_0]$之内。从而

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}x^2\Big(t-\frac{r}{4}\Big)+\frac{\delta}{4}\int_{-\frac{r}{2}}^{0}x^2\Big(t-\frac{r}{4}+\theta\Big)d\theta\leqslant&\frac{1}{4}\|\varphi\|^2\\&+\frac{1}{8}\delta r\|\varphi\|^2,\end{aligned}$$

$$\frac{1}{4}x^2(t-\alpha(t))+\frac{\delta}{5}\int_{-\frac{r}{2}}^{0}x^2(t-\alpha(t)+\theta)d\theta\leqslant\frac{1}{4}\|\varphi\|^2$$

$$+\frac{1}{10}\delta r\|\varphi\|^2.$$

又若$V(x_t)\geqslant\lambda v(\|\varphi\|)$时，便有

$$g\left(\frac{1}{2}x^2(t)+\frac{\delta}{2}\int_{-r}^{0}x^2(t+\theta)d\theta\right)=g(V(x_t))\geqslant V(x_t)$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\lambda(1+\delta r)\|\varphi\|^2.$$

故
$$\dot{V}(x_t)\leqslant x^4(t)\left[\frac{1}{4}\|\varphi\|^2+\frac{\delta r}{8}\|\varphi\|^2+\frac{1}{4}\|\varphi\|^2+\frac{\delta r}{10}\|\varphi\|^2-\frac{\lambda(1+\delta r)}{2}\|\varphi\|^2\right]^{\kappa}\leqslant 0.$$

② 当$t\in\left[t_0+\frac{r}{4},\ t_0+\frac{r}{2}\right)$时，

则$t-\frac{r}{4}\in\left[t_0,\ t_0+\frac{r}{4}\right)$，故$\frac{1}{4}x^2\left(t-\frac{r}{4}\right)+\frac{\delta}{4}\int_{-\frac{r}{2}}^{0}x^2\left(t-\frac{r}{4}+\theta\right)d\theta\leqslant\frac{1}{2}V(x_{t-\frac{r}{4}})\leqslant\frac{1}{2}\lambda v(\|\varphi\|)$.

对$t-\alpha(t)$来说，可能出现两种情况：

(a) $t-\alpha(t)\in\left[t_0,\ t_0+\frac{r}{4}\right)$，此时

$$\frac{1}{4}x^2(t-\alpha(t))+\frac{\delta}{5}\int_{-\frac{r}{2}}^{0}x^2(t-\alpha(t)+\theta)d\theta$$

$$\leqslant\frac{1}{2}V(x_{t-\alpha(t)})\leqslant\frac{1}{2}\lambda v(\|\varphi\|).$$

故当$V(x_t)\geqslant\lambda v(\|\varphi\|)$时，便有

$$\dot{V}(x_t)\leqslant x^4(t)\left[\frac{1}{2}\lambda v(\|\varphi\|)+\frac{1}{2}\lambda v(\|\varphi\|)-\lambda v(\|\varphi\|)\right]^{\kappa}$$

$$=0.$$

(b) $t-\alpha(t)\in\left[t_0-\frac{r}{4},\ t_0\right)$，此时

$$x^2(t-\alpha(t))\leqslant\|\varphi\|^2,\quad \int_{-\frac{r}{2}}^{0}x^2(t-\alpha(t)+\theta)d\theta$$

$$\leqslant\frac{r}{2}\|\varphi\|^2.$$

故当$V(x_t)\geqslant\lambda v(\|\varphi\|)$时，有

$$\dot{V}(x_t)\leqslant x^4(t)\left[\frac{\lambda}{2}v(\|\varphi\|)+\frac{1}{4}\|\varphi\|+\frac{\delta r}{10}\|\varphi\|\right.$$

$$\left.-\lambda v(\|\varphi\|)\right]^k\leqslant 0.$$

③ 当$t\in\left[t_0+\frac{r}{2},\ t_0+\frac{3}{4}r\right)$时，此时$t-\frac{r}{4}$和$t-\alpha(t)$皆落在区间$\left[t_0,\ t_0+\frac{r}{2}\right)$之中，从而当$V(x_t)\geqslant\lambda v(\|\varphi\|)$时，有

$$\dot{V}(x_t)\leqslant x^4(t)\left[\frac{1}{2}V(x_{t-\frac{r}{4}})+\frac{1}{2}V(x_{t-\alpha(t)})-V(x_t)\right]^K$$

$$\leqslant x^4(t)\left[\frac{1}{2}\lambda v(\|\varphi\|)+\frac{1}{2}\lambda v(\|\varphi\|)-\lambda v(\|\varphi\|)\right]^k$$

$$=0.$$

④ 当$t\in\left[t_0+\frac{3}{4}r,\ t_0+r\right)$时,类似③的讨论,可知当$V(x_t)\geqslant\lambda v(\|\varphi\|)$时，有$\dot{V}(x_t)\leqslant 0$。

综合上述四种情况，即知当$t\in[t_0,\ t_0+r)$时，若$V(x_t)\geqslant\lambda v(\|\varphi\|)$，便有$\dot{V}(x_t)\leqslant 0$。

下面讨论$t\geqslant t_0+r$的情形，如果$P(x_t)>V(x_\xi)$，$t-r\leqslant\xi\leqslant t$，则分别取$\xi$等于$t-\frac{r}{4}$和$t-\alpha(t)$时便得

$$\frac{1}{2}g\left(\frac{1}{2}x^2(t)+\frac{\delta}{2}\int_{-r}^{0}x^2(t+\theta)d\theta\right)\geqslant\frac{1}{4}x^2\left(t-\frac{r}{4}\right)$$

$$+\frac{\delta}{4}\int_{-r}^{0}x^2\left(t-\frac{r}{4}+\theta\right)d\theta$$

$$\geqslant \frac{1}{4}x^2\left(t-\frac{r}{4}\right)+\frac{\delta}{4}\int_{-\frac{r}{2}}^{0}x^2\left(t-\frac{r}{4}+\theta\right)d\theta,$$

及
$$\frac{1}{2}g\left(\frac{1}{2}x^2(t)+\frac{\delta}{2}\int_{-r}^{0}x^2(t+\theta)d\theta\right)\geqslant\frac{1}{4}x^2(t-\alpha(t))$$

$$+\frac{\delta}{4}\int_{-r}^{0}x^2(t-\alpha(t)+\theta)d\theta$$

$$\geqslant\frac{1}{4}x^2(t-\alpha(t))+\frac{\delta}{5}\int_{-\frac{r}{2}}^{0}x^2(t-\alpha(t)+\theta)d\theta.$$

故
$$\dot{V}(x_t)\leqslant-\frac{\delta^2-M^2}{2\delta}x^2(t)+x^4(t)\left[\frac{1}{2}g(V(x_t))\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}g(V(x_t))-g(V(x_t))\right]^{\kappa}$$

$$=-\frac{\delta^2-M^2}{2\delta}x^2(t).$$

因此定理2的条件(ii)被满足。

最后验证满足定理2的条件(iii)，因为

$$\phi^T(0)f(t,\phi)=-a(t)\phi^2(0)+b(t)\phi(0)\phi(-r)$$

$$+\phi^4(0)\left[\frac{1}{4}\phi^2\left(-\frac{r}{4}\right)+\frac{\delta}{4}\int_{-\frac{r}{2}}^{0}\phi^2\left(-\frac{r}{4}\right.\right.$$

$$\left.+\theta\right)d\theta+\frac{1}{4}\phi^2(-a(t))+\frac{\delta}{5}\int_{-\frac{r}{2}}^{0}\phi^2(-a(t)$$

$$\left.+\theta)d\theta-g\left(\frac{1}{2}\phi^2(0)+\frac{\delta}{2}\int_{r}^{0}\phi^2(\theta)d\theta\right)\right]^{K}$$

$$\leqslant-\delta H^2+MH^2+H^4\left[\frac{1}{4}H^2+\frac{\delta r}{8}H^2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}H^2+\frac{\delta r}{10}H^2\right]^{K}$$

$$\leqslant MH^2+H^4\left(\frac{1}{2}+\frac{\delta r}{4}\right)H^2.$$

故$f(t,\phi)$为半有界。

综合所述，由定理2便知方程(10)的零解为一致渐近稳定。

下面将定理2进行推广，使之具有更为广泛的形式。

设$W(t, s)$是定义在$R^+\times R^+$上取值于R^+中的连续函数，关于s是非减的，当$s>0$时$W(t, s)>0$，对给定的$a>0$，设$M(a)=\max\left\{\sup\limits_{\substack{t\geq 0\\ |\phi(0)|\leq H}}\phi^T(0)f(t, \phi), \frac{a^2}{r}\right\}$，$-m(a)=\min\left\{\inf\limits_{\substack{t\geq 0\\ |\phi(0)|\leq H}}\phi^T(0)f(t, \phi), -\frac{a^2}{r}\right\}$。

定理3 如果存在上述的函数u、v、W、V、P，其中P关于V满足条件(P)，使得下列条件成立：

(i) 对任何的$t\geq 0$，$\phi\in C_H$，有

$$u(|\phi(0)|)\leq V(t, \phi)\leq v(\|\phi\|),$$

(ii) 对任何的$t_0\geq 0$，$\varphi\in C_H$，存在$r_0\in(0, r]$及$\lambda\geq 1$，使得当$t\in[t_0, t_0+r_0)$且$V(t, x_t(t_0, \varphi))\geq\lambda v(\|\varphi\|)$时，有$\dot{V}(t, x_t(t_0, \varphi))\leq 0$；当$t\geq t_0+r_0$且$P(t, x_t(t_0, \varphi))>V(\xi, x_\xi(t_0, \varphi))$，$t-r_0\leq\xi\leq t$时，有$\dot{V}(t, x_t(t_0, \varphi))\leq -W(t, |x(t_0, \varphi)(t)|)$；

(iii) 对$a>0$，存在正整数K，使得对任何$\bar{t}\geq 0$及任何$t_i\in[\bar{t}+(2i-1)r, \bar{t}+2ir]$，$i=1,2,\cdots$，有下列两种情形之一成立：

(a) 当$f(t, \phi)$为第一类半有界时

$$\sum_{i=1}^{K}\int_{t_i-\frac{a^2}{2M(a)}}^{t_i}W(t, a)dt>v(H),$$

(b) 当$f(t,\phi)$为第二类半有界时，

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{t_i}^{t_i+\frac{a^2}{2m(a)}}W(t,a)dt>v(H).$$

则方程(1)的零解为一致渐近稳定。

证 先证一致稳定性。对任何给定的$\varepsilon>0$，可选$\delta>0$满足$\delta<\varepsilon$，$\lambda v(\delta)<u(\varepsilon)$，则对任何的$t_0\geq 0,\varphi\in C_H$，当$\|\varphi\|<\delta$时有$V(t_0,\varphi)\leq v(\|\varphi\|)\leq v(\delta)<u(\varepsilon)$。

为简便起见，以后用x_t代表$x_t(t_0,\varphi)$，用 $x(t)$ 代表 $x(t_0,\varphi)(t)$。现要证明：

$$V(t,x_t)<u(\varepsilon),\quad t\geqslant t_0 \tag{11}$$

若$t\in[t_0,t_0+r_0)$且$V(t,x_t)\geqslant\lambda v(\|\varphi\|)$时，由条件(ii)知$\dot V(t,x_t)\leqslant 0$。这表明 对一切 $t\in[t_0,t_0+r_0)$ 均有 $V(t,x_t)\leqslant\lambda v(\|\varphi\|)<u(\varepsilon)$。因此若(11)不成立，必存在 $t_1\geqslant t_0+r_0$及$0<h<e$，其中 $e=\inf\limits_{\frac{u(\varepsilon)}{2}\leqslant V(t,\phi)\leqslant u(\varepsilon)}\{P(t,\phi)-V(t,\phi)\}$，使得

1° $\quad\dfrac{u(\varepsilon)}{2}\leqslant u(\varepsilon)-h<V(t_1,x_{t_1})<u(\varepsilon)$；

2° $\quad V(t,x_t)<V(t_1,x_{t_1})$，当$t_0\leqslant t<t_1$；

3° $\quad\dot V(t_1,x_{t_1})>0$。

于是
$$\begin{aligned}P(t_1,x_{t_1})&\geqslant V(t_1,x_{t_1})+e>u(\varepsilon)-h+e\\&>u(\varepsilon)>V(\xi,x_\xi),\quad t_0\leqslant\xi\leqslant t_1.\end{aligned}$$

根据条件(ii)，有

$$\dot V(t_1,x_{t_1})\leqslant -W(t_1,|x(t_1)|)\leqslant 0.$$

这与3°矛盾。故(11)成立，再由条件(i)便得

$$|x(t)|<\varepsilon\quad 对一切t\geqslant t_0成立。$$

故方程(1) 的零解为一致稳定。

下证一致吸引性。

现选$\delta_0>0$，使得当$\|\varphi\|<\delta_0$时有$|x(t)|<H$。由条件(i)知$V(t,x_t)\leqslant v(H)$。

对任给的$\varepsilon\in(0,H)$，取一正数d满足

$d<\inf\limits_{u(\varepsilon)\leqslant V(t,\phi)\leqslant v(H)}\{P(t,\phi)-V(t,\phi)\}$。又取正整数$N$满足

$$u(\varepsilon)+(N-1)d<v(H)\leqslant u(\varepsilon)+Nd.$$

下面证明存在$T_1>t_0+r_0$，使得

$$V(T_1,x_{T_1})<u(\varepsilon)+(N-1)d. \tag{12}$$

若(12)不成立，则当$t\geqslant t_0+r_0$时，有

$$V(t,x_t)\geqslant u(\varepsilon)+(N-1)d. \tag{13}$$

于是 $P(t,x_t)>V(t,x_t)+d\geqslant u(e)+Nd\geqslant v(H)>V(\xi,x_\xi)$,

$t_0\leqslant\xi\leqslant t$.

由条件(ii)可得

$$V(t,x_t)\leqslant V(t_0+r_0,x_{t_0+r_0})-\int_{t_0+r_0}^{t}W(s,|x(s)|)ds$$

$$\leqslant v(H)-\int_{t_0+r_0}^{t}W(s,|x(s)|)ds. \qquad (14)$$

由(13)及条件(i) 知，当$t\geqslant t_0+r_0$ 时 $v(|x_t|)\geqslant u(e)$。故必存在 $a>0$，使当 $t\geqslant t_0+r_0$ 时 $|x_t|\geqslant\sqrt{2}a$。因此存在一序列$\{t_i\}$: $t_0+2ir\leqslant t_i\leqslant t_0+(2i+1)r$，$i=1,2,\cdots$，使得 $|x(t_i)|\geqslant\sqrt{2}a$。

现假定$f(t,\phi)$为第一类半有界(如为第二类半有界可同样地论证)。

当$t\in\left[t_i-\frac{a^2}{2M(a)},\ t_i\right]$时，由微分中值定理及$M(a)$的定义可得

$$\frac{|x(t_i)|^2}{2}-\frac{|x(t)|^2}{2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{|x(t)|^2}{2}\right)_{t=\xi}(t_i-t)$$

$$=x^T(\xi)f(\xi,x_\xi)(t_i-t)$$

$$\leqslant M(a)(t_i-t)\leqslant\frac{a^2}{2},$$

$$t\leqslant\xi\leqslant t_i.$$

故$|x(t)|^2\geqslant|x(t_i)|^2-a^2\geqslant a^2$，即 $|x(t)|\geqslant a$.

由(14)及条件(iii)可得

$$V(t_0+(2k+1)r,x_{t_0+(2k+1)r})\leqslant v(H)-\int_{t_0+r_0}^{t_0+(2k+1)r}W(s,|x(s)|)ds$$

$$\leqslant v(H)-\sum_{i=1}^{k}\int_{t_i-\frac{a^2}{2M(a)}}^{t_i}W(s,a)ds<0.$$

这与$V(t,\phi)\geqslant0$矛盾。故(12) 式成立，此时只需取 $T_1=t_0+(2k+1)r$即可。

下证当$t \geqslant T_1$时，有

$$V(t,x_t) \leqslant u(\varepsilon)+(N-1)d. \tag{15}$$

若不然，则存在$\alpha > T_1$，使得

$$u(\varepsilon)+(N-1)d \leqslant V(\alpha,x_\alpha) < u(\varepsilon)+Nd \text{且} \dot{V}(\alpha,x_\alpha)>0.$$

于是 $P(\alpha,x_\alpha) > V(\alpha,x_\alpha)+d \geqslant u(\varepsilon)+Nd \geqslant v(H) \geqslant V(\xi,x_\xi)$，

$$t_0 \leqslant \xi \leqslant \alpha.$$

由条件(ii)知 $\dot{V}(\alpha,x_\alpha) \leqslant -W(\alpha,|x(\alpha)|) \leqslant 0$，导出了矛盾。故(15)式成立。

现以T_1代替t_0+r_0，以$u(\varepsilon)+(N-1)d$代替$v(H)$，然后用类似上述的论证方法，可推得存在$T_2=T_1+(2k+1)r$，使得当$t \geqslant T_2$时，有

$$V(t,x_t) \leqslant u(\varepsilon)+(N-2)d.$$

重复上述的证明，可知存在 $T_N=t_0+N(2k+1)r$，使当$t \geqslant T_N$时有

$$V(t,x_t) \leqslant u(\varepsilon).$$

从而有 $|x(t)|<\varepsilon$。证毕。

定理2是定理3的特例。事实上，当$W(t,s)=w(s)$时，$f(t,\phi)$的半有界性必然满足定理3的条件(iii)。

当方程(1) 的解满足唯一性的情况下，我们可利用解对初值的连续依赖性，将定理 2 中在$[t_0,t_0+r_0)$上的条件去掉，得到如下的结果：

定理4 如果满足下列条件：

(i) 对任何的$t \geqslant 0, \phi \in C_H$，有

$$u(|\phi(0)|) \leqslant V(t,\phi) \leqslant v(\|\phi\|);$$

(ii) 存在$r_0 \in (0,r]$，使得当$t \geqslant t_0+r_0$且$P(t,x_t) > V(\xi,x_\xi)$，$t-r_0 \leqslant \xi \leqslant t$时，有

$$\dot{V}(t,x_t) \leqslant -w(|x(t)|);$$

(iii) $f(t,\phi)$为半有界。

则方程(1)的零解为稳定且一致吸引。

证明是显然的，从略。

定理 2 和定理3中都要求 $f(t,\phi)$ 为半有界，其原因是由于 $V(t,\phi)\leqslant v(\|\phi\|)$ 所引起的，文[45]改变了这种控制，从而去掉经典定理中要求$f(t,\phi)$ 在$\mathbf{R}^+\times C_H$中有界的限制。文[43]改进了文[45]中的条件，使得不必要求 $\dot{V}(t,x_t)$ 处处为定负。下面介绍是比[43]更为广泛的形式[44]。

引理1 设$x:[a,b]\to[0,1]$为连续函数，$W:[0,\infty)\to[0,\infty)$为连续非减函数且$s>0$时$W(s)>0$。如果存在 $\alpha>0$使得$\int_a^b x(t)dt\geqslant\alpha$，则必存在$\beta>0$使得$\int_a^b W(x(t))dt\geqslant\beta$。

证 设$E=\{t:x(t)\geqslant\alpha/2(b-a),\ a\leqslant t\leqslant b\}$，$m(E)$是 E的测度。如果$m(E)<\alpha/2$，则

$$\alpha\leqslant\int_a^b x(t)dt=\int_E x(t)dt+\int_{[a,b]-E}x(t)dt<\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}=\alpha.$$

导出了矛盾，故$m(E)\geqslant\frac{\alpha}{2}$。

因此，
$$\int_a^b W(x(t))dt\geqslant\int_E W(x(t))dt\geqslant\int_E W(\alpha/2(b-a))dt$$
$$\geqslant W(\alpha/2(b-a))\cdot\frac{\alpha}{2}.$$

令$\beta=W(\alpha/2(b-a))\cdot\frac{\alpha}{2}$便得所证。

对于 $x\in\mathbf{R}^n$，设$|x|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$，对于 $\phi\in C_H$，设$|||\phi|||=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\int_{-r}^{0}\phi_i^2(\theta)d\theta\right)^{1/2}$ 其中ϕ_i为ϕ的分量.

设w_1、w_2、w_3、$w:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 为连续非减函数，且当 $s>0$时$w_i(s)>0(i=1,2,3)$，$w(s)>0$，$w_i(0)=0(i=1,2,3)$。

定理5 假定存在前述的函数w_1、w_2、w_3、w 及P 和 V，其中P对于V满足条件(P)，使得下列的条件成立：

(i) 对任何的$t\geqslant 0$，$\phi\in C_H$，有

$$w_1(|\phi(0)|)\leqslant V(t,\phi)\leqslant w_2(|\phi(0)|)+w_3(|||\phi|||)；$$

(ii) 对任何的$t_0\geqslant 0$，$\varphi\in C_H$，存在$r_0\in(0,r]$及$\lambda\geqslant 1$，使得当$t\in[t_0, t_0+r_0)$且$V(t, x_t(t_0, \varphi))\geqslant\lambda[w_2(\|\varphi\|)+w_3(|||\varphi|||)]$时，有$\dot V(t,x_t(t_0,\varphi))\leqslant 0$；当$t\geqslant t_0+r_0$且$P(t, x_t(t_0,\varphi))>V(\xi,x_\xi(t_0,\varphi)),t-r_0\leqslant\xi\leqslant t$时，有$\dot V(t,x_t(t_0,\varphi))\leqslant -w(|x(t_0,\varphi)(t)|)$。

则方程(1)的零解为一致渐近稳定。

证 首先证一致稳定性。对给定的$\varepsilon>0(\varepsilon<H,w_1(\varepsilon)<H)$，取$\delta>0$使得$\delta<\varepsilon$，$\lambda w_2(\delta)<w_1(\varepsilon)/2$，及$\lambda w_3(\delta\sqrt{nr})<w_1(\varepsilon)/2$。

下面证明：当$\|\varphi\|<\delta$时，有

$$V(t,x_t)<w_1(\varepsilon),\quad (t\geqslant t_0) \tag{16}$$

这里的x_t是$x_t(t_0,\varphi)$的简写。

$$V(t_0,\varphi)\leqslant w_2(|\varphi(0)|)+w_3(|||\varphi|||)\leqslant w_2(\delta)+w_3(\delta\sqrt{nr})<w_1(\varepsilon)。$$

由条件(ii)的第一部份可知，(16)式在$[t_0,t_0+r_0)$上是成立的。故如果(16)式不成立，必有$t_1\geqslant t_0+r_0$及$0<h<e$其中$e=\inf\limits_{\frac{w_1(\varepsilon)}{2}\leqslant V(t,\phi)\leqslant w_1(\varepsilon)}\{P(t,\phi)-V(t,\phi)\}$，使得

1° $\dfrac{w_1(\varepsilon)}{2}\leqslant w_1(\varepsilon)-h<V(t_1,x_{t_1})<w_1(\varepsilon)$；

2° $V(t,x_t)<V(t_1,x_{t_1})$，$t_0\leqslant t<t_1$

3° $\dot V(t_1,x_{t_1})>0$。

由1°，2°及e的定义得

$$P(t_1,x_{t_1})\geqslant V(t_1,x_{t_1})+e>w_1(\varepsilon)-h+e>w_1(\varepsilon)>V(\xi,x_\xi),t_0\leqslant\xi\leqslant t_1,$$

由条件(ii)的第二部份得

$$\dot V(t_1,x_{t_1})\leqslant -w(|x(t_1)|)\leqslant 0。$$

这与3°矛盾，故(16)式成立。从而由条件(i)知当$t\geqslant t_0$时$|x(t)|$

$<\varepsilon$，故(1)的零解为一致稳定。

下证一致吸引性，对 $\bar{H}=\min(H, 1)$，选取 $\delta>0$，使得当 $\|\varphi\|<\delta$时$|x(t_0,\varphi)(t)|<\bar{H}$，$(t\geq t_0)$。

由条件(i)，有$V(t,x_t)\leqslant w_2(\bar{H})+w_3(\bar{H}\sqrt{nr})$。现取定一常数 $B>w_2(\bar{H})+w_3(\bar{H}\sqrt{nr})$。

对给定的$\varepsilon>0(\varepsilon<\bar{H})$，设$d=\inf\limits_{w_1(\varepsilon)\leq V(t,\phi)\leq B}\{P(t,\phi)-V(t,\phi)\}$，又设$N$为一正整数，满足

$$w_1(\varepsilon)+(N-1)d<B\leqslant w_1(\varepsilon)+Nd.$$

现要证明：存在$T_1>t_0+r_0$，使得

$$V(T_1,x_{T_1})<w_1(\varepsilon)+(N-1)d. \tag{17}$$

若不然，则对一切$t\geq t_0+r_0$，均有

$$V(t,x_t)\geqslant w_1(\varepsilon)+(N-1)d, \tag{18}$$

于是 $P(t, x_t)\geqslant V(t, x_t)+d\geqslant w(\varepsilon)+Nd\geqslant B>V(\xi, x_\xi)$，$t_0\leqslant\xi\leqslant t$。

由条件(ii) 有$\dot{V}(t,x_t)\leqslant -w(|x(t)|), t\geqslant t_0+r_0$。从而有

$$V(t,x_t)<B-\int_{t_0+r_0}^{t} w(|x(s)|)ds. \tag{19}$$

由(18)，$w_2(|x(t)|)+w_2(\|x_t\|)>w_1(\varepsilon), t\geqslant t_0+r_0$。

因此，或者$w_2(|x(t)|)\geqslant w_1(\varepsilon)/2$，或者$w_3(\|x_t\|)\geqslant w_1(\varepsilon)/2$。设$E_1=\{t: w_3(\|x_t\|)\geqslant w_1(\varepsilon)/2, t\geqslant t_0+r_0\}$，$E_2=[t_0+r_0,\infty)-E_1$。如果$t\in E_1$，则存在一正常数$a$使$\|x_t\|>a$。如果$t\in E_2$，则存在一正常数$b$使$|x(t)|>b$。

在$t\in E_1$的情形，有

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{-r}^{0}x_i^2(t+\theta)d\theta\geqslant a^2.$$

则
$$\int_{t-r}^{t}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2(\theta)d\theta\geqslant\frac{a^2}{n}\triangleq\alpha.$$

由于$|x(t)|<\bar{H}\leqslant 1$，故$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2(t)\leqslant\max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i(t)|=|x(t)|<1$，

由引理知存在$\beta>0$，使得

$$\int_{t-r}^{t} w(|x(s)|)ds \geqslant \int_{t-r}^{t} w\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2(\theta)\right)d\theta \geqslant \beta. \tag{20}$$

设k为满足$k\beta>B\geqslant(k-1)\beta$ 的正整数，$T_1=t_0+(k+1)r+2B/w(b)$。于是或者

(a) $m(E_1\cap[t_0+r,T_1])\geqslant kr$,

或者(b) $m(E_2\cap[t_0-r,T_1])\geqslant 2B/w(b)$.

若(a)成立，则在$E_1\cap[t_0+r,T_1]$中存在k个点，$t_1<t_2<\cdots<t_k$，满足 $t_1\geqslant t_0+2r$且 $t_j-t_{j-1}\geqslant r(j=2,3,\cdots,k)$，由(19)和(20)得

$$V(T_1,x_{T_1})<B-\int_{t_0+r}^{T_1} w(|x(s)|)ds$$

$$\leqslant B-\sum_{j=1}^{k}\int_{t_j-r}^{t_j} w\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2(\theta)\right)d\theta \leqslant B-k\beta$$

$$<0.$$

若(b)成立，由(19)式得

$$V(T_1,x_{T_1})<B-\int_{E_2\cap[t_0+r,T_1]} w(b)ds$$

$$=B-w(b)m(E_2\cap[t_0+r,T_1])<0.$$

因此，不论(a)或(b)都出现与$V\geqslant 0$矛盾，故(17)成立。

用类似于定理 3 的证明方法，可以证明当$t\geqslant T_1$时有

$$V(t,x_t)\leqslant w_1(\varepsilon)+(N-1)d.$$

类似地，可以证明存在$T_2,T_3,\cdots,T_N$，使得当$t\geqslant T_k$ $(k=2,3,\cdots,N)$时，有

$$V(t,x_t)\leqslant w_1(\varepsilon)+(N-k)d.$$

于是当$t\geqslant T_N$时有$V(t,x_t)\leqslant w_1(\varepsilon)$，从而$|x(t)|\leqslant\varepsilon$。
这里的 $T_N=t_0+N(k+1)r+2B/w(b)$。故方程(1)的零解为一致渐近稳定。证毕。

下面我们给出定理 5 的一个特殊而常用的推论。现取

$V(t,\phi)\equiv V_1(t,\phi(0))$, $P(t,\phi)=P_1(V_1(t,\phi(0)))$。

推论 如果存在上述的w_1, w_2, w, V_1, P_1满足下列条件：

(i) $w_1(|\phi(0)|)\leqslant V_1(t,\phi(0))\leqslant w_2(|\phi(0)|)$,

$t\geqslant 0$, $\phi\in C_H$。

(ii) 当$P_1(V_1(t,x(t)))>V_1(\xi,x(\xi))$, $t-r\leqslant\xi\leqslant t$ 时，有

$$\dot{V}_1(t,x(t))\leqslant -w(|x(t)|).$$

则方程(1) 的零解为一致渐近稳定。

证 现取$r_0=r$, $\lambda>1$及连续函数 w_3: $R^+\to R^+$, 当 $s>0$时 $w_3(s)>0$, $w_3(0)=0$。又设初始函数$\varphi\in C_H$。于是，当 $t\in[t_0, t_0+r)$时，有

$$V_1(t,x(t))\geqslant\lambda[w_2(\|\varphi\|)+w_3(|||\varphi|||)]\Rightarrow V_1(t,x(t))$$
$$\geqslant V_1(\xi,x(\xi)), t-r\leqslant\xi\leqslant t\Rightarrow P_1(V_1(t,x(t)))>V_1(\xi,$$
$$x(\xi)), t-r\leqslant\xi\leqslant t\overset{\text{由(ii)}}{\Longrightarrow}\dot{V}_1(t,x(t))\leqslant -w(|x(t)|).$$

可见条件(ii)满足定理 5 的条件(ii)。

推论的条件(i)满足定理5的条件(i) 是显然的。根据定理5便得(1)的零解的一致渐近稳定性。

这个推论是非常著名的经典结果，即所谓拉什密辛 (Разумйхин) 型定理的一个典型定理。

例8 考察纯量方程

$$\dot{x}(t)=-a(t)x(t)-\sum_{j=1}^{n}b_j(t)x(t-r_j(t)). \tag{21}$$

其中 $a(t)$, $b_j(t)$皆为连续函数，$a(t)\geqslant\delta>0$, $\sum_{j=1}^{n}|b_j(t)|<k\delta$, $0<k<1$, $0\leqslant r_j(t)\leqslant r$。

取 $V_1(x)=\frac{x^2}{2}$,则V_1沿(21)的解的导数为

$$\dot{V}_1(x(t))=-a(t)x^2(t)-\sum_{j=1}^{n}b_j(t)x(t)x(t-r_j(t))$$

$$\leqslant -\delta x^2(t) + \frac{k\delta}{n}\sum_{j=1}^{n} |x(t)|\cdot|x(t-r_j(t))|,$$

取$P_1(V_1(x)) = \alpha V_1(x)$，$\alpha>1$。则当$P_1(V_1(x(t)))>V_1(x(\xi))$，$t-r\leqslant\xi\leqslant t$时，亦即当$\alpha x^2(t)>x^2(\xi)$，$t-r\leqslant\xi\leqslant t$。现分别取 $\xi = t-r_j(t)$，$j=1,2,\cdots,n$，则有 $\alpha x^2(t)>x^2(t-r_j(t))$，$j=1,2,\cdots,n$。因此

$$\dot{V}_1(x(t)) \leqslant -\delta x^2(t) + k\delta\sqrt{\alpha}\, x^2(t)$$
$$= -(1-k\sqrt{\alpha})\delta x^2(t).$$

只要取α使得$k\sqrt{\alpha}<1$，便能满足推论中的条件，故方程(21)的零解是一致渐近稳定的。

下面介绍一个指数稳定的定理。

引理2[46] 若存在泛函V满足：

(i) $v|\phi(0)|^\eta \leqslant V(t,\phi) \leqslant k\|\phi\|_\eta^\eta$,

其中v，η，k为正常数，$\|\phi\|_\eta = \left(|\phi(0)|^\eta + \int_{-r}^{0} |\phi(\theta)|^\eta d\theta\right)^{\frac{1}{\eta}}$。

(ii) $\dot{V}(t,\phi) \leqslant -c|\phi(0)|^\eta$，$(c>0)$。

则方程(1)的解有如下的指数估计：

$$|x(t_0,\varphi)(t)| \leqslant k_1(r)\|\phi\|_\eta e^{-\alpha(r)(t-t_0)},\quad (t\geqslant t_0).$$

其中

$$k_1(r) = \left(\frac{k+\dfrac{cr}{1+r}}{v}\right)^{\frac{1}{\eta}},\quad \alpha(r) = \frac{c}{[(1+r)k+rc]\eta}.$$

证 设$\beta(\theta) = \dfrac{c}{1+r}\theta + \dfrac{rc}{1+r}$,

则 $\beta(-r)=0$，$\beta(0) = \dfrac{rc}{1+r}$，$\beta'(\theta) = \dfrac{\beta(0)}{r}>0$。

置 $V^*(t,\phi) = V(t,\phi) + \int_{-r}^{0}\beta(\theta)|\phi(\theta)|^\eta d\theta$,

由(i)得 $v|\phi(0)|^\eta \leqslant V^*(t,\phi) \leqslant [k+\beta(0)]\|\phi\|_\eta^\eta$, (22)

而
$$\dot{V}^*(t,\phi)=\dot{V}(t,\phi)+\beta(0)|\phi(0)|^r-\beta(-r)|\phi(-r)|^r$$
$$-\int_{-r}^{0}\beta'(\theta)|\phi(\theta)|^r d\theta$$
$$\leqslant-[c-\beta(0)]|\phi(0)|^r-\frac{c}{1+r}\int_{-r}^{0}|\phi(\theta)|^r d\theta$$
$$=-\frac{c}{1+r}\|\phi\|_r^r\leqslant-\frac{c}{1+r}\cdot\frac{V^*(t,\phi)}{k+\beta(0)}$$
$$=-\frac{c}{(1+r)k+rc}V^*(t,\phi)\triangleq-\alpha(r)V^*(t,\phi).\tag{23}$$

由(22)及(23)得到
$$v|x(t_0,\varphi)(t)|^r\leqslant V^*(t,x_t(t_0,\varphi))$$
$$\leqslant V^*(t_0,\varphi)e^{-\alpha(r)(t-t_0)}$$
$$\leqslant[k+\beta(0)]\|\varphi\|_r^r e^{-\alpha(r)(t-t_0)}$$
$$=\left[k+\frac{cr}{1+r}\right]\|\varphi\|_r^r e^{-\alpha(r)(t-t_0)}.$$

因此 $|x(t_0,\varphi)(t)|\leqslant k_1(r)\|\varphi\|_r e^{-\alpha(r)(t-t_0)}$. 证毕

根据引理2，立即得到下面的结果：

定理6 如果满足引理2的条件，则方程(1)的零解为指数稳定。

§3 稳定性的李雅普诺夫函数方法

上节介绍了稳定性中的李雅普诺夫泛函方法。由于泛函$V(t,\phi)$的一般结构比较复杂，故人们更愿意使用它的特殊情形$V(t,\phi(0))$，即李雅普诺夫函数。上节定理2的推论3和定理5的推论，就是采用李雅普诺夫函数方法的经典结果，人们称之为拉什密辛(Разумйхйн,英译为Razumikhin)型定理。近年来，我国一些学者从事这方面的研究，使拉什密辛型定理得到了发展。

现考虑RFDE

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t)。\tag{1}$$

其中$f:\mathbf{R}^+\times C\to\mathbf{R}^n$为连续，$f(t,0)\equiv 0$。

设$V:\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^+$为连续函数，它沿(1)的解的上右导数定义为

$$\dot{V}(t,\phi(0))=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}[V(t+h,x(t,\phi)(t+h))$$

$$-V(t,\phi(0))]。$$

定理1[47] 假定

(i) $u(|x|)\leqslant V(t,x)\leqslant v(|x|)$，$t\in\mathbf{R}^+$，$x\in\mathbf{R}^n$，其中$u$、$v$：$\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$为连续不减函数，$u(0)=v(0)=0$；

(ii) 在任何$\phi\in C$，如果$P(V(t,\phi(0)))>V(t+\theta,\phi(\theta))$，$-r\leqslant\theta\leqslant 0$时，则

$$\dot{V}(t,\phi(0))\leqslant -F(t,|\phi(0)|)+g(t)G(V(t,\phi(0)))。$$

其中P、g、$G:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$，当$s>0$时$P(s)>s$，$G(s)>0$，$G(0)=0$；又$\int_0^\infty g(t)dt<\infty$；对$a>b>0$，有$\lim\limits_{b\to 0^+}\int_b^a\frac{ds}{G(s)}=\infty$；又$F:\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$为连续，当$|\phi(0)|\geqslant\sigma>0$时，$F(t,|\phi(0)|)\geqslant\psi(t,\sigma)>0$，其中$\psi(t,\sigma)$为连续函数，且对于$H>0$和$\sigma>0$，存在$\tilde{T}=\tilde{T}(H,\sigma)>0$，使得对任何的$T>0$，均有$\int_T^{T+\tilde{T}}\psi(t,\sigma)dt\geqslant 2v(H)$。则方程(1)的零解为一致渐近稳定。

证 先证一致稳定性，因为

$$V(t,x(t))\geqslant V(\xi,x(\xi)),\quad t-r\leqslant\xi\leqslant t$$

$$\Rightarrow P(V(t,x(t)))>V(\xi,x(\xi)),\quad t-r\leqslant\xi\leqslant t$$

$$\overset{\text{由(ii)}}{\Longrightarrow}\dot{V}(t,x(t))\leqslant g(t)G(V(t,x(t)))。$$

故满足§2中定理2的推论3，因此方程(1)的零解为一致稳定。

下证一致吸引性。

取定$H>0$，由一致稳定性知存在$\delta>0$，使得当初始函数φ满足$\|\varphi\|\leqslant\delta$时，便有$|x(t)|=|x(t_0,\varphi)(t)|\leqslant H$。

任给$\varepsilon>0(\varepsilon<H)$，记$M=\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant v(H)} G(s)$，取 a 满足 $0<a<\inf\limits_{0.5u(\varepsilon)\leqslant s\leqslant v(H)}[P(s)-s]$，且$a<0.5u(\varepsilon)$。设正整数$N$满足

$$0.5u(\varepsilon)+(N-1)a<v(H)\leqslant 0.5u(\varepsilon)+Na.$$

由于$\int^{\infty} g(t)dt<\infty$，故存在$T=t_0+\beta r$($\beta\geqslant 1$为常数)，使得当$t\geqslant T$时，有$M\int_{t}^{t} g(s)ds\leqslant\lambda$，其中 $\lambda=\min\left(v(H),\frac{a}{2}\right)$

现要证明：存在$T_1>T$，使

$$V(T_1,x(T_1))<0.5u(\varepsilon)+(N-1)a. \tag{2}$$

若不然，则对一切$t>T$，有

$$V(t,x(t))\geqslant 0.5u(\varepsilon)+(N-1)a\geqslant 0.5u(\varepsilon).$$

由条件(i)知$v(|x(t)|)\geqslant 0.5u(\varepsilon)$，因$v$为非减函数，故必存在常数$\sigma>0$，使得 $|x(t)|\geqslant\sigma$。再根据对 F 的假设，有$F(t,|x(t)|)\geqslant\psi(t,\sigma)$。

又

$$\begin{aligned}P(V(t,x(t)))&>V(t,x(t))+a\geqslant 0.5u(\varepsilon)+(N-1)a+a\\&=0.5u(\varepsilon)+Na\geqslant v(H)\geqslant V(\xi,x(\xi)),\\&\quad t-r\leqslant\xi\leqslant t.\end{aligned}$$

由条件(ii)得

$$\begin{aligned}V(T+\tilde{T},x(T+\tilde{T}))&\leqslant V(T,x(T))-\int_{T}^{T+\tilde{T}}\psi(t,\sigma)dt\\&\quad+M\int_{T}^{T+\tilde{T}}g(t)dt\\&\leqslant v(H)-\int_{T}^{T+\tilde{T}}\psi(t,\sigma)dt+\lambda\\&\leqslant 2v(H)-\int_{T}^{T+\tilde{T}}\psi(t,\sigma)dt<0.\end{aligned}$$

这与$V>0$矛盾。故(2)成立，其中T_1可取为$T+\tilde{T}$。

下面证明：当$t\geqslant T_1$时，有

$$V(t,\ x(t))<0.5u(\varepsilon)+(N-1)a+\frac{a}{2}. \tag{3}$$

若不然，必存在$t_2>t_1>T_1$，使得

$$V(t_1,x(t_1))=0.5u(\varepsilon)+(N-1)a, \tag{4}$$

$$V(t_2,x(t_2))=0.5u(\varepsilon)+(N-1)a+\frac{a}{2}, \tag{5}$$

且
$$V(t_1,x(t_1))\leqslant V(t,x(t))\leqslant V(t_2,x(t_2)),\ t_1\leqslant t\leqslant t_2. \tag{6}$$

由(3)、(6)，$P(V(t,x(t)))>V(t,x(t))+a\geqslant V(t_1,x(t_1))+a$ $=0.5u(\varepsilon)+(N-1)a+a=0.5u(\varepsilon)+Na\geqslant v(H)\geqslant V(\xi,x(\xi))$，$t-r\leqslant\xi\leqslant t$，$t_1\leqslant t\leqslant t_2$。

再由条件(ii)得

$$V(t_2,x(t_2))\leqslant V(t_1,x(t_1))+M\int_{t_1}^{t_2}g(t)dt<u(\varepsilon)+(N-1)a+\lambda.$$

这与(5)矛盾，故(3)成立。

下面用T_1代替T，采用上面的论证方法，可知存在$T_2=T_1+\tilde{T}$，使得$t\geqslant T_2$时有

$$V(t,x(t))<0.5u(\varepsilon)+(N-1)a.$$

同样又存在$T_3=T_2+\tilde{T}$，使得当$t\geqslant T_3$时，有

$$V(t,x(t))<0.5u(\varepsilon)+(N-2)a+\frac{a}{2}.$$

继续做下去，知存在 $T_{2N}=T_{2N-1}+\tilde{T}$，使得当$t\geqslant T_{2N}$时，有

$$V(t,x(t))<0.5u(\varepsilon)+a<u(\varepsilon).$$

由条件(i)即得 $|x(t)|<\varepsilon\ (t\geqslant T_{2N})$。

由于$T_{2N}=T+2N\tilde{T}=t_0+\beta r+2N(\tilde{T}+r)$且$\beta r+2N\tilde{T}$与$t_0$无关，故方程(1)的零解为一致渐近稳定。

推论1 若$F(t,s)\equiv\psi(t)W(s)$，其中$\psi:\mathrm{R}^+\to\mathrm{R}^+$为连续，对任给的$\beta>0$，存在$\tilde{T}=\tilde{T}(\beta)$，使得对任一个$T>0$都有$\int_T^{t+\tilde{T}}\psi(s)ds\geqslant\beta$；$W:\mathrm{R}^+\to\mathrm{R}^+$为连续非减，当$s>0$时$W(s)>0$，定理2的其他条件不变，则方程(1)的零解为一致渐近稳定。

证明是显然的，从略。

推论2 假设$F:\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$，$N$、$\psi$、$W:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$，皆为连续函数。如果满足下列条件：

(i) 定理1的条件(i)成立；

(ii) 当$V(t+\theta,\varphi(0))\leqslant N(t)$，$-r\leqslant\theta\leqslant 0$时，有

$$\dot V(t,\varphi(0))\leqslant F(t,V(t,\varphi(0)),N(t));$$

(iii) 当$V>0$时，$F(t,V,V)\leqslant-\psi(t)W(V)$，其中的函数，$\psi(t)$和$W(V)$如推论1所规定。

(iv) 当$N_i\geqslant\alpha>0$，$i=1,2$时，有

$$|F(t,V,N_1)-F(t,V,N_2)|\leqslant\psi(t)k(\alpha)|N_1-N_2|,$$

其中$k(\alpha)>0$。

则方程(1)的零解为一致渐近稳定。

证 取$P(V)=V+\dfrac{1}{4K(\alpha)}W(V)$，则当$V>0$时 $P(V)>V$，

又取$N(t)=P(V(t,x(t)))$，

根据条件(ii)，当$V(\xi,x(\xi))\leqslant N(t)$，$t-r\leqslant\xi\leqslant t$时，有

$$\begin{aligned}\dot V(t,x(t))\leqslant F(t,V(t,x(t)),N(t))\leqslant F(t,V(t,&x(t)),V(t,x(t)))+|F(t,V(t,x(t)),\\&N(t))-F(t,V(t,x(t)),V(t,x(t))|.\end{aligned}$$

根据条件(iii)和(iv)得

$$\begin{aligned}\dot V(t,x(t))&\leqslant-\psi(t)W(V(t,x(t)))+\psi(t)K(\alpha)\ |N(t)\\&\quad-V(t,x(t))|=-\psi(t)W(V(t,x(t)))\\&\quad+\psi(t)K(\alpha)|P(V(t,x(t)))-V(t,x(t))|\\&=-\frac{3}{4}\psi(t)W(V(t,x(t))).\end{aligned}$$

可见满足推论1的条件，故结论成立，证毕。

推论3 如果将定理1中关于$\psi(t,\sigma)$的条件改为$\int^{\infty}\psi(t,\sigma)dt=\infty$，其他条件保留；或将推论1，2中关于$\psi(t)$的条件改为$\int^{\infty}\psi(t)dt=\infty$，其他条件保留，则方程(1)的零解为渐

近稳定。

证明与定理1类似，从略。

例 考察纯量方程

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + b(t)x(t-r(t)) + f(t, x_t), \qquad (7)$$

其中f: $\mathbf{R}^+ \times C_H \to \mathbf{R}$,连续;$f(t, 0)=0$, $0 \leqslant r(t) \leqslant r$, $r(t)$连续;$b(t)$为连续函数;a为正常数，此外，f还满足

$$|f(t, x_t)| \leqslant \bar{\psi}(t) \|x_t\|, \quad \bar{\psi}(t) \geqslant 0\text{为连续。}$$

现取$V(x) = x^2$，则V沿方程(7)的解的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) &= 2x(t)[-ax(t) + b(t)x(t-r(t)) \\ &\quad + f(t, x_t)] \leqslant -2ax^2(t) \\ &\quad + 2|x(t)|[|b(t)| \cdot |x(t-r(t))| \\ &\quad + \bar{\psi}(t)\|x_t\|].\end{aligned}$$

当$V(x(t+\theta)) \leqslant N(t)$, $-r \leqslant \theta \leqslant 0$时，有

$$\dot{V}(x(t)) \leqslant -2aV(x(t)) + 2\sqrt{V(x(t))}[|b(t)|$$

$+\bar{\psi}(t)] \sqrt{N(t)} \triangleq F(t, V(x(t)), N(t))$，故满足推论2的条件(ii)。

而 $F(t, V, V) = -2[a - |b(t)| - \bar{\psi}(t)]V$, 令$\psi(t) = a - |b(t)| - \bar{\psi}(t)$，如果$\psi(t)$满足推论1的条件，则$F$满足推论2的条件(iii)。

又当$N_1, N_2 \geqslant \alpha > 0$, $0 < V \leqslant H$时，有$|F(t, V, N_1) - F(t, V, N_2)| \leqslant 2\sqrt{V}[|b(t)| + \bar{\psi}(t)]\dfrac{|N_1 - N_2|}{\sqrt{N_1} + \sqrt{N_2}}$

$$\leqslant \bar{K}(\alpha)[|b(t)| + \bar{\psi}(t)]|N_1 - N_2|, \qquad \bar{K}(\alpha) = \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{\alpha}},$$

如果存在$\delta > 0$使$|b(t)| + \bar{\psi}(t) \leqslant \dfrac{a}{1+\delta}$对一切$t \in \mathbf{R}^+$成立，

则有 $\delta[|b(t)| + \bar{\psi}(t)] \leqslant a - |b(t)| - \bar{\psi}(t) = \psi(t)$, 令 $K(\alpha) = \dfrac{\bar{K}(\alpha)}{\delta}$，便得

$$K(a)[|b(t)|+\bar{\psi}(t)]|N_1-N_2|=\frac{K(a)}{\delta}\cdot\delta[|b(t)|$$

$$+\bar{\psi}(t)]|N_1-N_2|\leqslant K(a)\psi(t)|N_1-N_2|.$$

故满足推论2的条件(iv)。

满足推论2的条件(i)是显然的，故方程(7)的零解为一致渐近稳定。

下面的定理利用分离变量型的李雅普诺夫函数来建立稳定性的判别准则(见文[227])。

定理2 设函数ψ_s: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，且在区间$(-\delta_s,\delta_s)$内连续或仅有第一、三类间断点，($s=1, 2, \cdots, n$; $\delta_s>0$)，如果满足下列的条件：

(i) 当$x_s\neq0$时 $\psi_s(x_s)x_s>0$ ($s=1, 2, \cdots, n$)；

(ii) 设$V(x)=\sum_{s=1}^{n}\int_0^{x_s}\psi_s(u)du$，对任一$\mathbf{R}^n$值的连续函数$x(t)$及任一$t_0\geqslant0$，当$\|x_t\|\leqslant H$ ($H<\delta_s, s=1,2,\cdots,n$) 及$P(V(x(t)))>V(x(\xi))$，$t-r\leqslant\xi\leqslant t$，$t\geqslant t_0\geqslant a+r$时，有

$$\sum_{s=1}^{n}\psi_s(x_s(t))f_s(t, x_t)\leqslant0. \tag{8}$$

其中P：$\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$为连续，且当$s>0$时$P(s)>s$。

(iii) f将$\mathbf{R}\times C$中的有界集映射为$\mathbf{R}^n$中的有界集，则方程(1)的零解为一致稳定。

证 $V(x)$显然为正定且具有无限小上界，故在$[0, H']$($H'<H$)存在连续单调增加函数$u(s)$、$v(s)$，$u(0)=v(0)=0$，使得

$$u(|x|)\leqslant V(x)\leqslant v(|x|),\quad x\in\mathbf{R}^n. \tag{9}$$

任给$\varepsilon>0$ ($\varepsilon<H'$)，取$\varepsilon_1=\min(\varepsilon,u(\varepsilon))$，记$\inf\limits_{\frac{\varepsilon_1}{2}\leqslant s\leqslant\varepsilon_1}[P(s)-s]=\tilde{a}$，取$a$：$0<a<\tilde{a}$。设$N$为使$\frac{\varepsilon_1}{2}+Na\geqslant\varepsilon_1$成立的最小正整数，又取正数$\mu<\varepsilon_1-\left[\frac{\varepsilon_1}{2}+(N-1)a\right]$，取正数$\delta$使$v(\delta)$

$<\frac{\varepsilon_1}{2}$，由(9)，要证(1)的零解为一致稳定，只须证明当$t \geqslant t_0 \geqslant \alpha + r$，$x_{t_0} = \varphi$，$|\varphi| < \delta$时，有

$$V(x(\xi)) \equiv V(x(t_0, \varphi)(t)) < \varepsilon_1. \tag{10}$$

若(10)不成立，当$t_0 - r \leqslant \xi \leqslant t_0$时

$$V(x(\xi)) \leqslant v(|x(\xi)|) \leqslant v(\delta) < \frac{\varepsilon_1}{2},$$

则存在$\widetilde{t} > t^* > t_0$使当$t_0 \leqslant t < \widetilde{t}$时$V(x(t)) < \varepsilon_1$，$V(x(\widetilde{t})) = \varepsilon_1$，$V(x(t^*)) = \frac{\varepsilon_1}{2} + (N-1)a$且当$t \in (t^*, \widetilde{t})$时，$V(x(t^*)) < V(x(t)) < V(x(\widetilde{t}))$，从而当$\xi \leqslant t$，$t^* \leqslant t \leqslant \widetilde{t}$时，有

$$P(V(x(t))) \geqslant V(x(t)) + \widetilde{a} > V(x(t)) + a \geqslant \frac{\varepsilon_1}{2} + (N-1)a + a \geqslant \varepsilon_1 \geqslant V(x(\xi)).$$

记　　$M = \max\{|f_s(t, \phi)| : s = 1,2,\cdots,n,\ t^* \leqslant t \leqslant \widetilde{t},\ \|\phi\| \leqslant H\}$，取正数$\varepsilon' < \varepsilon_1 - \left[\frac{\varepsilon_1}{2} + (N-1)a\right]$，$v < \varepsilon'/n(\widetilde{t} - t^*)M$。

由解的连续性及$\psi_s(x_s)$的条件，在$[t^*, \widetilde{t}]$内$\psi_s(x_s(t))$的间断点为有限个，故可在$[t^*, \widetilde{t}]$内插入m个分点：

$$t^* = t_0' < t_1' < \cdots < t_{m-1}' < t_m' = \widetilde{t}.$$

使得除某些$x_s(t_i')$ $(i = 1,2,\cdots,m)$外，以$x_s(t_{i-1}')$和$x_s(t_i')$ $(i = 1,2,\cdots,m)$ 为端点的区间内不再含$\psi_s(x_s)$的间断点，且使得当t，$\bar{t}_i \in [t_{i-1}', t_i']$时

$$|\psi_s(x_s(\bar{t}_i)) - \psi_s(x_s(t))| < v \quad (i = 1, 2, \cdots, m;\ s = 1, 2, \cdots, n).$$

化(1)为等价积分方程且用中值定理，有

$$\int_0^{x_s(t_i')} \psi_s(x_s)dx_s = \int_0^{x_s(t_{i-1}') + \int_{t_{i-1}'}^{t_i'} f_s(t, x_t)dt} \psi_s(x_s)dx_s$$

$$=\int_0^{x_s(t'_{i-1})}\psi_s(x_s)\,dx_s$$

$$+\int_{x_s(t'_{i-1})\pm 0}^{x_s(t'_{i-1})+\int_{t'_{i-1}}^{t'_i}f_s(t,x_t)dt-0}\psi_s(x_s)dx_s$$

$$=\int_0^{x_s(t'_{i-1})}\psi_s(x_s)\,dx_s$$

$$+\int_{t'_{i-1}}^{t'_i}f_s(t,x_t)dt\cdot\psi_s(x_s(\bar{t}_i))$$

$$(\bar{t}_i\in(t'_{i-1},\ t'_i))$$

$$=\int_0^{x_s(t'_{i-1})}\psi_s(x_s)dx_s$$

$$+\int_{t'_{i-1}}^{t'_i}[\psi_s(x_s(\bar{t}))-\psi_s(x_s(t))$$

$$+\psi_s(x_s(t))]f_s(t,\ x_t)dt$$

$$<\int_0^{x_s(t'_{i-1})}\psi_s(x_s)dx_s$$

$$+\int_{t'_{i-1}}^{t'_i}\psi_s(x_s(t))f_s(t,x_t)dt+vM(t'_i$$

$$-t'_{i-1}).$$

于是有 $$V(x(t'_i))=\sum_{s=1}^{n}\int_0^{x_s(t'_i)}\psi_s(x_s)dx_s$$

$$<\sum_{s=1}^{n}\int_0^{x_s(t'_{i-1})}\psi_s(x_s)dx_s$$

$$+\int_{t'_{i-1}}^{t'_i}\Big[\sum_{s=1}^{n}\psi_s(x_s(t))f_s(t,\ x_t)\Big]dt$$

$$+nvM(t'_i-t'_{i-1}). \tag{11}$$

由(8)式得

$$V(x(t'_i))<V(x(t'_{i-1}))+nvM(t'_i-t'_{i-1}).$$

将上式两边从$i=1$到$i=m$求和并注意到v的取法，得

$$V(x(\tilde{t}))<V(x(t^*))+nvM(\tilde{t}-t^*)<V(x(t^*))+\varepsilon'$$

$$<\frac{1}{2}\varepsilon_1+(N-1)a+\varepsilon_1-\left[\frac{\varepsilon_1}{2}+(N-1)a\right]$$

$$=\varepsilon_1.$$

与$V(x(\tilde{t}))=\varepsilon_1$矛盾，故(10)成立，证毕。

定理3 假设

(i) 定理2的条件(i)成立；

(ii) 定理2的条件(ii)中的(8)式改为

$$\sum_{s=1}^{n}\psi_s(x_s(t))f_s(t,x_t)\leqslant -F(t,|x(t)|). \tag{12}$$

其中F：$[\alpha,\infty)\times R^+\to R^+$，连续，$F(t,0)=0$，$F(t,\lambda)$当$\lambda\neq0$时为正且关于$\lambda$非减，此外，

$$\lim_{T\to\infty}\int_{\tilde{t}}^{\tilde{t}+T}F(t,\lambda)dt=\infty$$

对所有$\tilde{t}\geqslant\alpha$一致地成立。

则方程(1)的零解为一致渐近稳定。

证 由定理2知方程(1)的零解为一致稳定，因此，对$H>0$，存在$\delta>0(\delta<H)$使得当初始函数φ满足$\|\varphi\|<\delta$时，对一切$t\geqslant t_0\geqslant\alpha+r$有

$$|x(t)|\equiv|x(t_0,\varphi)(t)|<H.$$

从而 $V(x(t))\leqslant v(H)$。

要证方程(1)的零解为一致渐近稳定，只需证明对任意的$\varepsilon>0(\varepsilon<H)$，取$\varepsilon_1<\min(\varepsilon,u(\varepsilon))$，存在$T^*(\varepsilon)>0$，使对一切$t\geqslant t_0+T^*$有

$$V(x(t))\leqslant\varepsilon_1. \tag{13}$$

记 $\inf\limits_{\varepsilon_1\leqslant s\leqslant v(H)}[P(s)-s]=\tilde{a}$，取$a$：$0<a<\tilde{a}$，设$N$为使$\varepsilon_1+Na\geqslant v(H)$成立的最小正整数，又记$c_i=\varepsilon_1+(N-i)a$，

$i=1,2,\cdots,N$, $\mu=\min\left(\frac{a}{2}, v(H)-c_1\right)>0$, 取正数$\varepsilon'<\mu$及正数$\lambda$使$v(\lambda)<\varepsilon_1$, 由所设$F(t,\lambda)$的条件，对于$v(H)+\varepsilon'$，存在$T(\varepsilon)>0$，使对一切$\tilde{t}\geqslant a$，$\tilde{T}\geqslant T$有

$$\int_{\tilde{t}}^{\tilde{t}+\tilde{T}} F(t,\lambda)dt>v(H)+\varepsilon'. \tag{14}$$

第一步，先证明存在$T_1\in[t_0, t_0+T]$使

$$V(x(T_1))\leqslant c_1. \tag{15}$$

事实上，若不然，则对于$t_0\leqslant t\leqslant t_0+T$有$V(x(t))>c_1$，于是

$$P(V(x(t)))\geqslant V(x(t))+\tilde{a}>V(x(t))+a>c_1+a\geqslant c_1+Na$$

$$\geqslant v(H)\geqslant V(x(\xi)),\ (t-r\leqslant\xi\leqslant t,\ t_0\leqslant t\leqslant t_0+T=\tilde{t}_1).$$

记$t_0+\tilde{T}=\tilde{t}_1$，$M=\max\{|f_s(t,\phi)|: t_0\leqslant t\leqslant\tilde{t}_1,\ \|\phi\|\leqslant H,\ s=1,2,\cdots,n\}$，取正数$v<\varepsilon'/nMT$，在$[t_0,\tilde{t}_1]$插入$m$个分点：

$$t_0=t'_0<t'_1<t'_2<\cdots<t'_{m-1}<t'_m=\tilde{t}_1,$$

按定理2的同样证法，类似于(11)，可得

$$V(x(t'_i))=\sum_{s=1}^{n}\int_0^{x_s(t'_i)}\psi_s(x_s)dx_s$$

$$<\sum_{s=1}^{n}\int_0^{x_s(t'_{i-1})}\psi_s(x_s)dx_s$$

$$+\int_{t'_{i-1}}^{t'_i}\sum_{s=1}^{n}[\psi_s(x_s(t))f_s(t,x_t)]dt$$

$$+(t'_i-t'_{i-1})nMv.$$

由条件(ii)得

$$V(x(t'_i))<V(x(t'_{i-1}))-\int_{t'_{i-1}}^{t'_i}F(t,\lambda)dt+(t'_i$$

$$-t'_{i-1})nMv,\quad i=1,2,\cdots,m.$$

两边从$i=1$到$i=m$求和可得

$$V(x(t_0+T))=V(x(t_m'))<V(x(t_0))-\int_{t_0}^{t_m'} F(t,\lambda)dt$$
$$+\varepsilon'<v(H)-v(H)-\varepsilon'+\varepsilon'=0.$$
导出了矛盾，故(15)成立。

下证对一切$t\geqslant T_1$，从而对一切$t\geqslant t_0+T$有
$$V(x(t))\leqslant c_1+\mu. \tag{16}$$
若不然，则存在$t_2>t_1\geqslant T_1$使$V(x(t_1))=c_1, V(x(t_2))=c_1+\mu$，且当$t_1\leqslant t\leqslant t_2$时，$V(x(t_1))\leqslant V(x(t))\leqslant V(x(t_2))$。于是
$$P(V(x(t)))>V(x(t))+a\geqslant c_1+a\geqslant V(x(\xi)),$$
$$t-r\leqslant\xi\leqslant t,\quad t_1\leqslant t\leqslant t_2.$$
在$[t_1, t_2]$插入m个分点，按定理2的同样证法，可得
$$V(x(t_2))<V(x(t_1))+\varepsilon'<c_1+\mu.$$
导出与$V(x(t_2))=c_1+\mu$矛盾，故(16)式成立。

第二步，证法与第一步相同，可先证得存在$T_2\in[t_0+T, t_0+2T]$使$V(x(T_2))\leqslant c_2+\mu$，而后又同样可证得对一切$t\geqslant T_2$，从而对一切$t\geqslant t_0+2T$，有$V(x(t))\leqslant c_1$。

重复以上方法，经$2N$步后便证得(13)成立，这里$T^*=2NT$，证毕。

§4 自治系统的李雅普诺夫泛函

在本节中，我们将对自治的泛函微分方程进行讨论，着重介绍不变性原理及不稳定定理以及它们的应用。

考虑自治方程
$$\dot{x}(t)=f(x_t), \tag{1}$$
其中$f: C\to R$为完全连续且方程(1)的解对初值连续依赖，过$(0, \varphi)$的解记为$x(\varphi)$。

定义1 集合$\gamma^+(\varphi)\overset{\text{def}}{=\!=\!=}\{x_t(\varphi): t\geqslant 0\}$称为方程(1)的解在$C$空间中的正半轨。

定义2 若存在序列$t_n\to\infty$（当$n\to\infty$时）使$x_{t_n}(\varphi)\to\psi\in C$，则

称ψ是$\gamma^+(\varphi)$的一个ω极限点，$\gamma^+(\varphi)$的一切ω极限点的集合称为$\gamma^+(\varphi)$的ω极限集，记作$\omega(\gamma^+(\varphi))$。

定义3 设$A\subset C$，如果当$\varphi\in A$时对一切$t\in R$都有$x_t(\varphi)\in A$，则称A为不变集。

引理1 若方程(1)的正半轨$\gamma^+(\varphi)$为有界，则$\gamma^+(\varphi)$为相对紧并且$\omega(\gamma^+(\varphi))$是非空、紧、连通及不变的

证明略，可参阅[28]第4章中的79页至82页

如果泛函V：$C\to R$为连续，则它沿方程(1)的解的导数定义为

$$\dot{V}(\phi)=\dot{V}_{(1)}(\phi)=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}[V(x_h(\phi))-V(\phi)]。$$

定义4 对于C中的子集G，如果$V:C\to R$在G的闭包ClG上连续且在G上$\dot{V}\leqslant 0$，则称V是G上的李雅普诺夫泛函。

设 $S=\{\phi:\phi\in ClG,\ \ \dot{V}(\phi)=0\}$，

$M=$方程(1)在S中的最大不变集。

定理1（不变性原理） 如果V是G上的李雅普诺夫泛函，$x_t(\varphi)$是方程(1)的有界解且留在G内，则当$t\to\infty$时$x_t(\varphi)\to M$[注]。

证 由引理1知$\gamma^+(\varphi)$为相对紧并且具有非空的ω极限集$\omega(\gamma^+(\varphi))$。又因在$G$上$\dot{V}\leqslant 0$，故$V(x_t(\varphi))$非增且有下界，则当$t\to\infty$时一定趋于一个极限$a$，由于$V$在$ClG$上连续，所以对$\psi\in\omega(\gamma^+(\varphi))$便有$V(\psi)=a$，从而$\dot{V}(\psi)=0$，又由引理1知$\omega(\gamma^+(\varphi))$是不变的，故$\omega(\gamma^+(\varphi))\subseteq M$，因$x_t(\varphi)\to\omega(\gamma^+(\varphi))$，故$x_t(\varphi)\to M$，证毕。

【注】 当$t\to\infty$时$x_t(\varphi)\to M$的含义是指

$$\lim_{t\to\infty}\inf\{\|x_t(\varphi)-\phi\|:\phi\in M\}=0。$$

定理2 如果V是$U_a=\{\phi\in C:V(\phi)<\alpha\}$上的李雅普诺夫泛函，且存在常数$K=K(\alpha)$使得$\phi\in U_a$时就有$|\phi(0)|<K$，则对任何的$\varphi\in U_a$，当$t\to\infty$时都有$x_t(\varphi)\to M$。

证 如果$\varphi\in U_a$且在U_a上$\dot{V}\leqslant 0$，则当$t\geqslant 0$时$x_t(\varphi)\in U_a$，由条件知$t\geqslant 0$时有$|x(\varphi)(t)|\leqslant K$，这说明$x_t(\varphi)$有界，根据定理1便得定理2之证，证毕。

推论 设$V:C\to R$为连续，$V(0)=0$，又存在非负连续非减函数$u(r)$和$w(r)$，当$r\to\infty$时$u(r)\to\infty$，$w(0)=0$，使得

(i) $u(|\phi(0)|)\leqslant V(\phi)$;

(ii) $\dot{V}(\phi)\leqslant -w(|\phi(0)|)$.

则方程(1)的零解为稳定，所有解为有界，如果 $w(r)$为正定，则当$t\to\infty$时所有解趋于零。

证 根据$V(\phi)$为连续及$V(0)=0$的性质，对任给$\varepsilon>0$，必存在$\delta>0$，使得$\|\phi\|<\delta$时$V(\phi)<u(\varepsilon)$，再由(ii)，当$\|\phi\|<\delta$时有

$$u(|x(t)|)\leqslant V(x_t)\leqslant V(\phi)<u(\varepsilon),\quad 即|x(t)|<\varepsilon.$$

故方程(1)的零解是稳定。

根据$r\to\infty$时$u(r)\to\infty$的性质，知方程(1)的所有解均为有界。

如果$w(r)$为正定，则定理2的条件被满足，事实上，对任何的$\alpha>0$，当$\phi\in U_a$时，由(i)得$u(|\phi(0)|)\leqslant V(\phi)<\alpha$，再由$u$的非减性知存在$K>0$，使得$|\phi(0)|<K$，故由定理2知当$t\to\infty$时$x_t(\phi)\to M$。

现取 $S=\{\phi\in ClU_a:\dot{V}(\phi)=0\}$，

当$\dot{V}(\phi)=0$时，由条件(ii)得$\omega(|\phi(0)|)\leqslant -\dot{V}(\phi)=0$，故$|\phi(0)|=0$，因此

$$S\subseteq\{\phi\in ClU_a:\phi(0)=0\},$$

而 $$M=\{0\}.$$

故$\phi\in U_a$时，$x_t(\phi)\to 0\ (t\to\infty)$，由$\alpha>0$的任意性，故知对一切$\phi\in C$，结论成立，证毕。

定理3(不稳定性) 设开集$U\subseteq C$包含C空间的零元素，N是零元素的一个邻域，假定

(i) V是$G=N\cap U$上的一个李雅普诺夫泛函;

(ii) $M\cap G$或为空集或为单点集$\{0\}$;

(iii)　当$\phi\in G$，$\phi\neq 0$时，$V(\phi)<\eta$；

(iv)　$V(0)=\eta$及$V(\phi)=\eta$，当$\phi\in\partial G\cap N$时。

如果$N_0\subseteq N$是C的零元素的一个有界邻域，则对任何非零元素$\phi\in G\cap N_0$，总存在一个时刻τ使$x_\tau(\phi)\in\partial N_0$。

证　若ϕ为$G\cap N_0$中的非零元素，则当$t\geqslant 0$且$x_t(\phi)$保留在$N_0\cap G$时，有$V(x_t(\phi))\leqslant V(\phi)<\eta$，如果对所有的$t\geqslant 0$都有$x_t(\phi)\in N_0\cap G$，则$\omega$极限集$\omega(\gamma^+(\phi))\subseteq N_0\cap G$，由$\omega(\gamma^+(\phi))$的不变性及条件(ii)知$\omega(\gamma^+(\phi))=\{0\}$，另一方面，由条件(iv)知$V(0)=\eta$，这是一个矛盾，故必存在$\tau>0$，使得$x_\tau(\phi)\in\partial(N_0\cap G)$，再由条件(iv)即知$x_\tau(\phi)\in\partial N_0$，证毕。

例1　考察方程

$$\dot{x}(t)=ax^3(t)+b^3x^3(t-r). \tag{2}$$

其中a、b、r为常数，$a\neq 0$，$r>0$。

设　$$V(\phi)=-\frac{\phi^4(0)}{2a}+\int_{-r}^{0}\phi^6(\theta)d\theta.$$

则　$$\dot{V}(\phi)=-\left[\phi^6(0)+\frac{2b}{a}\phi^3(0)\phi^3(-r)+\phi^6(-r)\right].$$
$$\leqslant-\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\phi^6(0).$$

故当$|b|\leqslant|a|$时V是C上李雅普诺夫泛函，下面分五点进行讨论：

①　若$a<0$，$|b|\leqslant|a|$，则由于$V(\phi)\geqslant\dfrac{\phi^4(0)}{2|a|}$及推论知方程(2)的零解为稳定且一切解为有界。

②　若$a<0$，$|b|<|a|$，则$S=\{\phi\in C:\phi(0)=\phi(-r)=0\}$，显然$M=\{0\}$，由推论知方程(2)的零解是全局渐近稳定的。

③　若$a<0$，$b=a$，则$S=\{\phi\in C:\phi(0)=-\phi(-r)\}$，因此，$M$必须是满足$x(t)=-x(t-r)$的那些解的初值所成的集合，由方程(2)有$\dot{x}=0$从而$x(t)=c$（常数），但$x(t)=-x(t-r)$必然导致$c=0$，故$M=\{0\}$，因此方程(2)的零解为全局渐近稳定。

④　若$a<0$，$b=-a$，则$S=\{\phi\in C:\phi(0)=\phi(-r)\}$，用类似于上述的方法得$M=\{[-r,0]$上的常数函数$\}$，现假定$t\to\infty$时

$V(x_t(\phi))\to c$(常数)，则$\omega(\gamma^+(\phi))\subseteq V^{-1}(c)\cap M$，而$V^{-1}(c)\cap M$是由有限个数目的常函数所组成的，这是因为$V(\alpha)$在不确定的$\alpha$中是六次多项式，由于$\omega(\gamma^+(\phi))$为连通，故$\omega(\gamma^+(\phi))$为单点集，因此方程(2)的每一个解趋向一个常数。

⑤ 若$a>0,|b|<a$ （或$b=a$）．则集合$G=\{\phi\in C:V(\phi)<0\}$是非空的正不变集，如前面那样可知$M=\{0\}$，于是由定理3便知方程(1)的零解是不稳定的，事实上，从G出发的解都是无界的。

例2 考察纯量方程

$$\dot{x}(t)=-\int_{-r}^{0}a(-\theta)g(x(t+\theta))d\theta,\quad r>0. \tag{3}$$

其中$a(t)$是定义在$[0,r]$上的非负连续函数并且$a(r)=0$，此外还假定$a(t)$具有一阶、二阶的连续导数并且$\dot{a}(t)\leqslant 0$，$\ddot{a}(t)\geqslant 0$；当$|x|\to\infty$时$G(x)\xlongequal{\text{def}}\int_0^x g(s)ds\to\infty$.

方程(3)显然是方程(1)的特殊情形，即

$$f(\phi)=-\int_{-r}^{0}a(-\theta)g(\phi(\theta))d\theta.$$

通过变换，(3)可写成

$$\dot{x}(t)=-\int_{t-r}^{t}a(t-u)g(x(u))du. \tag{4}$$

方程(4)的解显然满足方程

$$\ddot{x}(t)+a(0)g(x(t))=-\int_{t-r}^{t}\dot{a}(t-u)g(x(u))du \tag{5}$$

或

$$\ddot{x}(t)+a(0)g(x(t))=-\dot{a}(r)\int_{-r}^{0}g(x(t+\theta))d\theta+\int_{-r}^{0}\ddot{a}(-\theta)\left(\int_{\theta}^{0}g(x(t+u))du\right)d\theta. \tag{6}$$

现取

$$V(\phi)=G(\phi(0))-\frac{1}{2}\int_{-r}^{0}\dot{a}(-\theta)\left[\int_{\theta}^{0}g(\phi(s))ds\right]^2d\theta,$$

则V沿方程(3)的解的导数为

$$\dot{V}(\phi)=\frac{1}{2}\dot{a}(r)\left[\int_{-r}^{0}g(\phi(\theta))d\theta\right]^2$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-r}^{0}\ddot{a}(-\theta)\left[\int_{\theta}^{0}g(\phi(s))ds\right]^2 d\theta.$$

由对a的假设得$\dot{V}(\phi)\leqslant 0$，再由推论即知(3)的一切解为有界。

现在我们利用定理1来考察这个方程，对任何的$s\in[0, r]$，设

$$H_s(\phi)=\int_{-s}^{0}g(\phi(\theta))d\theta. \tag{7}$$

则定理1中的集合S可定义为

$$S=\{\phi\in C:当\dot{a}(r)\neq 0时H_r(\phi)=0,$$
$$当\ddot{a}(s)\neq 0时H_s(\phi)=0\}.$$

由方程(6)，方程(3)在S中的最大不变集M满足

$$M\subseteq\{x_t\in C:x为方程\ddot{x}+a(0)g(x)=0的有界解并且$$
$$当\dot{a}(r)\neq 0时H_r(x_t)=0，当\ddot{a}(s)\neq 0时H_s(x_t)=0,$$
$$t\in(-\infty, \infty)\}.$$

如果$\dot{a}(r)\neq 0$，x满足方程$\ddot{x}+a(0)g(x)=0$为有界并且对$t\in(-\infty, \infty)$有$H_r(x_t)=0$，则$\dot{x}(t)=\dot{x}(t-r)$。所以，$x(t)=kt+$(周期为r的周期函数)，又由x的有界性知对所有的t均有$x(t)=x(t-r)$，如果存在一个s_0使$\ddot{a}(s_0)\neq 0$，则必存在包含s_0的区间I_{s_0}，使得$s\in I_{s_0}$时$\ddot{a}(s)\neq 0$，如果x满足方程$\ddot{x}+a(0)g(x)=0$为有界，且当$t\in(-\infty, \infty)$，$s\in I_{s_0}$时$H_s(x_t)=0$，则对每一个$s\in I_{s_0}$，$\dot{x}(t)$是以s为周期的周期函数，因此，$\dot{x}(t)$为常数，再由x的有界性知x为常数。

定理4 对于方程(3)，如果g具有孤立的零点，则

(i) 如果存在一个s使$\ddot{a}(s)>0$，则对任何的$\phi\in C$，ω极限集$\omega(\gamma^+(\phi))$为方程(3)的一个平衡点，也就是g的一个零点；

(ii) 如果$\ddot{a}(s)\equiv 0$，$\dot{a}\neq 0$，则对任何$\phi\in C$，ω极限集$\omega(\gamma^+(\phi))$是一个周期为r的单周期轨道(Orbit)，并由方程

$$\ddot{x}+a(0)g(x)=0 \tag{8}$$

的一个解所产生。

证 (i) 由前面的讨论知$\omega(\gamma^+(\phi))$仅仅含有平衡点，因此仅仅含有g的零点，因为$\omega(\gamma^+(\phi))$是连通的而g的零点是孤立的，故定理的结论(i)成立。

(ii) 假定$a(s)\equiv 0$，选取$a(s)=(r-s)/r$，如果x是方程(8)的r周期解，则

$$-\int_{t-r}^{t}\frac{r-(t-u)}{r}g(x(u))du=\int_{t-r}^{t}\frac{r-(t-u)}{r}\ddot{x}(u)du$$

$$=\dot{x}(u)\frac{r-(t-u)}{r}\bigg|_{t-r}^{t}$$

$$-\int_{t-r}^{t}\frac{1}{r}\dot{x}(u)du=\dot{x}(t)。$$

即x是方程(3)的一个解，由前面的讨论知道，M是由方程(8)的r周期解所组成。

首先证明：如果$\omega(\gamma^+(\phi))$含有方程(3)的一个平衡点c，则$\omega(\gamma^+(\phi))=c$，我们知道$\omega(\gamma^+(\phi))$是一个闭连通集且必为方程(8)的r周期轨道的并集，如果c不是$G(x)$的局部极小值，则由方程(8)的轨道在$(x,\dot{x})$—平面中的性质可知除c外$\omega(\gamma^+(\phi))$不可能有r周期轨道，如果c是$G(x)$的局部极小值，则对$\phi\neq c$但在c的一个邻域时，有

$$V(\phi)-G(c)=G(\phi(0))-G(c)$$

$$+\frac{1}{2r}\int_{-r}^{0}\left[\int_{\theta}^{0}g(\phi(s))ds\right]^2d\theta>0.$$

由于当$\psi\in\omega(\gamma^+(\phi))$时$V(x_t(\psi))$等于常数，故$\omega(\gamma^+(\phi))=c$。

因此，假定$\omega(\gamma^+(\phi))$不含有方程(8)的常数解，由于(8)的解必满足方程$\frac{\dot{x}^2}{2}+G(x)=$常数，故任何周期轨道必须对称于$x$—轴，设$u(t,\alpha)$为方程(8)的具有最小周期为$p$的非常数周期解，并且$u(0,\alpha)=\alpha$，$\dot{u}(0,\alpha)=0$，则有整数$m$使得$mp=r$，如果在$\omega(\gamma^+(\phi))$中存在一个周期轨道的区间，则在此区间内$p$不依赖于

α，事实上，$p=p(\alpha)$是连续的，故$m=m(\alpha)$是连续的，但m是一个整数，故必须不依赖于α，又

$$V(u_t(\alpha))=V(u_0(\alpha))$$

$$=G(\alpha)+\frac{1}{2r}\int_{-r}^{0}\left[\int_{\theta}^{0}g(u(s))ds\right]^2 d\theta$$

$$=G(\alpha)+\frac{1}{2r}\int_{-r}^{0}\dot{u}^2(\theta,\ \alpha)d\theta$$

$$=G(\alpha)+\frac{1}{2mp}\int_{-mp}^{0}\dot{u}^2(\theta,\ \alpha)d\theta$$

$$=G(\alpha)+\frac{1}{2p}\int_{-p}^{0}\dot{u}^2(\theta,\ \alpha)d\theta$$

$$=G(\alpha)+\frac{1}{p}\int_{0}^{p/2}\dot{u}^2(\theta,\ \alpha)d\theta$$

$$=G(\alpha)+\frac{2}{p}\int_{0}^{p/2}[G(\alpha)-G(u(\theta,\ \alpha))]d\theta$$

$$=G(\alpha)+\frac{\sqrt{2}}{p}\int_{\alpha}^{\gamma(\alpha)}[G(\alpha)-G(\tau)]^{1/2}d\tau.$$

其中$\gamma(\alpha)=u(\alpha,\ p/2)$。另一方面，上式关于$\alpha$的导数不为零，故对$\alpha$在一个区间内$V(u_t(\alpha))$不为常数。这表明$\omega(\gamma^+(\phi))$为单轨道。证毕。

§5 解的有界性的判别法

考虑方程

$$\dot{x}(t)=f(t,\ x_t). \tag{1}$$

其中$f:\mathbf{R}\times C\to\mathbf{R}^n$为连续。

设$V:\mathbf{R}^+\times C\to\mathbf{R}^+$为连续，它沿方程(1)的解的右上导数$\dot{V}(t,x_t)$是§2所定义。

定义1 若函数$u:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$为连续且严格单调增加，$u(0)=0$，当$s\to\infty$时$u(s)\to\infty$，则称$u(s)$为楔函数。

定理1[48] 若存在上述的泛函V及楔函数u以及正常数U、β、μ满足下列的条件：

(i) $V(t, \phi)\leqslant v(\|\phi\|)$, $t\in R^+$, $\phi\in C$;

(ii) 当$|x(t)|\geqslant U$时 $\dot{V}(t, x_t)\leqslant -\mu|f(t, x_t)|$;

(iii) 当$|x(t)|<U$时 $\dot{V}(t, x_t)\leqslant \beta$.

则方程(1)的解为一致有界。

证 首先考虑最特殊的情形：$f(t, \phi)\equiv 0$，此时只要取$V(t, \phi)\equiv 0$，$\beta=\mu=U=1$，$u(s)=s^2$，则定理的条件皆被满足。故方程(1)的解为一致有界。事实上，由于$\dot{x}(t)=f(t, x_t)\equiv 0$，故$x(t_0, \varphi)(t)\equiv\varphi(0)$，$t\geqslant t_0$。显然为一致有界。

下面我们证明方程(1)的解可延展至∞。若不然，则$x(t)$必定是某一区间$[t_0, T)$上的不可延展解。根据第二章的延展性定理，知$x(t)$在$[t_0, T]$上无界。

注意到$V(t, x_t)$只有在$|x(t)|<U$时才能增加，且在长度为r的区间上最多增加βr。若在区间$[a, b]$上$|x(t)|\geqslant U$，则$V(t, x_t)$最少减少$\mu|x(b)-x(a)|$，特别地，若$|x(t)|$由U移至$U+R$($R>0$)，则$V(t, x_t)$至少要减少μR。由于在任何区间$[t_0, T)$上V至多增加$(T-t_0)\beta$，故有$\mu R\leqslant V(t_0, x_{t_0})+(T-t_0)\beta$。这与$x(t)$在$[t_0, T)$上为无界的假设矛盾。故$x(t)$必可延展至无穷。

现证一致有界性，设$R_1=\dfrac{\beta r}{\mu}$，给定$R>R_1$及初始条件(t_0, φ)。如果$t_0\geqslant 0$及$\|\varphi\|<R+U$，则只需证明

$$|x(t)|=|x(t_0, \varphi)(t)|\leqslant R+U+[v(R+U)+\beta r]/\mu.$$

显然，或者当$t\geqslant t_0$时$V(t, x_t)<v(R+U)+\beta r\overset{def}{=}s_1$，或者存在$t_1$使$V(t_1, x_{t_1})=s_1$。又$|x(t_1)|<U$，因为只有当$|x(t)|\leqslant U$时$V$才能增加。

在$[t_1-r, t_1]$上$V(t, x_t)$的增加不可能超过βr，且$V(t, x_t)\leqslant v(\|x_t\|)$，故存在$t^*\in[t_1-r, t_1]$，使$v(|x(t^*)|)\geqslant v(R+U)$。从而有$|x(t^*)|\geqslant R+U$。当$t$从$t^*$增至$t_1$时，$|x(t)|$从$|x(t^*)|\geqslant R+U$变到$|x(t)|=U$。故$V$至少减少了$\mu R$，于是

$$V(t_1, x_{t_1}) \leqslant V(t^*, x_{t^*}) - \mu R + \beta r < V(t^*, x_{t^*})。$$

这与$V(t_1, x_t)$为$[t_0, t_1]$上的极大值矛盾。

因此只有当$|\varphi| < R + U$及$t \geqslant t_0$时$V(t, x_t) < s_1$，并且如果在区间$[a, b]$上$|x(t)| \geqslant U$，则$t \in [a, b]$时有$0 \leqslant V(t, x_t) \leqslant s_1 - \mu |x(a) - x(t)|$。因此，$|x(a) - x(t)| \leqslant s_1/\mu$，从而$|x(t)| \leqslant R + U + \frac{s_1}{\mu}$，故方程(1)的解为一致有界。证毕。

定理2[48] 设定理1的条件成立。并且存在常数$c > 0$，使得当$|x(t)| \geqslant U$时$\dot{V}(t, x_t) \leqslant -c$。则方程(1)的解是一致最终有界的。

证 从定理1的证明中看到，如果$R > R_1 = \beta r/\mu$，$t_0 \geqslant 0$，且$\|x_{t_0}\| < R + U$，则

$$\mu(|x(t)| - U) \leqslant V(t, x_t) \leqslant v(R + U) + \beta r \overset{\text{def}}{=\!=} s_1,$$

于是

$$|x(t)| \leqslant [s_1 + \mu U]/\mu \overset{\text{def}}{=\!=} f(R)。$$

现取定$R_2 > R_1$，设$R > R_2$，下面证明：存在$T > 0$，使得$\|x_{t_0}\| < R + U$及$t \geqslant t_0 + T$时，$|x(t)| < f(R_2) \overset{\text{def}}{=\!=} B$。

在任何区间$[t_1 - r, t_1]$上，或者

(a) $\|x_{t_1}\| < R_2 + U$，或者

(b) 存在$t_2 \in [t_1 - r, t_1]$使得$|x(t_2)| \geqslant R_2 + U$，在这种情形下又有两种可能，或者

(b_1) $|x(t)| \geqslant U$，$t \in [t_1 - r, t_1]$，或者

(b_2) 存在$t_3 \in [t_1 - r, t_1]$使得$|x(t_3)| < U$。

如果(a)成立，则$t \geqslant t_1$时$|x(t)| < f(R_2)$。

如果(b_1)成立，则在$[t_1 - r, t_1]$上$\dot{V} \leqslant -c < 0$，于是V至少减少cr。

如果(b_2)成立，则V至少减少μR_2，但增加则最多为βr。所以，对于情形(b_2)，V的至少减少为$\mu R_2 - \beta r \overset{\text{def}}{=\!=} c_1 > 0$。

设$d = \min[cr, c_1]$，对每一个正整数n，在区间$[t_0, t_0 + nr]$上或者(a)在某一个t_1时成立，于是$t \geqslant t_1$时$|x(t)| < B$，或者V至少减少为nd，此时可取n足够大，使得当$t \geqslant t_0 + nr$时有

$$|x(t)|<[V(t,\ x(t))+\mu U]/\mu$$
$$<\{[v(R+U)+\beta r+\mu U]/\mu\}-nd$$
$$<R_2+U.$$
因此当$t\geqslant t_0+(n+1)r$时，有$|x(t)|<B$。选取$T=(n+1)r$时便得所证。

设 u、v：$\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$为连续非减函数，当 $s>0$时 $u(s)>0$，$v(s)>0$，且当$s\to\infty$时$u(s)\to\infty$。

定理3 若存在上述的函数满足下列条件：

(i) 对任何的$t\geqslant 0$及$\phi\in C$，有
$$u(|\phi(0)|)\leqslant V(t,\ \phi)\leqslant v(\|\phi\|);$$
(ii) 对任何的$t_0\geqslant 0$及$\varphi\in c$，存在$r_0\in(0,\ r]$及$\lambda\geqslant 1$，使得当 $t\in[t_0,\ t_0+r)$ 且$V(t,\ x_t(t_0,\ \varphi))\geqslant\lambda v(\|\varphi\|)$，$V(t,\ x_t(t_0,\ \varphi))\geqslant V(\xi,\ x_\xi(t_0,\ \varphi))$，$t_0\leqslant\xi\leqslant t$时以及当$t\geqslant t_0+r_0$且$V(t,\ x_t(t_0,\ \varphi))\geqslant V(\xi,\ x_\xi(t_0,\ \varphi))$，$t_0\leqslant\xi\leqslant t$时，有
$$\dot V(t,\ x_t(t_0,\ \varphi))\leqslant G(t,\ V(t,\ x_t(t_0,\ \varphi))),$$
其中$G:\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$为连续；

(iii) 方程
$$\dot y(t)=G(t,\ y(t))\tag{2}$$
的解一致有界。

则方程(1)的解为一致有界。

证 记方程(2)过$(t_0,\ y_0)$的最大右行解为$y(t)$，又将$x_t(t_0,\varphi)$和$x(t_0,\ \varphi)(t)$分别记为x_t和$x(t)$。

对任给$H>0$，取$y_0>\lambda U(H)$。仿照§2定理1的证明，可知当$\|\varphi\|<H$时，有
$$V(t,\ x_t)<y(t).$$
根据方程2的一致有界性，存在$M_{y_0}>0$，使得$|y(t)|\leqslant M_{y_0}$。现取$M>0$使$u(M)=M_{y_0}$，于是有
$$u(|x(t)|)\leqslant V(t,\ x_t)\leqslant y(t)\leqslant M_{y_0}=u(M),\quad t\geqslant t_0.$$
从而 $|x(t)|\leqslant M,\ t\geqslant t_0.$ 证毕。

设函数h、H：$\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$为连续，且当$V>0$时$H(V)>0$，而且

满足

$$\int^{\infty} h(t)dt<\infty, \quad \int^{\infty}\frac{dV}{H(V)}=\infty.$$

于是有对任一$\alpha>0$有$M>0$存在，使得

$$\int_{t_0}^{\infty} h(t)dt=\int_{\alpha}^{M}\frac{dV}{H(V)}.$$

下面证明：方程

$$\dot{y}(t)=h(t)H(y(t))$$

的解为一致有界。事实上，对任给$\alpha>0$及初始条件(t_0, y_0)，$y_0>0$，设$y(t)=y(t, t_0, y_0)$于是当$y_0<\alpha$时有

$$\int_{y_0}^{y(t)}\frac{dV}{H(V)}=\int^{t} h(s)ds\leqslant\int_{t_0}^{\infty} h(s)ds=\int_{y_0}^{M}\frac{dV}{H(V)}.$$

故得$y(t)\leqslant M$。

推论1 如果满足定理1中的条件(i)和(ii)，其中(ii)中的$G(t, V(t, x_t(t_0, \varphi)))\equiv h(t)H(V(t, x_t(t_0, \varphi)))$。则方程(1)的解为一致有界。

作为更特殊但更常用的情形，我们有下面的推论

推论2 如果定理1的条件(i)成立，且对任何的$t_0\geqslant 0$及任何的$\varphi\in C$，有

$$\dot{V}(t, x_t(t_0, \varphi))\leqslant 0, \quad t\geqslant t_0.$$

则方程(1)的解为一致有界。

推论3 如果存连续函数$V: \mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^+$，满足下列的条件：

(i) $u(|x|)\leqslant V(t, x)\leqslant v(|x|)$，$t\geqslant 0$，$x\in\mathbf{R}^n$；

(ii) 对于任何$t_0\geqslant 0$及任何$\varphi\in C$，当$V(t, x(t_0, \varphi)(t))\geqslant V(\xi, x(t_0, \varphi)(\xi))$，$t-r\leqslant\xi\leqslant t$时，有

$$\dot{V}(t, x(t_0, \varphi)(t))\leqslant h(t)H(V(t, x(t_0, \varphi)(t))).$$

则方程(1)的解为一致有界。

设u、v、$w: \mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$为连续非减函数，当$s>0$时$u(s)>0$，$v(s)>0$，$w(s)>0$，当$s\to\infty$时$u(s)\to\infty$。

又设泛函$P(t, \phi)$满足条件(P)（见§2定义2）。

定理4 如果存在上述的函数u、v、w、P、V满足下列的条件：

(i) 对任何$t\geqslant 0$及任何$\phi\in C$，有

$u(|\phi(0)|)\leqslant V(t,\ \phi)\leqslant v(\|\phi\|)$；

(ii) 对任何$t_0\geqslant 0$及任何$\varphi\in C$，存在$r_0\in(0,\ r]$及$\lambda\geqslant 1$，使得当$t\in[t_0,\ t_0+r)$且$V(t,\ x_t(t_0,\ \varphi))\geqslant\lambda v(\|\varphi\|)$时，有$\dot V(t,\ x_t(t_0,\ \varphi))\leqslant 0$；当$t\geqslant t_0+r_0$且$P(t,\ x_t(t_0,\ \varphi))>V(\xi,\ x_\xi(t_0,\ \varphi))$，$t-r_0\leqslant\xi\leqslant t$时，有$\dot V(t,\ x_t(t_0,\varphi))\leqslant -w(|x(t_0,\ \varphi)(t)|)$；

(iii) $f(t,\ \phi)$为半有界。

则方程(1)的零解为一致最终有界。

证明方法与§2的定理3类似，故略之。

设w_1、w_2、w_3、$w:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$为连续非减函数，且当$s>0$时$w_i(s)>0$ $(i=1,\ 2,\ 3)$，$w(s)>0$，当$s\to\infty$时$w_1(s)\to\infty$。

对于$x\in\mathbf{R}^n$，设$|x|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$，对于$\phi\in C_H$，设

$\|\phi\|=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\int_{-r}^{0}\phi_i^2(\theta)d\theta\right)^{1/2}$，其中$\phi_i$为$\phi$的分量。

定理5 设存在上述的函数w_1、w_2、w_3、w及P和V，满足下列的条件：

(i) 对任何的$t\geqslant 0$，$\phi\in c$，有

$$w_1(|\phi(0)|)\leqslant V(t,\ \phi)\leqslant w_2(|\phi(0)|)+w_3(\|\phi\|)；$$

(ii) 对任何的$t_0\geqslant 0$，$\varphi\in c$，存在$r_0\in(0,\ r]$及$\lambda\geqslant 1$，使得当$t\in[t_0,\ t_0+r_0)$且$V(t,\ x_t(t_0,\ \varphi))\geqslant\lambda[w_2(\|\varphi\|)+w_3(\|\varphi\|)]$时，有$\dot V(t,\ x_t(t_0,\ \varphi))\leqslant 0$；当$t\geqslant t_0+r_0$且$P(t,\ x_t(t_0,\ \varphi))>V(\xi,\ x_\xi(t_0,\ \varphi))$，$t-r_0\leqslant\xi\leqslant t$时，有$\dot V(t,\ x_t(t_0,\ \varphi))\leqslant -w(|x(t_0,\ \varphi)(t)|)$。

则方程(1)的解为一致最终有界。

证明与§2定理5类似，从略。

由定理5我们可以得到下列常用的一个推论。

推论 设w_1、w_2、w如上所述，又设连续函数$V_1:\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$及$P_1:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$，且当$s>0$时$P_1(s)>s$。如果满足下列的条件：

(i) $w_1(|x|)\leqslant V_1(t, x)\leqslant w_2(|x|)$, $t\geqslant 0$, $x\in R^n$;

(ii) 当$P_1(V_1(t, x(t)))>V_1(\xi, x(\xi))$, $t-r\leqslant\xi\leqslant t$时，有

$$\dot{V}_1(t, x(t))\leqslant -w(|x(t)|).$$

则方程(1) 的解为一致最终有界。

证明与§2中定理5的推论类似。

对于高阶的方程，可化成等价的一阶方程组，然后利用上面的定理来判别其有界性。在特殊的情况下亦可利用积分不等式来研究解的有界性，下面我们考察如下的纯量方程

$$[r(t)x'(t)]'+a(t)x(t)+b(t)f[x(t-\tau(t))]=p(t). \tag{3}$$

其中$r(t)$、$a(t)$、$b(t)$、$p(t)$、$f(x)$皆为连续函数，$r(t)>0$，$0\leqslant\tau(t)\leqslant\tau$。

下面的结果引自[49]。

引理1 对于方程

$$[r(t)x'(t)]'+a(t)x(t)=0, \tag{4}$$

必存在两个非零解$x_1(t)$和$x_2(t)$满足

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}=\frac{1}{r(t)}. \tag{5}$$

证 设方程(4)的解$x_1(t)$及$x_2(t)$分别满足初始条件：$x_1(t_0)=1$，$x_1'(t_0)=0$及$x_2(t_0)=0$，$x_2'(t)=\dfrac{1}{r(t_0)}$。

令 $$W(t)=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ r(t)x_1'(t) & r(t)x_2'(t) \end{vmatrix}.$$

则

$$W'(t)=\begin{vmatrix} x_1'(t) & x_2'(t) \\ r(t)x_1'(t) & r(t)x_2'(t) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ [r(t)x_1'(t)]' & [r(t)x_2'(t)]' \end{vmatrix}=0.$$

故$W(t)=W(t_0)=1$，从而$x_1(t)$，$x_2(t)$满足(5)式。证毕。

引理2 如果$x_1(t)$，$x_2(t)$是方程(4)的解并满足(5)式，则方程(3)满足初值$\varphi(t)(t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0)$的解$x(t)$可表为下列的形式：

$$x(t)=r(t_0)[\varphi(t_0)x_2'(t_0)-x_2(t_0)]x_1(t)+r(t_0)[x_1(t_0)-\varphi(t_0)x_1'(t_0)]x_2(t)$$
$$+\int_{t_0}^{t}[x_1(s)x_2(t)-x_2(s)x_1(t)]\cdot[p(s)-b(s)f(x(s-\tau(s)))]ds. \tag{6}$$

其中若$t_0-\tau\leqslant s-\tau(s)\leqslant t_0$时，$x(s-\tau(s))=\varphi(s-\tau(s))$。

证 由(6)得到$x(t_0)=r(t_0)[\varphi(t_0)x_2'(t_0)-x_2(t_0)]x_1(t_0)$

$$+r(t_0)[x_1(t_0)-\varphi(t_0)x_1'(t_0)]x_2(t_0)$$
$$=r(t_0)\varphi(t_0)[x_1(t_0)x_2'(t_0)-x_2(t_0)x_1'(t_0)]$$
$$=\varphi(t_0).$$

令 $r(t_0)[\varphi(t_0)x_2'(t_0)-x_2(t_0)]=c_1$，$r(t_0)[x_1(t_0)-\varphi(t_0)x_1'(t_0)]=c_2$. (7)

则有
$$a(t)x(t)=c_1a(t)x_1(t)+c_2a(t)x_2(t)+\int_{t_0}^{t}[x_1(s)a(t)x_2(t)-x_2(s)a(t)x_1(t)][p(s)-b(s)f(x(s-\tau(s)))]ds. \tag{8}$$

$$[r(t)x'(t)]'=c_1[r(t)x_1'(t)]'+c_2[r(t)x_2'(t)]'+\int_{t_0}^{t}\{x_1(s)[r(t)x_2'(t)]'-x_2(s)[r(s)x_1'(s)]'\}[p(s)-b(s)f(x(s-\tau(s)))]ds$$
$$+[x_1(t)x_2'(t)-x_2(t)x_1'(t)]\cdot[p(t)-b(t)f(x(t-\tau(t)))]r(t). \tag{9}$$

将(8)与(9)相加得

$$[r(t)x'(t)]'+a(t)x(t)=p(t)-b(t)f(x(t-\tau(t))).$$

证毕。

定理6 如果满足下列的条件：

(i) 方程(4)的一切解有界；

(ii) $\int^{+\infty}|b(t)|dt<\infty$，$\int^{\infty}|p(t)|dt<\infty$；

(iii) $|f(x)|\leqslant f(|x|)$，当$x>0$时$f(x)$为正值单调增加。

(iv) $\int^{\infty}\frac{dx}{f(x)}=\infty$。

则方程(3)的一切解有界。

证 对任意给定的初始时刻t_0及初始函数$\varphi(t)$ ($t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0$)，由引理2知方程(3)满足初始条件的解$x(t)=x(t_0,\varphi)(t)$可表为

$$x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\int_{t_0}^{t}[x_1(s)x_2(t)-x_2(s)x_1(t)][p(s)-b(s)f(x(s-\tau(s)))]ds$$

其中c_1和c_2由(7)确定。

设$M=max\left[\sup_{t_0\leqslant t<\infty}|x_1(t)|,\ \sup_{t_0\leqslant t<\infty}|x_2(t)|,\ \int_{t_0}^{\infty}|b(t)|dt,\ \int_{t_1}^{\infty}|p(t)|dt\right]$,

令$c=c_1+c_2$，则当$t\geqslant t_0+\tau$时

$$|x(t-\tau(t))|\leqslant cM+2M^3+2M^2\int_{t_1}^{t-\tau(t)}|b(s)|f(|x(s-\tau(s))|)ds\leqslant cM+2M^3+2M^2\int_{t_0}^{t}|b(s)|f(|x(s-\tau(s))|)ds. \quad (10)$$

令$A=cM+2M^3$，$B=2M^2$，并注意到$f(x)$当$x>0$的递增性，便有

$$f(|x(t-\tau(t))|)\leqslant f(A+B\int_{t_0}^{t}|b(s)|f(|x(s-\tau(s))|)ds)$$

于是 $$\frac{B|b(t)|f(|x(t-\tau(t))|)}{f(A+B\int_{t_0}^{t}|b(s)|f(|x(s)-\tau(s))|)ds)}\leqslant B|b(t)|$$

设$\Phi(u)=\int_A^u\frac{ds}{f(s)}$，($u>A$)，则有

$$\frac{d}{dt}\Phi(A+B\int_{t_0}^{t}|b(s)|f(|x(s-\tau(s))|)ds)\leqslant B|b(t)|.$$

现将上式两边从t_0到$t>t_0$积分得

$$\Phi\left(A+B\int_{t_0}^{t}|b(s)|f(|x(s-\tau(s))|)ds\right)\leqslant\int_{t_0}^{t}B|b(s)|ds$$

由于$\Phi(u)$是单调增加函数，故得

$$A+B\int_{t_0}^{t}|b(s)|f(|x(s-\tau(s))|)ds\leqslant\Phi^{-1}\left(\int_{t_0}^{t}B|b(s)|ds\right)$$

注意到(10)及M的定义，即得当$t\geqslant t_0+\tau$时，

$|x(t-\tau(t))|\leqslant\Phi^{-1}(BM)$。证毕。

现考虑方程

$$[r(t)x'(t)]'+a(t)x(t)+f(t,\ x(t-\tau(t)),\ x'(t-\tau(t)))=p(t),\tag{11}$$

其中 $r(t)$，$a(t)$，$p(t)\tau(t)$的要求与方程(3)相同，$f(t,\ x,u)$关于其变元为连续。

推论 对于方程(11)，如果满足下列的条件：

(i) 方程(4)的一切解有界；

(ii) $|f(t,\ x(t-\tau(t)),\ x'(t-\tau(t)))|\leqslant g(t)h(|x(t-\tau(t))|)$，其中$h(s)$是连续非减正值函数，$g(t)\geqslant 0$，$\int^{\infty}g(t)dt<\infty$；

(iii) $\int^{\infty}|p(t)|dt<\infty$；

(iv) $\int^{\infty}\frac{ds}{h(s)}=\infty$。

则方程(11)的一切解有界。

证明与定理6相同，只须将$|f(t,x(t-\tau(t)),x'(t-\tau(t)))|$用$g(t)h(|x(t-\tau(t))|)$代替而放大即可。

§6 不变性原理到非自治系统的拓广

在本节中，我们将自治系统的不变性原理拓广，以适应于非自治系统。

为明确表示系统的维数，我们以C_n表示集合$\{\varphi:\varphi\in C([-r,0],R^n)\}$，对$H>0$，定义$C_n^H=\{\varphi:\varphi\in C,\ \|\varphi\|_{C_n}=\sup\limits_{-r\leqslant\theta\leqslant0}|\varphi(\theta)|\leqslant H\}$，$R_H^n=\{x;\ x\in R^n,\ |x|\leqslant H\}$。

考虑系统

$$\dot{x}(t)=F(t,\ x_t)。\tag{1}$$

其中$F:R^+\times C_n^H\to R^n$连续，$F(t,\ 0)=0$。

定义1 称系统(1)的零解为W—稳定，若对任意$t_0\geqslant0$，存在$\delta(t_0)>0$，使对任意连续函数$g:[t_0,+\infty)\to R^n$，$\lim\limits_{t\to\infty}g(t)=0$，若方程

$$\dot{x}(t)=F(t,\ x_t)+g(t)\tag{2}$$

的解$x(t)$满足$|x(t)|\leqslant\delta(t_0)$，$t\geqslant t_0$时，则$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$。

首先，我们用李雅普诺夫泛函给出(1)零解为W—稳定的判别准则。

定理1 设存在连续泛函$V:R^+\times C_n^H\to R$及常数$N>0$，使

(a) $W_1(|\varphi(0)|)\leqslant V(t,\ \varphi)\leqslant W_2(\|\varphi\|_{C_n})$；

(b) $\dot{V}_{(1)}(t,\ \varphi)\leqslant-W_3(V(t,\ \varphi))$；

(c) $|V(t,\ \varphi)-V(t,\ \tilde{\varphi})|\leqslant N\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_{C_n}$，$t\geqslant0$，$\varphi$，$\tilde{\varphi}\in C_n^H$；其中$W_1$，$W_2$，$W_3$为楔函数。

则方程(1)的零解为W—稳定。

证 设$g\in C([t_0,\ \infty),\ R^n)$，$\lim\limits_{t\to\infty}g(t)=0$且设(2)的定义于$t\geqslant t_0-r$上的解$x(t)$满足$|x(t)|\leqslant H$，则

$$\begin{aligned}\dot{V}_{(2)}(t,\ x_t)&\leqslant\dot{V}_{(1)}(t,\ x_t)+N|g(t)|\\&\leqslant-W_3(V(t,\ x_t))+N|g(t)|.\end{aligned}$$

记 $V(t)=V(t,\ x_t)$，$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}V(t)=\bar{\sigma}$，$\underline{\lim\limits_{t\to\infty}}V(t)=\underline{\sigma}$。

若$\bar{\sigma}>\underline{\sigma}$，则存在$\mu>0$，使$\bar{\sigma}-\mu>\underline{\sigma}+\mu$。选取序列$\{p_n\}$，$\{q_n\}$，$q_n>p_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}p_n=+\infty$，使

$$V(p_n) = \underline{\sigma} + \frac{\mu}{2}, \quad V(q_n) = \bar{\sigma} - \mu,$$

且 $\underline{\sigma} + \frac{\mu}{2} < V(t) < \bar{\sigma} - \mu, \quad t \in (p_n, q_n), \quad n = 1, 2, \cdots$。

因$\lim\limits_{t \to \infty} g(t) = 0$，可取$T \geqslant t_0$，使当$t \geqslant T$时，有

$$N|g(t)| \leqslant W_3(\underline{\sigma} + \frac{\mu}{2})。$$

取正整数K，使当$n \geqslant k$时，$p_n \geqslant T$。因而当$n \geqslant k$，$t \in (p_n, q_n)$时，

$$\dot{V}_{(2)}(t, x_t) \leqslant -W_3(V(t)) + N|g(t)| \leqslant 0,$$

所以 $V(q_n) \leqslant V(p_n)$，这与$\bar{\sigma} - \mu > \underline{\sigma} + \mu$矛盾。从而$\bar{\sigma} = \underline{\sigma}$。

若$\bar{\sigma} = \underline{\sigma} \neq 0$，（记$\sigma = \bar{\sigma}$），则存在$T_1 \geqslant t_0$，使当$t \geqslant T_1$时，

$$\sigma/2 \leqslant V(t) \leqslant 3\sigma/2。$$

取$T_2 \geqslant t_0$，使当$t \geqslant T_2$时，

$$N|g(t)| \leqslant \frac{1}{2} W_3(\frac{\sigma}{2})。$$

从而当$t \geqslant max\{T_1, T_2\} = T$时，我们有

$$\dot{V}_{(2)}(t) \leqslant -W_3(V(t)) + N|g(t)|$$
$$\leqslant -\frac{1}{2} W_3\left(\frac{\sigma}{2}\right),$$

故 $V(t) \leqslant V(T) - \frac{1}{2} W_3(\frac{\sigma}{2})(t - T) \to -\infty$，（当$t \to \infty$时）。这与$V(t) \geqslant 0$矛盾。所以$\overline{\lim\limits_{t \to \infty}} V(t) = 0$，这说明$\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$，证毕。

为给出此定理的一个重要推论，我们引述一个结论。

引理1 设存在常数$K > 0$，使

$$|F(t, \varphi) - F(t, \tilde{\varphi})| \leqslant K \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C_n}, \quad t \geqslant 0, \quad \varphi, \tilde{\varphi} \in C_n^H。$$

若方程(1)的零解一致渐近稳定，则存在一个连续泛函$V: \mathbf{R}^+ \times C_n^{H_1} \to \mathbf{R}$，$H_1 < H$，满足

(a) $W_1(\|\varphi\|_{C_n}) \leqslant V(t, \varphi) \leqslant W_2(\|\varphi\|_{C_n})$；

(b) $\dot{V}_{(1)}(t,\ \varphi)\leqslant -W_3(\|\varphi\|_{C_H})$;

(c) $|V(t,\ \varphi)-V(t,\ \tilde{\varphi})|\leqslant N\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_{C_H}$, $t\geqslant 0$, φ, $\tilde{\varphi}\in C_n^H$.

结合定理1和引理1，我们可得下述重要推论。

推论1 设

(i) 存在常数$K>0$，使

$|F(t,\ \varphi)-F(t,\ \tilde{\varphi})|\leqslant K\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_{C_H}$, $t\geqslant 0$, $\varphi, \tilde{\varphi}\in C_n^H$;

(ii) 方程(1)的零解一致渐近稳定。

则方程(1)的零解为W—稳定。

这个结论建立了W—稳定性与一致渐近稳定性的联系，使得许多古典的关于一致渐近稳定的判别法仍适应于判别W—稳定性。

下述两个定理利用李雅普诺夫函数，Raznmihin 方法和非 Raznmihin 方法给出了W—稳定性之判别准则。有兴趣的读者可在文[59]中找到其证明。

定理2 设存在连续函数$V: R^+\times R_H^n\to R$和常数$N>0$，使

(a) $W_1(|x|)\leqslant V(t,\ x)\leqslant W_2(|x|)$;

(b) $|V(t,\ x)-V(t,\ \tilde{x})|\leqslant N|x-\tilde{x}|$, $t\geqslant 0$, x, $\tilde{x}\in R_H^n$;

(c) 对任意$\varphi\in C_n^H$，当$V(t+\theta,\ \varphi(\theta))\leqslant P(V(t,\ \varphi(0)))$，$\theta\in[-r,\ 0]$时，

$$\dot{V}_{(1)}(t,\ \varphi(0))\leqslant -W_3(V(t,\ \varphi(0))),$$

其中W_1，W_2，W_3为楔函数，$P: R^+\to R^+$连续、非减且当$r>0$时，$P(r)>r$。

则方程(1)的零解为W—稳定。

定理3 设存在连续函数$V: R^+\times R_H^n\to R$及常数$N>0$使定理2之(a)、(b)成立且

(c*) 对任给$\varphi\in C_H^n$，$u\geqslant 0$，当$V(t+\theta,\varphi(\theta))\leqslant u$，$\theta\in[-r,$

0]时，有

$$\dot{V}_{(1)}(t,\ \varphi(0))\leqslant F(t,\ V(t,\ \varphi(0)),\ u).$$

其中(i) $F(t,\ V,\ V)\leqslant -W_3(V)+[h_1(t)+h_2(t)]Q(V),\ t\geqslant 0,\ V\geqslant 0$；

(ii) $|F(t,\ V,\ u_1)-F(t,\ V,\ u_2)|\leqslant[h_3(t)+h_4(t)]|u_1-u_2|$，$t\geqslant 0$，$V\geqslant 0$，$u_1,\ u_2\geqslant 0$；$h_i:R^+\to R^+$连续（$i=1,2,3,4$），$\lim\limits_{t\to\infty}[h_1(t)+h_3(t)]=0$，$\int_0^{+\infty}[h_2(t)+h_4(t)]dt<+\infty$，$Q:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$连续，$W_3$为楔函数。

则方程(1)的零解为W—稳定。

定义2 称方程(1)的零解为W—一致稳定，若存在楔函数W_4和函数T：$\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$，使对任意$\varepsilon>0,t_0\geqslant 0,g\in C([t_0,t_0+T(\varepsilon)],\mathbf{R}^n)$，若$|g(t)|\leqslant W_4(\varepsilon)$，$t\in[t_0,\ t_0+T(\varepsilon)]$且方程(2)的定义于$t_0-r\leqslant t\leqslant t_0+T(\varepsilon)$上的解$x(t)$于其定义域上满足$|x(t)|\leqslant H$，则存在$t_2\in[t_0,\ t_0+T(\varepsilon)]$，使$|x(t_2)|<\varepsilon$。

定理4 设存在连续泛函V：$\mathbf{R}^+\times C_c^H\to\mathbf{R}$，常数$N>0$和楔函数$W_2$，$W_3$，使

(a) $0\leqslant V(t,\ \varphi)\leqslant W_2(\|\varphi\|C_n)$；

(b) $\dot{V}_{(1)}(t,\ \varphi)\leqslant -W_3(|\varphi(0)|)$；

(c) $|V(t,\ \varphi)-V(t,\ \phi)|\leqslant N|\varphi-\phi|_{C_n}$，$\varphi,\phi\in C_n^H$，$t\geqslant 0$。

则方程(1)的零解为W—一致稳定。

证 设$W_4(r)=\dfrac{1}{2N}W_3(r)$，$r\geqslant 0$。对任意 $\varepsilon>0$，取

$T(\varepsilon)=\dfrac{2W_2(H)}{W_3(\varepsilon)}+1$。设$|g(t)|\leqslant W_4(\varepsilon)$，$t_0\leqslant t\leqslant t_0+T(\varepsilon)$，

且$x(t)\in R_H^n$是方程(2)的解，$t_0-r\leqslant t\leqslant t_0+T(\varepsilon)$。

如果对所有$t_0\leqslant t\leqslant t_0+T(\varepsilon)$，有$|x(t)|\geqslant\varepsilon$，则

$$\dot{V}(t,\ x_t)\leqslant -W_3(|x(t)|)+N|g(t)|\leqslant -\frac{1}{2}W_3(\varepsilon),$$

因此 $V(t_0+T(\varepsilon),\ x_{t_0+T(\varepsilon)})$

$$\leqslant V(t_0, x_{t_0}) - \frac{1}{2} W_3(\varepsilon) T(\varepsilon)$$

$$\leqslant W_2(H) - \frac{1}{2} W_3(\varepsilon) T(\varepsilon) < 0,$$

这与 $V(t) \geqslant 0$ 矛盾，故必存在$t_2 \in [t_0, t_0 + T(\varepsilon)]$，使 $|x(t_2)| < \varepsilon$，证毕。

定理5 设定理 2 的所有条件成立，则方程(1)的零解为W—一致稳定。

证 取$W_4(r) = \frac{1}{2N} W_3(W_1(r))$，$r \geqslant 0$。对任意$\varepsilon > 0$，定义

$$\alpha(\varepsilon) = inf\{P(s) - s;\ W_1(\varepsilon) \leqslant s \leqslant W_2(H)\},$$

$$T_1(\varepsilon) = \frac{2W_2(H)}{W_3(W_1(\varepsilon))} + 1 + r,$$

$$T(\varepsilon) = \mathrm{N}(\varepsilon) T_1(\varepsilon),$$

其中$N(\varepsilon)$为正整数，使

$$W_1(\varepsilon) + N(\varepsilon)\alpha(\varepsilon) \geqslant W_2(H).$$

设$|g(t)| \leqslant W_4(\varepsilon)$，$t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T(\varepsilon)$，$x(t)$是方程(2)定义于 $t_0 - r \leqslant t \leqslant t_0 + T(\varepsilon)$ 上之解且在其上满足 $|x(t)| \leqslant \mathrm{H}$。记 $V(t) = V(t, x(t))$。

如果对所有$t \in [t_0, t_0 + T_1(\varepsilon)]$，有

$$V(t) \geqslant W_1(\varepsilon) + [N(\varepsilon) - 1]\alpha(\varepsilon),$$

则 $P(V(t)) \geqslant V(t) + \alpha(\varepsilon) \geqslant W_1(\varepsilon) + N(\varepsilon)\alpha(\varepsilon) \geqslant W_2(H) \geqslant V(t + \theta)$，$\theta \in [-r, 0]$，因此

$$\dot{V}(t) \leqslant -W_3(V(t)) + N|g(t)|$$

$$\leqslant -W_3(W_1(\varepsilon)) + N|g(t)$$

$$\leqslant -\frac{1}{2} W_3(W_1(\varepsilon)).$$

这说明

$$V(t_0 + T_1(\varepsilon)) \leqslant V(t_0) - \frac{1}{2} W_3(W_1(\varepsilon)) T_1(\varepsilon)$$

$$\leqslant W_2(H) - \frac{1}{2}W_3(W_1(\varepsilon))T_1(\varepsilon)$$

$$<0,$$

这与$V \geqslant 0$矛盾，从而必存在$t_1 \in [t_0, t_0 + T_1(\varepsilon)]$，使$V(t_1) < W_1(\varepsilon) + [N(\varepsilon) - 1]\alpha(\varepsilon)$。

假若存在$t^* \geqslant t_1$，使$V(t^*) = W_1(\varepsilon) + [N(\varepsilon) - 1]\alpha(\varepsilon)$，则

$$P(V(t^*)) \geqslant V(t^*) + \alpha(\varepsilon) \geqslant W_1(\varepsilon) + N(\varepsilon)\alpha(\varepsilon)$$

$$\geqslant V(t^* + \theta),\ \theta \in [-r, 0],$$

从而$\dot{V}(t^*) \leqslant -W_3(V(t^*)) + N|g(t^*)| < 0$。这说明对所有$t \geqslant t_1$，总有$V(t) \leqslant W_1(\varepsilon) + [N(\varepsilon) - 1]\alpha(\varepsilon)$，因而当$t \geqslant t_0 + T_1(\varepsilon)$时，$V(t) \leqslant W_1(\varepsilon) + [N(\varepsilon) - 1]\alpha(\varepsilon)$。

类似可证，对任意整数$k \leqslant N$，当$t \geqslant t_0 + kT_1(\varepsilon)$时，$V(t) \leqslant W_1(\varepsilon) + [N(\varepsilon) - k]\alpha(\varepsilon)$。因此，

$$V(t_0 + N(\varepsilon)T_1(\varepsilon)) \leqslant W_1(\varepsilon),$$

从而

$$|x(t_0 + T(\varepsilon))| \leqslant \varepsilon.$$

证毕。

我们将应用W—稳定性和W—一致稳定性来讨论下述泛函微分方程零解的稳定性。

考虑泛函微分方程

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x_t) + G(t, y_t), \\ \dot{y}(t) = H(t, x_t, y_t), \end{cases} \tag{3}$$

其中$x \in \mathbf{R}^n$，$y \in \mathbf{R}^m$，F: $\mathbf{R}^+ \times C_n^H \to \mathbf{R}^n$，$G$: $\mathbf{R}^+ \times C_m^H \to \mathbf{R}^n$，$H$: $\mathbf{R}^+ \times C_n^H \times C_m^H \to \mathbf{R}^m$连续，$F(t, 0) = G(t, 0) = 0$，$H(t, 0, 0) = 0$。以$(x(t, t_0, \varphi, \psi), y(t, t_0, \varphi, \psi))$表方程(3)过$(t_0, \varphi, \psi)$之解。

条件1 存在常数$L > 0$，使

$$|H(t, \varphi, \psi)| \leqslant L,\ t \geqslant 0,\ \varphi \in C_n^H,\ \psi \in C_m^H.$$

条件2 存在楔函数J，使

$$|G(t, \psi)| \leqslant J(\|\psi\|_{C_m}),\ t \geqslant 0,\ \psi \in C_m^H.$$

定理6 设

(i) 条件1及条件2成立；

(ii) 存在连续函数V：$\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n_H\times\mathbf{R}^m_H\to\mathbf{R}^+$，使

(a) $W_1(|x|+|y|)\leqslant V(t, x, y)$；

(b) $V(t, x, y)\leqslant W_2(|x|+|y|)$；

(c) 当$\varphi\in C^H_n$，$\psi\in C^H_m$，$V(t+\theta, \varphi(\theta), \psi(\theta))\leqslant P(V(t, \varphi(0), \psi(0)), \theta\in[-r, 0]$时，$\dot V_{(3)}(t, \varphi(0), \psi(0))\leqslant -W_3(|\psi(0)|)$；

其中W_1，W_2，W_3为楔函数，P：$\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$连续、非减且当$r>0$时，$P(r)>r$；

(iii) 方程(1)的零解W—稳定。

则方程(3)的零解一致稳定且渐近稳定。

证 易证方程(3)的零解为一致稳定，故存在$\delta_1>0$，使当$t_0\geqslant 0$，$\|\varphi\|_{C^n}+\|\psi\|_{C^m}<\delta_1$时，对$x(t)=x(t; t_0, \varphi, \psi)$，$y(t)=y(t; t_0, \varphi, \psi)$，有

$$|x(t)|+|y(t)|\leqslant\min\{\delta(t_0), 1\}, \quad t\geqslant t_0.$$

其中$\delta(t_0)$于定义1所给出。

设$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}V(t)=u$，$\underline{\lim\limits_{t\to\infty}}V(t)=v$。

若$u>v$，则存在$\varepsilon_0>0$，使

$$u-\varepsilon_0>v, \quad u+\varepsilon_0\leqslant P(u-\varepsilon_0).$$

取$T_1\geqslant t_0$，使当$t\geqslant T_1$时，$V(t)=V(t, x(t), y(t))\leqslant u+\varepsilon_0$。

因为$u-\varepsilon_0\geqslant v$，故存在$t_3\geqslant T_1+r$，使$V(t_3)\geqslant u-\varepsilon_0$，且$\dot V(t_3)>0$。另一方面，$V(t_3+\theta)\leqslant u+\varepsilon_0\leqslant P(u-\varepsilon_0)\leqslant P(V(t_3))$，$\theta\in[-r, 0]$，面此$\dot V(t_3)\leqslant -W_3(|y(t_3)|)\leqslant 0$，这产生矛盾。

所以$u=v$。

如果$u=v\neq 0$，则存在$\varepsilon_1>0$，使$u+\varepsilon_1\leqslant P(u-\varepsilon_1)$。取$T_2\geqslant t_0$，使当$t\geqslant T_2$时，

$$u-\varepsilon_1\leqslant V(t)\leqslant u+\varepsilon_1,$$

从而当$\theta\in[-r, 0]$，$t\geqslant T_2+r$时，有

$$V(t+\theta)\leqslant u+\varepsilon_1\leqslant P(u-\varepsilon_1)\leqslant P(V(t)),$$

所以 $\dot{V}(t)\leqslant -W_3(|y(t)|)$， 因此 $\lim\limits_{t\to\infty}|y(t)|=0$。

若 $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)\neq 0$，则存在序列 $\{t_n\}$ 和正常数 $\varepsilon_2>0$，使

$$\begin{cases} |y(t_n)|\geqslant\varepsilon_2, & n=1,\ 2,\ \cdots \\ t_{n+1}-t_n\geqslant\dfrac{1}{L}\varepsilon_2 & n=1,\ 2,\cdots \\ t_1-\dfrac{\varepsilon_2}{2L}\geqslant T_2+r. \end{cases}$$

由条件 1，我们有

$$|y(t)|\geqslant\frac{\varepsilon_2}{2},\quad t\in\left[t_n-\frac{\varepsilon_2}{2L},\quad t_n+\frac{\varepsilon_2}{2L}\right]=I_n,$$

所以，当 $t\in\left[t_n-\dfrac{\varepsilon_2}{2L},\ t_n+\dfrac{\varepsilon_2}{2L}\right]$ 时，

$$\dot{V}(t)\leqslant -W_3(|y(t)|)\leqslant -W_3\left(\frac{\varepsilon_2}{2}\right),$$

$$V\left(t_n+\frac{\varepsilon_2}{2L}\right)\leqslant V(T_2+r)-\int_{t_1+r}^{t_n+\frac{\varepsilon_2}{2L}}W_3(|y(s)|)ds$$

$$\leqslant W_2(H)-\sum_{k=1}^{n}\int_{t_k-\frac{\varepsilon_2}{2L}}^{t_k+\frac{\varepsilon_2}{2L}}W_3\left(\frac{\varepsilon_2}{2}\right)ds$$

$$\leqslant W_2(H)-W_3\left(\frac{\varepsilon_2}{2}\right)\cdot\frac{\varepsilon_2}{L}\cdot n\to-\infty$$

（$n\to\infty$ 时）。

这与 $V\geqslant 0$ 矛盾，故 $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$。由条件 2 及方程(1)零解之 W—稳定性得 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$，这说明 $u=v=0$，矛盾。

所以 $u=v=0$，因此 $\lim\limits_{t\to\infty}(|x(t)|+|y(t)|)=0$，证毕。

定理7 设定理6的(i)，(ii)成立且方程(1)的零解为 W—一致稳定，则方程(3)的零解为一致渐近稳定。

证 对任意 $\varepsilon>0$，取 $\delta(\varepsilon)>0$，使

$$\delta(\varepsilon)+J^{-1}(W_4(\delta(\varepsilon))<W_2^{-1}(W_1(\varepsilon)).$$

取$a(\varepsilon)$，$T_1(\varepsilon)$，$T_2(\varepsilon)>0$，满足

$$a(\varepsilon)\leqslant\inf\{P(s)-s;\ W_1(\varepsilon)\leqslant s\leqslant W_2(H)\},$$

$$a(\varepsilon)<\frac{1}{2L}J^{-1}(W_4(\delta(\varepsilon)))W_3\left(\frac{1}{2}J^{-1}(W_4(\delta(\varepsilon)))\right),$$

$$T_1(\varepsilon)>\frac{W_2(H)}{W_3\left(\frac{1}{2}J^{-1}(W_4(\delta(\varepsilon)))\right)},$$

$$T_2(\varepsilon)=\max\{T(\delta(\varepsilon)),\ r\}.$$

其中T，W_4如定义2所定义。

易证方程(3)的零解一致稳定。所以，存在$\delta(H)>0$，使当$\|\varphi\|_{C^n}+\|\psi\|_{C^m}<\delta(H)$，$t\geqslant t_0\geqslant0$时，

$$|x(t)|+|y(t)|\leqslant H,$$

其中$x(t)=x(t,\ t_0,\ \varphi,\ \psi)$，$y(t)=y(t;\ t_0,\ \varphi,\ \psi)$。

设$N(\varepsilon)$为正整数，满足

$$W_1(\varepsilon)+(N(\varepsilon)-1)a(\varepsilon)<W_2(H)$$
$$\leqslant W_1(\varepsilon)+N(\varepsilon)a(\varepsilon),$$

记　　$T^*(\varepsilon)=T_1(\varepsilon)+T_2(\varepsilon)+r$，待证

$$V(t)\leqslant W_1(\varepsilon)+(N(\varepsilon)-k)a(\varepsilon),\ 0\leqslant k\leqslant N,\ t\geqslant t_0+kT^*(\varepsilon),\qquad (4)_k$$

其中$V(t)=V(t,\ x(t),\ y(t))$。

显然，$(4)_0$成立。

设$(4)_k$成立且$k<N$，则我们断言必存在$t_1\in[t_0+kT^*(\varepsilon)+r,\ t_0+(k+1)T^*(\varepsilon)]$，使

$$V(t_1)<W_1(\varepsilon)+[N(\varepsilon)-(k+1)]a(\varepsilon).$$

否则，对所有$t\in[t_0+kT^*(\varepsilon)+r,\ t_0+(k+1)T^*(\varepsilon)]$，成立

$$V(t)\geqslant W_1(\varepsilon)+[N-(k+1)]a(\varepsilon).\qquad (5)$$

因此　　$$P(V(t))\geqslant a(\varepsilon)+W_1(\varepsilon)+[N-(k+1)]a(\varepsilon)$$
$$\geqslant W_1(\varepsilon)+[N-k]a(\varepsilon)$$
$$\geqslant V(t+\theta),\ \theta\in[-r,\ 0],$$

从而，我们得到

$$\dot{V}(t)\leqslant -W_3(|y(t)|),$$

$$t_0+kT^*(\varepsilon)+r\leqslant t\leqslant t_0+(k+1)T^*(\varepsilon)$$

这说明必定存在$t_2\in[t_0+kT^*(\varepsilon)+r,\ t_0+kT^*(\varepsilon)+r+T_1(\varepsilon)]$，使$|y(t_2)|\leqslant\frac{1}{2}J^{-1}(W_4(\delta(\varepsilon)))$.

若$|y(t)|\leqslant J^{-1}(W_4(\delta(\varepsilon)))$，$t\in[t_2,t_0+kT^*(\varepsilon)+T^*(\varepsilon)]$，则$J(|y(t)|)\leqslant W_4(\delta(\varepsilon))$，由（1）零解之$W$—一致稳定性及$T_2$之选取，知必有 $t_3\in[t_2+r,\ t_0+kT^*(\varepsilon)+T^*(\varepsilon)]$，使$|x(t_3)|\leqslant\delta(\varepsilon)$，因此

$$\begin{aligned}|x(t_3)|+|y(t_3)|&\leqslant\delta(\varepsilon)+J^{-1}(W_4(\delta(\varepsilon)))\\&<W_2^{-1}(W_1(\varepsilon)).\end{aligned}$$

这说明

$$V(t_3)\leqslant W_2(|x(t_3)|+|y(t_3)|)<W_1(\varepsilon),$$

此与(5)式矛盾.

所以，必存在$t_4\in[t_2,\ t_0+kT^*(\varepsilon)+T^*(\varepsilon)]$，使$|y(t_4)|>J^{-1}(W_4(\delta(\varepsilon)))$，因而，存在$t_2\leqslant t_5<t_6\leqslant t_4$，使

$$|y(t_5)|=\frac{1}{2}J^{-1}(W_4(\delta(\varepsilon))),$$

$$|y(t_6)|=J^{-1}(W_4(\delta(\varepsilon))),$$

$$\frac{1}{2}J^{-1}(W_4(\delta(\varepsilon)))<|y(t)|<J^{-1}(W_4(\delta(\varepsilon))),\quad t\in(t_5,t_6).$$

因此，

$$\dot{V}(t)\leqslant -W_3(|y(t)|)\leqslant -W_3\Big(\frac{1}{2}J^{-1}(W_4(\delta(\varepsilon))\Big).$$

从条件1，得

$$t_6-t_5\geqslant\frac{1}{2L}J^{-1}(W_4(\delta(\varepsilon))).$$

所以

$$\begin{aligned}V(t_6)&\leqslant V(t_5)-\frac{1}{2L}J^{-1}(W_4(\delta(\varepsilon)))\\&\quad\cdot W_3\Big(\frac{1}{2}J^{-1}(W_4(\delta(\varepsilon)))\Big)\\&<V(t_5)-a(\varepsilon)\end{aligned}$$

$$\leqslant W_1(\varepsilon)+(N-k)a(\varepsilon)-a(\varepsilon)$$
$$=W_1(\varepsilon)+[N-(k+1)]a(\varepsilon).$$

此又与(5)矛盾。

所以，必有$t_1\in[t_0+kT^*(\varepsilon)+r,\ t_0+kT^*(\varepsilon)+T^*(\varepsilon)]$，使

$$V(t_1)<W_1(\varepsilon)+[N-(k+1)]a(\varepsilon).$$

若存在$t_7\geqslant t_1$，使$V(t_7)\geqslant W_1(\varepsilon)+[N-(k+1)]a(\varepsilon)$，则$P(V(t_7))\geqslant W_1(\varepsilon)+[N-(k+1)]a(\varepsilon)+a(\varepsilon)\geqslant V(t_7+\theta)$，$\theta\in[-r,0]$，因此$\dot V(t_7)\leqslant -W_3(|y(t_7)|)\leqslant 0$。这说明对一切$t\geqslant t_1$，总有$V(t)\leqslant W_1(\varepsilon)+[N(\varepsilon)-(k+1)]a(\varepsilon)$，因此$(4)_{k+1}$成立。

由归纳原理知

$$V(t)\leqslant W_1(\varepsilon),\ \text{当}t\geqslant t_0+N(\varepsilon)T^*(\varepsilon),$$

因而，当$t\geqslant t_0+N(\varepsilon)T^*(\varepsilon)$时，$|x(t)|+|y(t)|\leqslant\varepsilon$，证毕。

上述定理的更一般形式及上述方法在有界性问题中的应用，参阅〔59〕，〔60〕，而用上述思想和李雅普诺夫泛函来研究泛函微分方程的稳定性与有界性的若干结论，参阅〔61〕，〔62〕。

作为上述定理的应用，我们用分离变量型的李雅普诺夫函数来讨论线性非自治差分微分方程的稳定性。

$$\dot x_s(t)=\sum_{j=1}^{n}[a_{sj}(t)x_j(t)+b_{sj}(t)x_j(1-r_{sj}(t))],$$
$$1\leqslant s\leqslant n \qquad (6)$$

其中a_{sj}，b_{sj}：$R^+\to R$连续，$0\leqslant r_{sj}\leqslant r$。

定理8 若存在正常数a_s，$b_s>0$，$\rho>1$，$(s=1,\cdots n)$，使

(i) $a_{jj}(t)+\sum\limits_{s\neq j}a_{sj}(t)\dfrac{\varphi_s(x_s\pm0)}{\varphi_j(x_j)}+\rho\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{n}\left|\dfrac{C_s}{d_i}b_{si}(t)\right|$

$\leqslant 0$，$1\leqslant j\leqslant n$，$t\geqslant 0$，其中$C_s=\max\{a_s,b_s\}$，$d_i=\min\{a_i,b_i\}$，

$$\varphi_s(x_s)=\begin{cases}a_s, & x_s\geqslant 0,\\ -b_s, & x_s<0.\end{cases}$$

(ii) 存在正整数m，$1\leqslant m\leqslant n$，使当$1\leqslant j\leqslant m$时，

$$\sup_{t\geqslant 0}\left\{a_{jj}(t)+\sum_{s\neq j}a_{sj}(t)\frac{\varphi_s(x_s\pm0)}{\varphi_j(x_j)}\right.$$

$$+\rho\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\left|\frac{C_s}{d_i}b_{si}(t)\right|\Big\}<0;$$

(iii) 系统

$$\dot{x}_s(t)=\sum_{j=m}^{n}[a_{sj}(t)x_j(t)+b_{sj}(t)x_j(t-r_{sj}(t))]$$

$$m\leqslant s\leqslant n$$

的零解为W—稳定且$a_{sj}(t)$，$b_{sj}(t)$有界($1\leqslant j<m$，$m\leqslant s\leqslant n$)。

则系统(6)的零解为渐近稳定。

证 记$V(x)=\sum_{s=1}^{n}\varphi_s(x_s)x_s$，则

$$\begin{aligned}\dot{V}_{(6)}(x(t))&=\sum_{s=1}^{n}\varphi_s(x_s(t)\pm 0)\sum_{j=1}^{n}[a_{sj}(t)x_j(t)\\&\quad+b_{sj}(t)x_j(t-r_{sj}(t))]\\&\leqslant\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}a_{sj}(t)x_j(t)\varphi_s(x_s(t)\pm 0)\\&\quad+\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}|\varphi_s(x_s(t)\pm 0)b_{sj}(t)|\\&\quad\cdot|x_j(t-r_{sj}(t))|\\&=\sum_{j=1}^{n}[a_{jj}(t)x_j(t)\varphi_j(x_j(t))\\&\quad+\sum_{s\neq j}a_{sj}(t)x_j(t)\varphi_s(x_s(t)\pm 0)]\\&\quad+\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}|\varphi_s(x_s(t)\pm 0)b_{sj}(t)|\\&\quad\cdot|x_j(t-r_{sj}(t))|\\&=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x_j(t))x_j(t)\Big[a_{jj}(t)\\&\quad+\sum_{s\neq j}a_{sj}(t)\cdot\frac{\varphi_s(x_s(t)\pm 0)}{\varphi_j(x_j(t))}\Big]\end{aligned}$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}|\varphi_s(x_s(t)\pm 0)b_{sj}(t)|$$

$$\cdot|x_j(t-r_{sj}(t))|。$$

若 $V(x(t+\theta))\leqslant\rho V(x(t))$，$\theta\in[-r, 0]$，即

$$\sum_{s=1}^{n}\varphi_s(x_s(t+\theta))x_s(t+\theta)\leqslant\rho\sum_{s=1}^{n}\varphi_s(x_s(t))x_s(t),$$

即

$$|x_j(t+\theta)|\leqslant\frac{\rho}{|\varphi_j(x_j(t+\theta))|}\sum_{s=1}^{n}\varphi_s(x_s(t))x_s(t)。$$

从而

$$\dot V_{(8)}(x(t))$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x_j(t))x_j(t)\Big[a_{jj}(t)+\sum_{s\neq j}a_{sj}(t)\cdot\frac{\varphi_s(x_s(t)\pm 0)}{\varphi_j(x_j(t))}\Big]$$

$$+\rho\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\left|\frac{\varphi_s(x_s(t)\pm 0)b_{sj}(t)}{\varphi_j(x_j(t-r_{sj}(t)))}\right|\cdot\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x_k(t))x_k(t)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x_j(t))x_j(t)\Big[a_{jj}(t)+\sum_{s\neq j}a_{sj}(t)\frac{\varphi_s(x_s(t)\pm 0)}{\varphi_j(x_j(t))}$$

$$+\rho\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\left|\frac{\varphi_s(x_s(t)\pm 0)b_{si}(t)}{\varphi_i(x_i(t-r_{si}(t)))}\right|\Big]$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x_j(t))x_j(t)\Big[a_{jj}(t)+\sum_{s\neq j}a_{sj}(t)\frac{\varphi_s(x_s(t)\pm 0)}{\varphi_j(x_j(t))}$$

$$+\rho\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\left|\frac{C_s}{d_i}b_{si}(t)\right|。$$

从而由定理6知(6)的零解为渐近稳定。

若令$a_s=a^s$，$b_s=a^s$，则得

推论2 设$a_{jj}(t)<0$，$(j=1, \cdots n, t\geqslant 0)$，且存在常数$a>0$，$\rho>1$，使

(i) $\left|\dfrac{a_{sj}(t)}{a_{jj}(t)}\right|\leqslant\dfrac{a^{j-s}}{n}$，$s\neq j$，$t\geqslant 0$；

(ii) $\left|\dfrac{a_{jj}(t)}{n\sum\limits_{i=m}^{n}\sum\limits_{s=1}^{n}a^{s-i}b_{si}(t)}\right|\geqslant\rho>1$, $1\leqslant j\leqslant n$, $t\geqslant 0$;

(iii) $\sup\limits_{t\geqslant 0}\sum\limits_{i=m}^{n}\sum\limits_{s=1}^{n}a^{s-i}|b_{si}(t)|<\dfrac{1}{n}\inf\limits_{t\geqslant 0}|a_{jj}(t)|$, $1\leqslant j\leqslant m$,

(iV)系统

$$\dot{x}_s(t)=\sum_{j=m}^{n}[a_{sj}(t)x_j(t)+b_{sj}(t)x_j(t-r_{sj}(t))],$$

$$1\leqslant s\leqslant n,$$

的零解W—稳定且$a_{sj}(t)$，$b_{sj}(t)$有界$(1\leqslant j<m,\ m\leqslant s\leqslant n)$。

则系统(6)的零解为渐近稳定

利用定理2，令$V(x)=\sum\limits_{s=m}^{n}\varphi_s(x_s)x_s$，则得

定理9 若

$$\sup_{t\geqslant 0}\Big\{a_{jj}(t)+\sum_{\substack{s=m\\ s\neq j}}^{n}a_{sj}(t)\frac{\varphi_s(x_s\pm 0)}{\varphi_j(x_j)}$$

$$+\rho\sum_{i=m}^{n}\sum_{s=1}^{n}\left|\frac{c_s}{d_i}b_{si}(t)\right|\Big\}<0,\ (m\leqslant j\leqslant n),$$

则系统

$$\dot{x}_s(t)=\sum_{j=m}^{n}[a_{sj}(t)x_j(t)+b_{sj}(t)x_j(t-r_{sj}(t))],$$

$$1\leqslant s\leqslant m$$

的零解为W—稳定。

第七章

有界滞量的线性泛函微分方程

在本章中，我们专门讨论有界滞量的线性泛函微分方程的一些问题。主要是介绍线性的RFDE 的常数变易公式，稳定性、有界性等理论，其中包括微分差分方程稳定区域的D划分法，李雅普诺夫泛函的逆转问题等。其次是介绍线性的NFDE的常数变易公式。

§1　全局存在性及指数估计

对于$(t_0, \varphi)\in \mathbf{R}\times C$，考虑线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\mathbf{L}(t, x_t)+h(t), & t\geqslant t_0;\\ x_{t_0}=\varphi.\end{cases}\tag{1}$$

其等价方程为

$$\begin{cases}x(t)=\varphi(0)+\int_{t_0}^{t}\mathbf{L}(s, x_s)ds+\int_{t_0}^{t}h(s)ds, & t\geqslant t_0;\\ x_{t_0}=\varphi.\end{cases}\tag{2}$$

其中$h\in L_1^{loc}([t_0, \infty), \mathbf{R}^n)$，这是由映$[t_0, \infty)\to\mathbf{R}^n$的函数所组成的空间，这些函数在$[t_0, \infty)$中的每一个紧子集上为勒贝格(Lebesgue)可积；$\mathbf{L}(t, \phi)$关于ϕ是线性的。假定存在$n\times n$矩阵函数$\eta(t, \theta)$在$(t, \theta)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$是可测的，规范化后使得

当$\theta\geqslant 0$时$\eta(t, \theta)=0$，当$\theta\leqslant -r$时$\eta(t, \theta)=\eta(t, -r)$；

$\eta(t, \theta)$在$(-r,0)$上关于θ为左连续，对每一个t，$\eta(t, \theta)$关于θ在$[-r, 0]$为有界变差，并且存在$m\in L_1^{loc}((-\infty, \infty), \mathbf{R})$使得

$$L(t, \phi)=\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(t, \theta)]\phi(\theta), \tag{3}$$

$$|L(t, \phi)|\leqslant m(t)\|\phi\|, \quad t\in(-\infty, \infty), \ \phi\in C. \tag{4}$$

显然，$Var_{[-r,0]}\eta(t, \cdot)\leqslant m(t)$。

对有界滞量的时滞线性微分方程来说，比较广泛的形式如下：

$$\dot{x}(t)=\sum_{k=1}^{N}A_k x(t-\omega_k)+\int_{-r}^{0}A(t, \theta)x(t+\theta)d\theta+h(t). \tag{5}$$

其中$A(t, \theta)$对每一个t关于θ是可积的，并且存在函数$a(t)\in L_1^{loc}((-\infty, \infty), \mathbf{R})$，使得对一切$t\in\mathbf{R}$及$\phi\in C$有

$$\left|\int_{-r}^{0}A(t, \theta)\phi(\theta)d\theta\right|\leqslant a(t)\|\phi\|. \tag{6}$$

定理1 （整体存在性）如果L满足上述的假设，则对任何$(t_0, \varphi)\in\mathbf{R}\times C$及$h\in L_1^{loc}([t_0, \infty), \mathbf{R}^n)$，方程(1)在$[t_0-r, \infty)$上存在唯一解。

证 由条件(4)知$L(t, \phi)+h(t)$满足Caratheodory条件（参看第二章附录），由Caratheodory定理知方程(1)的解具有局部存在性，又由条件(4)和$L(t, \phi)$关于ϕ为线性，易知$L(t, \phi)$关于ϕ满足李普希兹条件，故(1)的解具有局部唯一性。

为了得到解的整体存在性，首先推导一个估计式。设x是方程(1)在$[t_0-r, b)$上的一个不可延展解。由(2)得

$$|x(t)|\leqslant|\varphi(0)|+\int_{t_0}^{t}m(s)\|x_s\|ds+\int_{t_0}^{t}|h(s)|ds,$$

$$\|x_{t_0}\|=\|\varphi\|.$$

对所有$t\in[t_0, b)$成立。因此，

$$\|x_t\|\leqslant\|\varphi\|+\int_{t_0}^{t}m(s)\|x_s\|ds+\int_{t_0}^{t}|h(s)|ds, t\in[t_0,b).$$

根据 Belman—Gronwal 不等式得

$$\|x_t\| \leqslant \left[\|\varphi\| + \int_{t_0}^{t} |h(s)|ds\right] \cdot \exp\int_{t_0}^{t} m(s)ds, \quad t \in [t_0, b)。 \tag{7}$$

这个关系蕴含了$|\dot{x}(t)|$不超过L_1^{loc}中的某一个函数。接着对方程采用第二章§2定理1的证明方法，便可推知$b=\infty$。定理得证。

设$x(t_0, \varphi, h)$为方程(1)过(t_0, φ)的解，则由L的线性及方程(1)的解的唯一性可得

$$x(t_0, \varphi, h) = x(t_0, \varphi, 0) + x(t_0, 0, h)。 \tag{8}$$

由关系式(7)即得

$$|x(t_0, \varphi, 0)(t)| \leqslant \|\varphi\|\exp\int_{t_0}^{t} m(s)ds, \quad t \geqslant t_0, \tag{9}$$

$$|x(t_0, 0, h)(t)| \leqslant \left(\int_{t_0}^{t} |h(s)|ds\right)\exp\int_{t_0}^{t} m(s)ds, \quad t \geqslant t_0。 \tag{10}$$

易知$x(t_0, \varphi, 0)$对φ是线性的，$x(t_0, 0, h)$ 对h是线性的。由(9)式可知，对每一个$t \in [t_0, \infty)$，函数 $x(t_0, \cdot, 0)(t): C \to \mathbf{R}^n$，是一个线性连续映像。由(10)式可知，对每一个$t \in [t_0, \infty)$，函数$x(t_0, 0, \cdot)(t): L_1([0, t], \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}^n$，是一个线性连续映像。

例 考虑线性的微分差分方程

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-r) + f(t)。 \tag{11}$$

其中A、B、r为常数，$r>0$，f是连续函数，x为纯量。

取$L(\phi) = A\phi(0) + B\phi(-r)$，$h(t) \equiv f(t)$，则方程(1)显然满足定理1的条件，故过$(t_0, \varphi)$的解$x(t_0, \varphi)$在$[t_0 - r, \infty)$上存在而且唯一，事实上，对方程(11)采用分步法求解，亦可得到同样的结论。

由(7)得到

$$\|x_t(t_0, \varphi)\| \leqslant \left[\|\varphi\| + \int_{t_0}^{t} |f(s)|ds\right] e^{(|A|+|B|)(t-t_0)}。$$

令$e^{-(|A|+|B|)t_0} = a$，$|A| + |B| = b$。则方程(11)过(t_0, φ)的解的指数估计式为

$$\|x_t(t_0,\ \varphi)\| \leqslant ae^{bt}\left(\|\varphi\| + \int_{t_0}^{t} |f(s)|ds\right). \tag{12}$$

§2 常数变易公式

我们在常微分方程中知道，常数变易公式是用线性齐次方程的解来表示线性非齐次方程的解。这个公式已推广到泛函微分方程中来，在这里我们首先讨论一个简单的微分差分方程的常数变易公式，然后进一步讨论一般的线性RFDE的常数变易公式。

首先考虑纯量方程

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-r) + f(t). \tag{1}$$

其中a、b、r均为常数，$r>0$，$f(t)$为连续函数。

对应(1)的齐次方程为

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-r) \tag{2}$$

方程(2)具有$ce^{\lambda t}$形式的解的充要条件为满足

$$h(\lambda) \stackrel{\text{def.}}{=\!=} \lambda - a - be^{-\lambda r} = 0. \tag{3}$$

我们把(3)称为(2)的特征方程，$h(\lambda)$称为(3)的特征拟多项式。记λ的实部为$\mathrm{Re}\lambda$。

关于特征方程(3)，有如下的一个性质：

引理1 如果存在方程(3)的一串解λ_j，$j=1,2,\cdots$，满足当$j\to\infty$时$|\lambda_j|\to\infty$，则当$j\to\infty$时$\mathrm{Re}\lambda_j\to-\infty$。因此，存在一个实数$\alpha$使得方程(3)的一切解满足$\mathrm{Re}\lambda<\alpha$，在复平面的任一个垂直条形区域中，只含有方程(3)的有限个解。

证 对方程(3)的任何解λ，

$$|\lambda - a| = |b|e^{-r\mathrm{Re}\lambda}.$$

于是当$|\lambda|\to\infty$时，$e^{-r\mathrm{Re}\lambda}\to\infty$，从而$\mathrm{Re}\lambda\to-\infty$。故引理的第一个结论成立。$\alpha$的存在性也是显然的。由于$h(\lambda)$是一个整函数，根据复变函数的知识，在任何紧集上只能有有限个$h(\lambda)$的零点。因此在复平面的任何垂直条形区域中也只能有有限个方程(2)的解。证毕。

关于特征方程(2)的重根与方程(2)的解的关系，有下面的结果。

引理2 若λ是特征方程(3)的m重根，则每一个函数$t^k e^{\lambda t}$，$k=0, 1, 2, \cdots, m-1$，都是方程(2)的解。并且这些解的有限和也是方程(2)的解。这些解的无穷和如果收敛，则也是方程(2)的解。

证 若$x(t)=t^k e^{\lambda t}$，则

$$e^{-\lambda t}[\dot{x}(t)-ax(t)-bx(t-r)]=t^k\lambda+kt^{k-1}-at^k$$

$$-b(t-r)^k e^{-\lambda r}=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}t^{k-j}h^{(j)}(\lambda)$$

如果λ是方程(3)的m重根，则 $h(\lambda)=h^{(1)}(\lambda)=\cdots=h^{(m-1)}(\lambda)=0$。故知$x(t)=t^k e^{\lambda t}$是方程(2)的解，$k=0, 1, \cdots, m-1$。这就证明了引理的第一个部份。后面的结论是显然成立的。证毕。

为了建立常数变易公式，需要引入基本解的概念。

设函数$X(t)$当$t\geqslant 0$时满足方程(2)，当$t\leqslant 0$时满足

$$X(t)=\begin{cases}0, & t<0.\\ 1, & t=0.\end{cases} \tag{4}$$

我们以后需要对$X(t)$进行拉普拉斯(Laplace)变换。下面的两个引理是根据 Laplace 变换的理论得来的。在这里我们只述不证。

引理3 (Laplace 变换的存在性及卷积) 如果$f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$为可测函数，且满足

$$|f(t)|\leqslant \alpha e^{\beta t}, \quad t\in[0,\infty), \tag{5}$$

α、β为某常数，则f的拉普拉斯变换$L(f)$：

$$L(f)(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(t)dt \tag{6}$$

是存在的，而且当$\mathrm{Re}\lambda>\beta$时是λ的解析函数。如果$f\cdot g$定义为$(f\cdot g)(t)=\int_0^t f(t-s)g(s)ds$，则称$f\cdot g$为$f$与$g$的卷积，则 $L(f\cdot g)=L(f)\cdot L(g)$。

下面我们用符号$\int_{(c)}$表示$\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}$，其中$c$为实数。

引理4（逆定理） 假定$f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$为给定的函数，$\beta>0$为给定的常数，$f$在任何紧集上为有界变差，$f(t)e^{-\beta t}$在$[0,\infty)$上为勒贝格可积。则对于任何$c>\beta$，有

$$\int_{(c)}L(f)(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda=\begin{cases}\frac{1}{2}[f(t+)+f(t-)], & t>0,\\ \frac{1}{2}f(0+), & t=0.\end{cases} \tag{7}$$

定义1 如果方程(2)的一个解的拉普拉斯变换等于$h^{-1}(\lambda)$，则这个解称为方程(2)的基本解。

定理1 如果 $X(t)$ 为方程(2)的解并满足初始条件(4)，则$X(t)$为方程(2)的基本解。即

$$L(X)(\lambda)=h^{-1}(\lambda). \tag{8}$$

又对于任何$c>\beta$，有

$$X(t)=\int_{(c)}h^{-1}(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda,\quad t>0. \tag{9}$$

其中β满足$|X(t)|\leqslant\alpha e^{\beta t}$，$t\geqslant0$。

证 易知X满足指数估计式$|X(t)|\leqslant\alpha e^{\beta t}$(其证明与§1中的(7)式相同)。由引理3知$L(X)$存在且当$\mathrm{Re}\lambda>\beta$时是解析的。以$e^{-\lambda t}$乘方程(2)然后从0到$\infty$积分，并对第一项采用分部积分法，就可得到(8)式。由于$X(t)$在紧集上是有界变差且当$t\geqslant0$时连续。根据引理4便可推知(9)式成立。证毕。

下面给出$X(t)$的一个较为精细的指数估计式。

定理2 如果$\alpha_0=\max\{\mathrm{Re}\lambda:h(\lambda)=0\}$，则对任何的$\alpha>\alpha_0$，存在一个常数$k=k(\alpha)$，使得基本解$X$满足不等式

$$|X(t)|\leqslant ke^{\alpha t},\quad t\geqslant0. \tag{10}$$

证 由定理1知

$$X(t)=\int_{(c)}h^{-1}(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda.$$

其中c为某个充分大的实数，使得$c>\alpha$。我们首先要证：

$$X(t)=\int_{(\alpha)}h^{-1}(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda. \tag{11}$$

为此，考虑函数$h^{-1}(\lambda)\exp\lambda t$在复平面上沿平行四边形$ABCD$边界的积分，其中

$$\text{直线段}AB=\{c+i\tau:-T\leqslant\tau\leqslant T\},$$

$$CD=\{\alpha+i\tau:-T\leqslant\tau\leqslant T\},$$

$$BC=\{\sigma+iT:\alpha\leqslant\sigma\leqslant c\},$$

$$DA=\{\sigma-iT:\alpha\leqslant\sigma\leqslant c\}.$$

由于$h(\lambda)$在这个矩形内无零点，故沿矩形边界的积分为零。

选取T_0，使得对$T\geqslant T_0$有

$$\left(1+\frac{\alpha^2}{T^2}\right)^{1/2}-\frac{1}{T}(|a|+|b|e^{-\alpha r})\geqslant\frac{1}{2}.$$

如果$T\geqslant T_0$及$\lambda\in BC$，则

$$|h^{-1}(\lambda)|\leqslant 1/[(\sigma^2+T^2)^{1/2}-|a|-|b|\exp(-\sigma r)]\leqslant\frac{2}{T}.$$

因此，当$T\to\infty$时，有

$$\left|\int_{BC}h^{-1}(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda\right|\leqslant\frac{2}{T}e^{ct}(c-\alpha)\to 0.$$

同理可证，当$T\to\infty$时有

$$\left|\int_{DA}h^{-1}(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda\right|\to 0.$$

故(11)式成立。

设T_0如上，如$g(\lambda)=h^{-1}(\lambda)-(\lambda-\alpha_0)^{-1}$，则

$$|g(\lambda)|=\left|\frac{a+be^{-\lambda r}-\alpha_0}{\lambda-\alpha_0}h^{-1}(\lambda)\right|$$

$$\leqslant\frac{2}{T^2}(|a|+|b|e^{-\alpha r}+|\alpha_0|).$$

对$\lambda=\alpha+iT$，$|T|\geqslant T_0$时成立。因此，当$t\geqslant 0$时有

$$\int_{(\alpha)}|g(\lambda)|d\lambda<\infty\text{及}\left|\int_{(\alpha)}g(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda\right|\leqslant k_1e^{\alpha t}.$$

这里k_1为一常数。

我们知道，积分$\int_{(\alpha)}(\lambda-\alpha_0)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda$是存在的并且有如下的

估计式

$$\left|\int_{(\alpha)}(\lambda-\alpha_0)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda\right|\leqslant k_2e^{\alpha t},t>0.$$

因此，由(11)式并令$k=k_1+k_2$，便得定理之证。证毕

定理3(常数变易公式)　方程(1)满足初始函数为φ的解$x(\varphi, f)$可表为如下的形式

$$x(\varphi,f)(t)=x(\varphi,0)(t)+\int_0^t X(t-s)f(s)ds,\quad t\geqslant 0. \tag{12}$$

而$x(\varphi,0)$，即方程(2)满足初始函数为φ的解，则可表示如下：

$$x(\varphi,0)(t)=X(t)\varphi(0)+b\int_{-r}^{0}X(t-\theta-r)\varphi(\theta)d\theta,$$

$$t\geqslant 0. \tag{13}$$

证　在下面的证明中，需要对f进行拉普拉斯变换，根据引理1，要求f被指数函数所控制，如果f不满足这个要求，则可重新定义f，使它在任给的区间$[0,T]$上不变，在$[T+\varepsilon,\infty)$上为零，在$[0,\infty)$上为连续。这样，f便变成被指数控制了。此时可以证明定理3当$0\leqslant t\leqslant T$时成立，再由T的任意性便知(12)，(13)式成立。因此，不妨假定f是被某个指数函数所控制。

现对方程(1)进行拉普拉斯变换，并对第一项使用分部积分法，得到

$$h(\lambda)L(x)(\lambda)=\varphi(0)+be^{-\lambda r}\int_{-r}^{0}e^{-\lambda\theta}\varphi(\theta)d\theta$$
$$+\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(t)dt.$$

其中$x=x(\varphi,f)$，$\mathrm{Re}\lambda>c$，c为充分大的实数。

使用引理4，有

$$x(t)=\int_{(c)}e^{\lambda t}h^{-1}(\lambda)\left[\varphi(0)+be^{-\lambda r}\int_{-r}^{0}e^{-\lambda\theta}\varphi(\theta)d\theta\right.$$
$$\left.+\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(t)dt\right]d\lambda. \tag{14}$$

对最后一项，有

$$\int_{(c)}\left[e^{\lambda t}h^{-1}(\lambda)\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}f(t)dt\right]d\lambda$$

$$=\int_{(c)}e^{\lambda t}L(X)L(f)(\lambda)d\lambda=\int_{(c)}e^{\lambda t}L(X*f)(\lambda)d\lambda$$

$$=(X*f)(t)=\int_0^t X(t-s)f(s)ds. \tag{15}$$

现再考察(14)的前面两项，对第一项显然有

$$\int_{(c)}e^{\lambda t}h^{-1}(\lambda)\varphi(0)d\lambda=\int_{(c)}e^{\lambda t}L(X)(\lambda)d\lambda\cdot\varphi(0)$$

$$=X(t)\varphi(0). \tag{16}$$

对第二项，作如下的处理，首先定义$\omega:[-r,\infty)\to[0,1]$如下：

$$\omega(\theta)=\begin{cases}0 & \theta\geqslant 0,\\ 1 & 0<0.\end{cases}$$

又将φ的定义域从$[-r,0]$扩张到$[-r,\infty)$，即当$\theta\geqslant 0$时定义$\varphi(\theta)=\varphi(0)$。则

$$e^{-\lambda r}\int_{-r}^0 e^{-\lambda\theta}\varphi(\theta)d\theta=\int_0^{\infty}e^{-\lambda s}\varphi(-r+s)\omega(-r+s)ds$$

$$=L[\varphi(-r+\cdot)\omega(-r+\cdot)](\lambda).$$

于是

$$\int_{(c)}\left[e^{\lambda t}h^{-1}(\lambda)be^{-\lambda r}\int_{-r}^0 e^{-\lambda\theta}\varphi(\theta)d\theta\right]d\lambda$$

$$=b\int_{(c)}e^{\lambda t}L(X)L[\varphi(-r+\cdot)\omega(-r+\cdot)](\lambda)d\lambda$$

$$=b\int_{(c)}e^{\lambda t}L[X*\varphi(-r+\cdot)\omega(-r+\cdot)](\lambda)d\lambda$$

$$=b[X*\varphi(-r+\cdot)\omega(-r+\cdot)](t)$$

$$=b\int_0^t X(t-s)\varphi(-r+s)\omega(-r+s)ds$$

$$=b\int_0^r X(t-s)\varphi(-r+s)ds. \tag{17}$$

由(14)、(15)、(16)、(17)便知(12)及(13)式成立。证毕。

下面我们来推导一般的线性RFDE的常数变易公式。

考虑线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=L(t,x_t)+h(t), & t\geqslant t_0.\\ x_{t_0}=\varphi.\end{cases} \tag{18}$$

其中$L:\mathbf{R}\times C\to\mathbf{R}^n$，$L$关于$\phi$为线性。

设$\mathscr{L}_1([a,b],\ \mathbf{R}^n)$表示$L_1([a,b],\ \mathbf{R}^n)$中的等价类所组成的空间。下面的引理是泛函分析中的一个结果，我们述而不证。

引理5 假定$T:\mathscr{L}_1([a,b],\ \mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}^n$是一个连续线性算子，则存在唯一的$n\times n$矩阵函数$V(\theta)$，$a\leqslant\theta\leqslant b$，(这里的唯一性是指除了测度为零的集以外)，它为可积且本性有界，使得

$$Th=\int_a^b V(\theta)h(\theta)d\theta,\quad h\in L_1([a,b],\ \mathbf{R}^n).$$

定理4(常数变易公式) 设方程(18)中的L和h满足§1中定理1的假设。则方程(18)过(t_0,φ)的解$x(t_0,\varphi,h)$可表为下列的形式：

$$x(t_0,\varphi,h)(t)=x(t_0,\varphi,0)(t)+\int_{t_0}^t U(t,s)h(s)ds,$$
$$t\geqslant t_0, \tag{19}$$

其中$U(t,s)$为下面方程的解。

$$U(t,s)=\begin{cases}\int_s^t L(u,U_u(\cdot,s))du+I & \text{对}s\text{几乎处处，}t\geqslant s,\\ 0, & s-r\leqslant t<s.\end{cases} \tag{20}$$

或

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U(t,s)}{\partial t}=L(t,U_t(\cdot,s)), & t\geqslant s,\ \text{对}s,t\text{几乎处处。}\\ U(t,s)=\begin{cases}0, & s-r\leqslant t<s,\\ I & t=s.\end{cases}\end{cases} \tag{21}$$

其中$U_t(\cdot,s)(\theta)=U(t+\theta,\ s)$，$-r\leqslant\theta\leqslant 0$。函数$U(t,s)$叫做基本矩阵解。

证 由于$x(t_0,0,\cdot)(t):\mathscr{L}_1([t_0,t],\ \mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}^n$，故根据引理5知存在唯一的$n\times n$矩阵函数$U^*(t,t_0,\cdot)$，$t\geqslant t_0$，使得

$$x(t_0,0,h)(t)=\int_{t_0}^t U^*(t,t_0,s)h(s)ds,\quad t\geqslant t_0. \tag{22}$$

我们要进一步指出，$U^*(t,t_0,s)$是不依赖于t_0的。为此，设$a\in[t_0,$

t]及$k\in L_1([t_0,t],\ \mathbf{R}^n)$且满足当$s\in[t_0,\alpha]$时$k(s)=0$。由于当$t_0-r\leqslant t\leqslant\alpha$时$x(t_0,0,k)(t)=0$，故当$t\geqslant\alpha$时$x(t_0,0,k)(t)=x(\alpha,0,k)(t)$，从而对所有的$k\in L_1([\alpha,t]\mathbf{R}^n)$都有

$$\int_\alpha^t[U^*(t,t_0,s)-U^*(t,\alpha,s)]k(s)ds=0.$$

因此，对s几乎处处有$U^*(t,t_0,s)=U^*(t,\alpha,s)$。由于$\alpha$在$[t_0,t]$上的任意性，所以$U^*(t,t_0,s)$不依赖于$t_0$，现定义

$$U(t,s)=\begin{cases}0, & s-r\leqslant t<s.\\ U^*(t,t_0,s) & t\geqslant s.\end{cases}\tag{23}$$

将方程(18)写成等价的积分方程

$$x(t_0,0,h)(t)=\int_{t_0}^t L(s,x_s(t_0,0,h))ds+\int_{t_0}^t h(s)ds.\tag{24}$$

根据(22)，(23)式以及利用交换积分次序可得到

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t U(t,s)h(s)ds&=\int_{t_0}^t L(s,x_s(t_0,0,h))\,ds+\int_{t_0}^t h(s)ds\\
&=\int_{t_0}^t\left[\int_{-r}^0 d_\theta\eta(s,\theta)x(t_0,0,h)(s+\theta)\right]ds+\int_{t_0}^t h(s)ds\\
&=\int_{t_0}^t\left[\int_{-r}^0 d_\theta\eta(s,\theta)\left(\int_{t_0}^{s+\theta}U(s+\theta,\ u)h(u)du\right)\right]ds\\
&\quad+\int_{t_0}^t h(s)ds\\
&=\int_{t_0}^t\left[\int_{-r}^0 d_\theta\eta(s,\theta)\left(\int_{t_0}^s U(s+\theta,u)h(u)du\right)\right]ds\\
&\quad+\int_{t_0}^t h(s)ds\\
&=\int_{t_0}^t\left[\int_u^t\left(\int_{-r}^0[d_\theta\eta(s,\theta)]U(s+\theta,u)\right)ds\right]h(u)du\\
&\quad+\int_{t_0}^t h(s)ds\\
&=\int_{t_0}^t\left(\int_s^t\left\{\int_{-r}^0 d_\theta\eta(u,\theta)U(u+\theta,s)\right\}du\right)h(s)ds\\
&\quad+\int_{t_0}^t h(s)ds.\end{aligned}$$

由于上式对任意的$h\in L_1([t_0,t],\mathbf{R}^n)$都成立，故

$$U(t,s)=\int_s^t\left(\int_{-r}^0[d_\theta\eta(u,\theta)]U(u+\theta,s)\right)du+I$$

$$=\int_s^t L(u,U_u(\cdot,s))du+I\quad(t\geqslant s).$$

对s几乎处处成立。从而$U(t,s)$满足方程(20)。由(22)及(23)知

$$x(t_0,0,h)(t)=\int_{t_0}^t U(t,s)h(s)ds,\quad t\geqslant t_0.$$

再注意到$x(t_0,\varphi,h)(t)=x(t_0,\varphi,0)(t)+x(t_0,0,h)(t)$，便知(19)式成立。

推论 如果(18)中的$L(t,\phi)\equiv L(\phi)$，则

$$U(t,s)=U(t-s,0)\overset{\text{def.}}{=}U(t-s).$$

且

$$\begin{cases}x(t_0,\varphi,h)(t)=x(t_0-t,\varphi,0)(0)+\displaystyle\int_{t_0}^t U(t-s)h(s)ds,\\ \qquad\qquad t\geqslant t_0.\\ x_{t_0}=\varphi.\end{cases}$$

由(20)容易得推论之证。

常数变易公式亦可写成其他的形式。由(19)式，我们有

$$x(t_0,\varphi,h)(t+\theta)=x(t_0,\varphi,0)(t+\theta)+\int_{t_0}^{t+\theta}U(t+\theta,s)h(s)ds,\quad t+\theta\geqslant t_0,$$

$$x(t_0,\varphi,h)(t+\theta)=\varphi(t-t_0+\theta),\quad t-r\leqslant t+\theta\leqslant t_0,$$

$$-r\leqslant\theta\leqslant 0,$$

由于$U(t+\theta,s)=0$，当$s>t+\theta$时，$x(t_0,\varphi,0)(t+\theta)=\varphi(t-t_0+\theta)$当$t_0-r\leqslant t+\theta\leqslant t_0$时，故可把两个表达式合并成为一个。

$$x(t_0,\varphi,h)(t+\theta)=x(t_0,\varphi,0)(t+\theta)$$

$$+\int_{t_0}^t U(t-\theta,s)h(s)ds,t\geqslant t_0,\quad -r\leqslant\theta\leqslant 0.$$

或

$$x_t(t_0,\varphi,h)(\theta)=x_t(t_0,\varphi,0)(\theta)+\int_{t_0}^t U_t(\cdot,s)(\theta)$$

$\cdot h(s)ds,\quad t\geqslant t_0,\quad -r\leqslant\theta\leqslant 0.$

或 $$x_t(t_0,\varphi,h)=x_t(t_0,\varphi,0)+\int_{t_0}^{t}U_t(\cdot,s)h(s)ds,\quad t\geqslant t_0.$$

我们还可以用解映像的形式来表达常数变易公式。如果

$$x_t(t_0,\varphi,0)\overset{\text{def.}}{=\!=}T(t,t_0)\varphi.$$

则$T(t,t_0)$是一个连续线性算子。此外，由于$U(t,s)$，当$t>s$时对t连续，故由方程(20)知$U(t,s)$当$t>s+r$时对t具有连续的一阶导数。因此，方程(21)对$t\geqslant s+r$，对s几乎处处被满足。所以有

$$U_t(\cdot,s)=T(t,s)X_0.$$

其中 $$X_0(\theta)=\begin{cases}0, & -r\leqslant\theta<0,\\ I, & \theta=0.\end{cases}$$

于是，常数变易公式可写成

$$x_t(t_0,\varphi,h)=T(t,t_0)\varphi+\int_{t_0}^{t}T(t,s)X_0h(s)ds.$$

以上各种形式的常数变易公式，都是(19)式的变形。而(19)式所表示的常数变易公式，是由两部份所组成，即齐次方程$\dot{x}(t)=L(t,x_t)$的解$x(t_0,\varphi,0)$及方程(20)或(21)的解$U(t,s)$。下面我们再作深入一步的探讨，用一个被称为形式伴随方程的某个矩阵解来代替$U(t,s)$，使得齐次方程的解$x(t_0,\varphi,0)(t)$以及非齐次方程的解$x(t_0,0,h)(t)$都能用形式伴随方程的矩阵解表达出来。

对应于方程(18)的齐次方程，由黎斯 (Riesz) 定理可写成

$$\dot{x}(t)=\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(t,\theta)]x(t+\theta). \tag{25}$$

其中$\eta(\cdot,\cdot)$是$n\times n$矩阵函数满足§1中的假定。(18)中的h，假定是局部可积的。

定义方程(18)的形式伴随方程为

$$y(s)+\int_{s}^{\infty}y(\alpha)\eta(\alpha,\ s-\alpha)d\alpha=\text{常数}. \tag{26}$$

其中y为n维行向量，即$y\in R^{n*}$。

设B_0表示由$[-r,0]$到R^{n*}的函数所组成的空间。这些函数在

$[-r,0]$上为有界变差，在$(-r,0)$中左连续，且在0处的值为零，B_0中任一元素ψ的范数定义为$\text{Var}_{[-r,0]}\psi$。即ψ在$[-r,0]$上的全变差。

根据压缩映像原理，我们得到下面的结果：

定理5 对任何的$t\in\mathbf{R}$和$\psi\in B_0$，存在唯一的$y:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^{n*}$，它在$[t,\infty)$上为零，在$(-\infty,t-r]$上满足方程(26)，并使得$y_t=\psi$。又对任何的$s\leqslant t$，如果定义$y_s^0$为

$$y_s^0(\theta)=y(s+\theta),\quad -r\leqslant\theta<0,\quad y_s^0(0)=0.$$

则这个解对每一个$s\leqslant t$可以写为

$$y_s^0=\widetilde{T}(s,t)y_t^0=\widetilde{T}(s,t)\psi.$$

其中$\widetilde{T}(s,t):B_0\to B_0$是有界和线性的。

定理6 如果x在$[t_0,\infty)$上满足方程(18)，则对任何$t\geqslant t_0$，有

$$x(t)=Y(t_0,t)x(t_0)+\int_{t_0-r}^{t_0}d_\beta\left\{\int_{t_0}^{t}Y(\alpha,t)\eta(\alpha,\beta-\alpha)\cdot d\alpha\right\}x(\beta)+\int_{t_0}^{t}Y(\alpha,t)h(\alpha)d\alpha. \tag{27}$$

其中Y是$n\times n$矩阵值函数，由下面的方程所确定：

$$Y(t_0,t)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ I-\int_{t_0}^{t}Y(\alpha,t)\eta(\alpha,t_0-\alpha)d\alpha, & t\geqslant t_0.\end{cases} \tag{28}$$

此外，$Y(t_0,t)$关于t在$t\geqslant t_0$的紧集上为绝对连续，关于t_0为局部地有界变差，而且对t_0几乎处处$Y(t_0,t)=U(t,t_0)$，其中$U(t,t_0)$由方程(21)所确定。

证 由定理5知，存在方程（28）的一个解$Y(t_0,t)$，对t_0是局部地有界变差的。设当$t<t_0$时$W(t_0,t)=0$，

而 $$W(t_0,t)=-\eta(t,t_0-t)-\int_{t_0}^{t}W(\alpha,t)\eta(\alpha,t_0-\alpha)d\alpha,\quad t\geqslant t_0.$$

易知 $$|W(t_0,t)|\leqslant\text{Var}_{[t_0,t]}W(\cdot,t)\leqslant m(t)exp\int_{t_0}^{t}m(\alpha)d\alpha.$$

此外，对$t \geq t_0$，有

$$I+\int_{t_0}^{t} W(t_0,\tau)d\tau = I+\int_{t_0}^{t}\Big[-\eta(\tau,t_0-\tau)$$

$$-\int_{t_0}^{\tau} W(\alpha,\tau)\eta(\alpha,t_0-\alpha)d\alpha\Big]d\tau$$

$$=I-\int_{t_0}^{t}\eta(\alpha,t_0-\alpha)d\alpha-\int_{t_0}^{t}\Big(\int_{\alpha}^{t} W(\alpha,\tau)d\tau\Big)$$

$$\cdot\ \eta(\alpha,t_0-\alpha)d\alpha = I-\int_{t_0}^{t}\Big[I+\int_{\alpha}^{t} W(\alpha,\tau)d\tau\Big]$$

$$\cdot\ \eta(\alpha,t_0-\alpha)d\alpha.$$

故$I+\int_{t_0}^{t} W(t_0,\tau)d\tau$满足方程(28)。由解的唯一性知$Y(t_0,t)=I+\int_{t_0}^{t} W(t_0,\tau)d\tau$，$t \geq t_0$，而几当$t \leq t_0$时在紧集上对$t$绝对连续，对$t_0$为局部有界变差。

假定x是方程(18)过(t_0,φ)的解。由于$x(t)$是t的连续函数，故下面的分部积分法成立。

$$\int_{t_0}^{t^*} d_\alpha Y(\alpha,t)x(\alpha)+\int_{t_0}^{t^*} Y(\alpha,t)d_\alpha x(\alpha)$$
$$=-Y(t_0,t)x(t_0).$$

根据x是方程(18)的解且为绝对连续，故第二个积分与从t_0到t的积分是相同的。第一个积分则等于$-x(t)+\int_{t_0}^{t} d_\alpha Y(\alpha,t)\,x(\alpha)$，根据这些，用$Y(\alpha,t)$乘方程(18)并从$t_0$到$t$来积分，便有

$$x(t)-Y(t_0,t)x(t_0)-\int_{t_0}^{t} Y(\alpha,t)h(\alpha)d\alpha$$

$$-\int_{t_0}^{t} d_\alpha Y(\alpha,t)x(\alpha) = \int_{t_0}^{t} Y(\alpha,t)L(\alpha,x_\alpha)d\alpha. \tag{29}$$

由于$\theta \leq -r$时，$\eta(\alpha,\theta)=\eta(\alpha,-r)$，$\theta \geq 0$时，$\eta(t,\theta)=0$，我们有

$$\int_{t_0}^{t} Y(\alpha,t)L(\alpha,x_\alpha)d\alpha$$

$$=\int_{t_0}^{t}\Big\{Y(\alpha,t)\int_{t_0-r}^{t}[d_\beta\eta(\alpha,\beta-\alpha)]x(\beta)\Big\}d\alpha$$

$$=\int_{t_0-r}^{t} d_\beta\Big\{\int_{t_0}^{t} Y(\alpha,t)\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha\Big\}x(\beta),$$

上式交换积分次序是应用Cameron与Martin的非对称的 Fubini定理。由于$\eta(\alpha,\beta-\alpha)=0$，当$\beta>\alpha$时，故上式可写成

$$\int_{t_0}^{t} Y(\alpha,t)L(\alpha,x)d\alpha=\int_{t_0-\gamma}^{t_0} d_\beta\left\{\int_{t_0}^{t} Y(\alpha,t)\eta(\alpha,\beta-\alpha)\cdot d\alpha\right\}x(\beta)+\int_{t_0}^{t} d_\beta\left\{\int_{t_0}^{t} Y(\alpha,t)\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha\right\}x(\beta).$$

由于Y满足(28)。所以

$$\int_{t_0}^{t} Y(\alpha,t)L(\alpha,x_\alpha)d\alpha=\int_{t_0-\gamma}^{t_0} d_\beta\left\{\int_{t_0}^{t}\right\}x(\beta)+\int_{t_0}^{t} d_\beta[I-Y(\beta,t)]x(\beta)=\int_{t_0-\gamma}^{t_0} d_\beta\left\{\int_{t_0}^{t}\right\}x(\beta)-\int_{t_0}^{t} d_\beta Y(\beta,t)x(\beta).$$

将上式代入(29)式便得到(27)式。

对初值$(t_0,0)$，我们有

$$x(t)=\int_{t_0}^{t} Y(\alpha,t)h(\alpha)d\alpha$$

对每一个 h 成立，h 为局部可积函数。但由定理4知 $x(t)=\int_{t_0}^{t} U(t,\alpha)h(\alpha)d\alpha$，其中 $U(t,\alpha)$由方程(21)所确定。因此，$Y(\alpha,t)=U(t,\alpha)$几乎处处成立。证毕。

公式(27)在应用上是不方便的。但由于大部份线性时滞微分方程具有下列的形式：

$$\dot{x}(t)=\sum_{k=1}^{N} A_k(t)x(t-\omega_k)+\int_{-\omega}^{0} A(t,\theta)x(t+\theta)d\theta, \tag{30}$$

其中$0\leqslant\omega_k\leqslant r$，$0\leqslant\omega\leqslant r$，$A_k(t)$，$A(t,\theta)$为$t$、$\theta$的连续函数，所以对应的形式伴随方程及由此产生的常数变易公式可以简明地表达出来。

其伴随方程是

$$\frac{dy(s)}{ds}=-\sum_{k=1}^{N} y(s+\omega_k)A_k(s+\omega_k)-\int_{-\omega}^{0} y(s-\xi)$$

$$\cdot A(s-\xi,\xi)d\xi. \tag{31}$$

方程(30)的常数变易公式可写为

$$x(t)=U(t,t_0)\varphi(0)+\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0-\omega_k}^{t_0}U(t,\alpha+\omega_k)A_k(\alpha+\omega_k)$$
$$\cdot\varphi(\alpha-t_0)d\alpha+\int_{t_0-\omega}^{t_0}\left[\int_{t_0}^{\alpha+\omega}U(t,s)A(s,\alpha-s)ds\right]$$
$$\cdot\varphi(\alpha-t_0)d\alpha. \tag{32}$$

§3 线性泛函微分方程的稳定性

在这一节中，我们将介绍与稳定性有关的几个等价命题及用特征根判别稳定性的方法

1 与稳定性有关的几个等价命题

考虑齐次线性方程

$$\dot{x}(t)=L(t, x_t). \tag{1}$$

其中L满足§1中的条件。又$U(t, s)$表示方程(1)的基本矩阵解是由§2中定理4所给出 $T(t, t_0)$是方程(1)的解算子， 即$T(t, t_0)\phi=x_t(t_0, \phi)$, $t\geqslant t_0$。

引理1 下面的命题是等价的：

(i) 方程(1)的解有界。

(ii) 方程(1)的零解稳定。

(iii) 对每一个$t_0\in\mathbf{R}$，存在一个常数$k(t_0)$使得$\|T(t, t_0)\|\leqslant k(t_0)$, $t\geqslant t_0$。

(iv) 对每一个$s\in\mathbf{R}$，存在一个常数$K(s)$使得$|U(t, s)|\leqslant K(s)$, $t\geqslant s$。

证 (i)⇒(iii)。

设方程(1)的每一个解有界，则对任何$(t_0, \varphi)\in\mathbf{R}\times C$，存在一常数$k(t_0, \varphi)$使得有界线性算子$T(t, t_0)$满足当$t\geqslant t_0$时有

$$\|T(t, t_0)\varphi\|\leqslant k(t_0, \varphi).$$

由一致有界性原理知存在一常数$k(t_0)$，使得$\|T(t, t_0)\|\leqslant k(t_0)$。

(iii)⇒(iv).

因为$U(t, s)$ 满足方程(20)，于是

$$|U(t, s)|\leqslant \int_s^t m(u)\|U_u(\cdot, s)\|du+1,\quad t\geqslant s.$$
$$\|U_s(\cdot, s)\|=1.$$

因此，$\|U_t(\cdot,s)\|\leqslant 1+\int_s^t m(u)|U_u(\cdot, s)|du,\quad t\geqslant s.$

由积分不等式得到

$$\|U_t(\cdot, s)\|\leqslant \exp\left[\int_s^t m(u)du\right],\quad t\geqslant s. \tag{2}$$

于是 $\|U_t(\cdot, s)\|\leqslant \gamma(s)=\exp\int_s^{s+r} m(u)du,\quad s\leqslant t\leqslant s+r.$ 由于当 $t\geqslant s+r$时$U(t, s)$ 满足方程(1)，所以得到 $\|U_t(\cdot, s)\|\leqslant k(s+r)\gamma(s)$. 可见(iii)⇒(iv).

(iv)⇒(ii).

由§2的定理6知$Y(s, t)=U(t, s)$对s几乎处处成立，再由(iv) 得$|Y(s, t)|\leqslant K(s)$对$s<t$几乎处处成立。再由§2中的公式(27) 得知(ii)成立。

(ii)⇒(i)是显然的。故定理全部得证。

引理2 如果存在常数m_1使得

$$\int_t^{t+r} m(u)du\leqslant m_1,\quad t\in \mathbf{R}. \tag{3}$$

则下列的命题是等价的：

(i) 方程(1) 的解为一致有界。

(ii) 方程(1) 的零解为一致稳定。

(iii) 存在常数k使得对一切$s\in\mathbf{R}$且$t\geqslant t_0$时都有$\|T(t, t_0)\|\leqslant k$.

(iv) 存在常数K使得对一切$t_0\in\mathbf{R}$且$t\geqslant t_0$时都有 $|U(t, s)|\leqslant K$.

证 如果方程(1) 的解为一致有界，则存在一常数$k>0$使得对所有的$t_0\in\mathbf{R}$，$\varphi\in C$，$\|\varphi\|<1$时有

$$|x_t(t_0, \varphi)|\leqslant k,\quad t\geqslant t_0.$$

因此$\|T(t, t_0)\|\leqslant k$，$t\geqslant 0$。故(i)推出了(iii)。

由(3)和(2)式可知，对所有的$s\in\mathbf{R}$，当$s\leqslant t\leqslant s+r$时，$\|U_t(\cdot, s)\|\leqslant\gamma$，$\gamma=e^{mr}$。如果(iii)成立，仿照引理1中(iii)⇒(iv)的证明，即得对所有的$s\in\mathbf{R}$，当$t\geqslant s$时，有$\|U_t(\cdot, s)\|\leqslant k\gamma$。故(iii)推出(iv)。应用§2定理6，易知(iv)成立则(ii)成立。(ii)推(i)是显然的。证毕

［注］(i)—(iii)的等价性并不需要假设(3)。

引理3 如果满足(3)式，则下列的命题是等价的：

(i) 方程(1)的零解为一致渐近稳定。

(ii) 方程(1)的零解为指数渐近稳定。即存在常数$k>0$，$\alpha>0$，使得对所有的$t_0\in\mathbf{R}$，有

$$\|T(t, t_0)\|\leqslant ke^{-\alpha(t-t_0)}, \quad t\geqslant t_0.$$

(iii) 存在常数$K>0$及(ii)中的α，使得对所有的$s\in\mathbf{R}$，有

$$|U(t, s)|\leqslant Ke^{-\alpha(t-s)}, \quad t\geqslant s.$$

证 若(i)成立，则对任何的$\eta>0$，存在$\tau=\tau(\eta)>0$，使得对所有的$t_0\in\mathbf{R}$，$\|\varphi\|\leqslant 1$，有

$$|x_t(t_0, \varphi)|<\eta, \quad t\geqslant t_0+\tau.$$

从而当$t\geqslant t_0+\tau$时$\|T(t, t_0)\|<\eta$。选取$\eta<1$且设

$$\alpha=-\tau^{-1}\log\eta, \quad k=k_0e^{\alpha\tau},$$

其中k_0是引理2的(iii)中的常数，由于方程(1)的零解是一致稳定的，故由引理2知k_0是存在的。对任何的$t\geqslant t_0$，存在整数$n\geqslant 0$，使得$n\tau\leqslant t-t_0<(n+1)\tau$。所以

$$\begin{aligned}\|T(t, t_0)\|&\leqslant\|T(t, t_0+n\tau\|\cdot\|T(t_0+n\tau, t_0)\|\\&\leqslant k_0\|T(t_0+n\tau, t_0)\|\\&\leqslant k_0\eta\|T(t_0+(n-1)\tau, t_0)\|\\&\leqslant k_0\eta^n=k_0e^{-\alpha n\tau}\\&=ke^{-\alpha(n+1)\tau}\leqslant ke^{-\alpha(t-t_0)}.\end{aligned}$$

故(ii)成立。

仿照前面两个引理的证明，不难得到：(ii)成立则(iii)成立，(iii)成立则(i)成立。从而引理证毕。

[注] (i) 与(ii) 的等价性并不需要假设(3)。

2 稳定性的特征根判别法

在这里我们考虑的方程是常系数线性齐次方程:

$$\dot{x}(t)=\sum_{j=1}^{m}A_j x(t-r_j)。 \tag{4}$$

其中A_j是常数$n\times n$矩阵，$0\leqslant r_j\leqslant r$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$。

若方程(4) 的解具有指数形式如 $x(t)=e^{\lambda t}\xi$, ξ 为一常数向量。代入(4) 后得到

$$\left(\lambda I-\sum_{j=1}^{m}A_j e^{-\lambda r_j}\right)\xi=0。 \tag{5}$$

方程(5) 具有$\xi\neq 0$的解的充分必要条件是λ满足如下的方程:

$$\det\left(\lambda I-\sum_{j=1}^{m}A_j e^{-\lambda r_j}\right)=0。 \tag{6}$$

这个方程称为方程(4) 的特征方程，它的根称为(4) 的特征根。

下面介绍特征方程(6) 的根的一个基本性质。

引理4 对任意给定的数ρ，方程(6) 最多只有有限个根满足$Re\lambda\geqslant\rho$。

证 注意到方程(6) 可表为如下的形式

$$\lambda^n+p_{n-1}(e^{-\lambda r_1},\cdots e^{-\lambda r_m})\lambda^{n-1}+\cdots+p_0(e^{-\lambda r_1},\cdots,e^{-\lambda r_m})=0。 \tag{6'}$$

其中p_{n-1}，…，p_0是含有$e^{-\lambda r_1}$，…，$e^{-\lambda r_m}$的多项式。

现设ρ是给定的实数并假定$Re\lambda\geqslant\rho$。则 $|e^{-\lambda r_j}|=e^{-Re\lambda r_j}\leqslant e^{-\rho r_j}$，使得

$$|p_k(e^{-\lambda r_1},\ \cdots,\ e^{-\lambda r_m})|\leqslant B_k$$

对某个常数B_k(与ρ有关)成立，$k=0,\ \cdots,\ n-1$。

现选取正数R足够大，使

$$\frac{B_{n-1}}{R}+\frac{B_{n-2}}{R^2}+\cdots+\frac{B_0}{R^n}<1。$$

方程(6′) 不可能有这样的根使$Re\lambda\geqslant\rho$和$|\lambda|\geqslant R$，因为如果如此

就会有 $|\lambda|^n > B_{n-1}|\lambda|^{n-1} + \cdots + B_0$。这与 (6′) 矛盾。所以使得 $Re\lambda \geq \rho$ 的根 λ 都必须 $|\lambda| < R$。但由复变函数的知识知道，一个不恒等于零的解析函数，在复平面的任何有界集中零点的数目最多为有限个。所以，方程 (6′) 不可能有无穷个多根满足 $Re\lambda \geq \rho$。证毕。

下面的引理给出方程(4) 的解的一种指数估计式，由于证明牵涉较多的泛函分析及复变函数的知识，而且证明较繁，故只述而不证。读者可参看[28]第7章的7.4节。

引理5 (i) 特征方程 (6) 只有有限个纯虚单根，而其他的根均具有负实部的充要条件为：存在正常数 M、k、γ 使得方程 (4) 过任意的 (t_0, φ) 的解都有

$$|x(t_0, \varphi)(t)| \leq M\|\varphi\|e^{-\gamma(t-t_0)} + k\|\varphi\|, \quad t \geq t_0. \tag{7}$$

(ii) 特征方程(6) 的所有根具有负实部的充要条件为：存在正常数 M 和 γ 使得方程(4) 过任意的 (t_0, φ) 的解都有

$$|x(t_0, \varphi)(t)| \leq M\|\varphi\|e^{-\gamma(t-t_0)}, \quad t \geq t_0. \tag{8}$$

定理1 (i) 方程 (4) 的零解为一致稳定的充要条件是其特征根只有有限个纯虚单根，而其他的均具有负实部。

(ii) 方程(4) 的零解为一致渐近稳定的充要条件是其所有的特征根具有负实部。

(iii) 方程(4) 的零解为不稳定的充分条件是存在实部为正的特征根。

证 (i) 如果方程(4) 的特征根只有有限个纯虚根，而其他的根均具有负实部，则由引理5知(7) 式成立。故方程(4)的零解为一致稳定。

反之，如方程(4) 的零解为一致稳定，由引理2知存在常数 k 使得 $\|T(t, t_0)\| \leq k$ $(t \geq t_0)$。从而

$$\begin{aligned}|x(t_0, \varphi)(t)| &\leq \|x_t(t_0, \varphi)\| = \|T(t, t_0)\varphi\| \leq k\|\varphi\| \\ &\leq M\|\varphi\|e^{-\gamma(t-t_0)} + k\|\varphi\|.\end{aligned}$$

再由引理5知方程(6) 的纯虚单根只有有限个，而其他的根具有负实部。

(ii) 如果方程(4) 的所有特征根具有负实部，由引理5知(8) 式成立。故方程(4) 的零解为一致渐近稳定。

反之，如果方程(4) 的零解为一致渐近稳定，由引理3知存在常数$M>0$ 及 $\alpha>0$，使得对所有的 $t_0\in\mathbf{R}$ 有$\|T(t, t_0)\|\leqslant Me^{-\alpha(t-t_0)}$，$t\geqslant t_0$，从而

$$
\begin{aligned}
|x(t_0, \varphi)(t)|\leqslant\|x_t(t_0, \varphi)\|&=\|T(t, t_0)\varphi\|\\
&\leqslant M\|\varphi\|e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad t\geqslant t_0.
\end{aligned}
$$

再由引理5知方程(4) 的特征根均具有负实部。

(iii) 若方程(4) 存在正实部的特征根 λ_0，则方程(4) 相应的解为$x(t)=\xi e^{\lambda_0 t}$，ξ为常向量，于是得到 $|x(t)|=|\xi|e^{(\mathrm{Re}\lambda_0)t}\to\infty$（当$t\to\infty$时）。故方程(4) 的零解不稳定。

从上述的定理看到，常系数线性齐次的微分差分方程的稳定性与它的特征根是否具有负实部有密切关系。不少作者对有关这方面的问题进行研究，例如文[50]，[51]，[52]，[53]等就曾分别对全时滞稳定性、小时滞稳定性、依赖于滞量的稳定性等问题以及与特征根分布的关系及其判别进行了研究。

下面再介绍一种判别线性泛函微分方程稳定性的方法，即采用迭代逼近的指数估计方法。

现考虑线性方程[58]

$$
\begin{cases}
\dot{x}(t)=Ax(t)+\displaystyle\int_{-\tau}^{0}[Bx(t+\theta)+Cx(t-\tau+\theta)]d\theta, & t\geqslant t_0. \\
x(t)=\varphi(t-t_0), \quad t_0-2\tau\leqslant t\leqslant t_0.
\end{cases}
\tag{9}
$$

其中$A=(a_{ij})$、$B=(b_{ij})$、$C=(c_{ij})$皆为$n\times n$常数矩阵，τ 为正常数，$\varphi\in C([-2\tau, 0], \mathbf{R}^n)$。

把(9) 化成等价的积分方程

$$
\begin{cases}
x_i(t)=\varphi_i(t-t_0), \quad t_0-2\tau\leqslant t\leqslant t_0. \\
x_i(t)=\varphi_i(0)e^{a_{ii}(t-t_0)}
\end{cases}
\tag{10}
$$

$$
+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}a_{ij}e^{a_{ii}(t-t_0)}\int_{t_0}^{t}e^{-a_{ii}(s-t_0)}x_j(s)ds
$$

$$+\sum_{j=1}^{n} b_{ij} e^{a_{ii}(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} e^{-a_{ii}(s-t_0)} \int_{-\tau}^{0} x_j(s+\theta) d\theta ds$$

$$+\sum_{j=1}^{n} c_{ij} e^{a_{ii}(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} e^{-a_{ii}(s-t_0)} \int_{-\tau}^{0} x_j(s-\tau+\theta)$$

$$d\theta ds, \qquad t \geqslant t_0, \quad i=1, 2, \cdots, n.$$

定理2 如果满足下列的条件,

(i) $a_{ii}<0$, $i=1, 2, \cdots, n$;

(ii) $\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\left|\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right|\delta_{1j}^{*}+\tau\left(\left|\frac{b_{1j}}{a_{11}}\right|+\left|\frac{c_{1j}}{a_{11}}\right|\right)\right] \triangleq \mu_1<1$;

(iii) $\left[\left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right|+\tau\left(\left|\frac{b_{21}}{a_{22}}\right|+\left|\frac{c_{21}}{a_{22}}\right|\right)\right]\mu_1+\sum\limits_{j=2}^{n}\left[\left|\frac{a_{2j}}{a_{22}}\right|\delta_{2j}^{*}\right.$

$\left.+\tau\left(\left|\frac{b_{2j}}{a_{22}}\right|+\left|\frac{c_{2j}}{a_{22}}\right|\right)\right] \triangleq \mu_2<1$.

其中 $\delta_{ij}^{*}=\begin{cases}0 & i=j, \\ 1 & i\neq j.\end{cases}$ $i=1, 2, \cdots, n$; $j=1, 2, \cdots, n$. 则方程(9) 的零解为渐近稳定。

证 下面给出证明的大概步骤。

1° 对(10) 式使用Gauss—Seide型迭代。

$x_i^{(m)}(t)=\varphi_i(t-t_0)$, $t_0-2\tau \leqslant t \leqslant t_0$.

$x_i^{(m)}(t)=\varphi_i(0) e^{a_{ii}(t-t_0)}$

$$+\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} e^{a_{ii}(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} e^{-a_{ii}(s-t_0)} x_j^{(m)}(s) ds$$

$$+\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} e^{a_{ii}(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} e^{-a_{ii}(s-t_0)} x_j^{(m-1)}(s) ds$$

$$+\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} e^{a_{ii}(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} e^{-a_{ii}(s-t_0)} \int_{-\tau}^{0} x_j^{(m)}(s+\theta) d\theta ds$$

$$+\sum_{j=i}^{n} b_{ij} e^{a_{ii}(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} e^{-a_{ii}(s-t_0)}$$

$$\times\int_{-\tau}^{0} x_j^{(m-1)}(s+\theta)d\theta ds$$

$$+\sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}e^{a_{ii}(t-t_0)}\int_{t_0}^{t} e^{-a_{ii}(s-t_0)}$$

$$\times\int_{-\tau}^{0} x_j^{(m)}(s-\tau+\theta)d\theta ds$$

$$+\sum_{j=i}^{n} c_{ij}e^{a_{ii}(t-t_0)}\int_{t_0}^{t} e^{-a_{ii}(s-t_0)}$$

$$\times\int_{-\tau}^{0} x_j^{(m-1)}(s-\tau+\theta)d\theta ds,$$

$$t\geqslant t_0,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

取零次近似为：

$$x_1^{(0)}(t)=\varphi_1(0)e^{a_{11}(t-t_0)},\quad t\geqslant t_0;$$

$$x_i^{(0)}(t)=\varphi_i(0)e^{a_{ii}(t-t_0)}+\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}e^{a_{ii}(t-t_0)}$$

$$\times\int_{t_0}^{t} e^{-a_{ii}(s-t_0)}x_j^{(0)}(s)ds$$

$$+\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}e^{a_{ii}(t-t_0)}\int_{t_0}^{t} e^{-a_{ii}(s-t_0)}$$

$$\times\int_{-\tau}^{0} x_j^{(0)}(s+\theta)d\theta ds$$

$$+\sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}e^{a_{ii}(t-t_0)}\int_{t_0}^{t} e^{-a_{ii}(s-t_0)}$$

$$\times\int_{-\tau}^{0} x_j^{(0)}(s-\tau+\theta)d\theta ds,$$

$$t\geqslant t_0,\quad i=2,\ 3,\ \cdots,\ n.$$

2° 取$\varepsilon>0$充分小及常数$k>0$，使

$$|x_i^{(0)}(t)|\leqslant ke^{-\varepsilon(t-t_0)},\quad t_0-2\tau\leqslant t<\infty.$$

然后用数学归纳法证明对一切自然数m，有

$$|x_i^{(m)}(t)-x_i^{(m-1)}(t)|\leqslant k\mu_0^m e^{-\varepsilon(t-t_0)},\quad 0<\mu_0<1;$$

$$|x_i^{(m)}(t)| \leqslant \frac{k}{1-\mu_0} e^{-\varepsilon(t-t_0)}, \quad i=1, 2, \cdots, n.$$

3° $\{x_i^{(m)}(t)\}$是基本列，故存在$x_i^*(t)$使得当$m\to\infty$时$x_i^{(m)}(t)\to x_i^*(t)$。且在任何闭区间$[t_0, T]$上的收敛性是一致的。故$x^*(t)$是方程(10)的解，也有估计式

$$|x_i^*(t)| \leqslant \frac{k}{1-\mu_0} e^{-\varepsilon(t-t_0)}, \quad i=1, 2, \cdots, n. \tag{11}$$

4° 由(11)式得方程(9)的零解的渐近稳定，故定理得证。

推论 若满足下列条件

(i) $a_{ii}<0$, $i=1, 2, \cdots, n$;

(ii) $\sum_{j=1}^{n}\left[\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|\delta_{ij}^* + \tau\left(\left|\frac{b_{ij}}{a_{ii}}\right| + \left|\frac{c_{ij}}{a_{ii}}\right|\right)\right]<1$, $i=1, 2, \cdots, n$.

则方程(9)的零解为渐近稳定。

§4 稳定区域的D划分法

本节将通过具体的常系数微分差分方程，介绍如何在系数空间中划分稳定性的区域，这种方法通常称为D划分法。

首先考虑纯量方程

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t-r), \quad r>0. \tag{1}$$

其对应的特征方程为

$$h(\lambda) \triangleq \lambda + a + be^{-r\lambda} = 0. \tag{2}$$

当$\lambda=0$时得$a+b=0$。

当$\lambda=i\zeta$时得参数方程

$$a = -b\cos r\zeta, \quad b\sin r\zeta = \zeta. \tag{3}$$

下面考察特征根在(a, b)平面上的分布情况。

1° 当$0<\zeta<\frac{\pi}{r}$时。

由于 $\zeta\to 0^+$时，$(a, b)\to\left(-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right)$;

$$\zeta \to \left(\frac{\pi}{r}\right)^{-} \text{时}, \ (a, \ b) \to (\infty, \ \infty);$$

$$\zeta = \frac{\pi}{2r} \text{时}, \ (a, \ b) = \left(0, \ \frac{\pi}{2r}\right)。$$

可见此时(3) 的图形如图7.1中的曲线C_1。在C_1上对应的特征根有$\mathrm{Re}\lambda=0$。

2° 当 $\frac{\pi}{r}<\zeta<\frac{2\pi}{r}$时。

由于 $\zeta \to \left(\frac{\pi}{r}\right)^{+}$时，$(a, \ b) \to (\infty, \ -\infty)$。

$$\zeta \to \left(\frac{2\pi}{r}\right)^{-} \text{时}, \ (a, \ b) \to (-\infty, \ \infty)。$$

$$\zeta = \frac{3\pi}{2r} \text{时}, \ (a, \ b) = \left(0, \ -\frac{3\pi}{2r}\right)。$$

可见此时(3) 的图形如图7.1中的曲线C_2。在C_2上对应的特征根有$\mathrm{Re}\lambda=0$。

3° 当 $\frac{2\pi}{r}<\zeta<\frac{3\pi}{r}$时。

通过大略的分析，可知此时(3) 的图形如图7.1的曲线 C_3所示。与之对应的特征根有$\mathrm{Re}\lambda=0$。

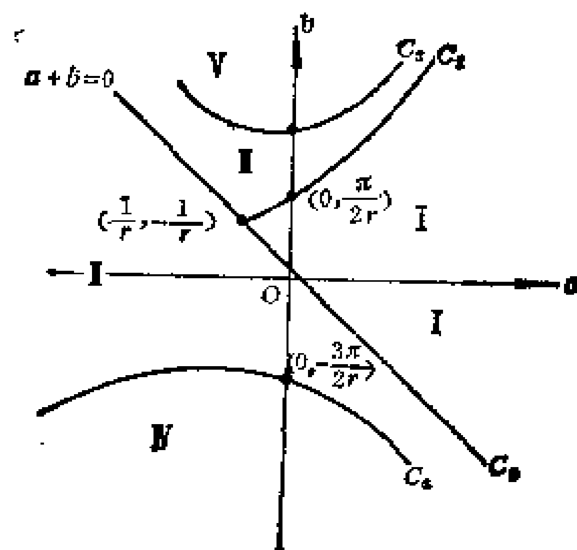


图7.1

上述的那些曲线将$(a,\ b)$平面划分为许多个区域如 I、II、III、IV、V等。如图7.1所示。下面我们在这些区域上考察方程(1) 的零解的稳定性。

①在区域I上。

取定一点$(a_0,\ b_0)$，$a_0>0$，$b_0=0$，则特征方程(2) 有实根$\lambda=-a_0<0$。当$(a,\ b)$ 从 $(a_0,\ b_0)$ 出发变动时，(2) 的根λ也随之连续地变动，在没有到达边界C_0及C_1之前，$\mathrm{Re}\lambda<0$。故在区域I内的a，b值方程(1) 的零解为一致渐近稳定。

②在区域II内。

对方程(2) 微分得

$$\frac{\partial h}{\partial\lambda}d\lambda+\frac{\partial h}{\partial a}da+\frac{\partial h}{\partial b}db=0.$$

即
$$(1-bre^{-r\lambda})d\lambda+da+e^{-r\lambda}db=0. \tag{4}$$

设点 $(a_0,\ b_0)$ 在区域 I 与II的交界 C_0上。因为C_0 对应的$\lambda=0$，故代入(4) 得

$$(1-b_0r)d\lambda+da+db=0. \tag{5}$$

设$\lambda=\xi+i\zeta$，则$d\lambda=d\xi+id\zeta$。现证点 $(a_0,\ b_0)$ 平行于a轴向左穿入区域II，则$da<0$，$db=0$。现考虑$d\zeta=0$的情形。此时(5)式写成

$$(1-b_0r)d\xi=-da. \tag{6}$$

不妨设$b_0<\frac{1}{r}$，则由$da<0$得到$d\xi>0$。可见点$(a,\ b)$ 从区域I穿过点 $(a_0,\ b_0)$ 进入区域II时，ξ是是递增的，在I内$\xi<0$，在 C_0上$\xi=0$，故在II内$\xi>0$。亦即$Re\lambda>0$。可见区域II对应的a，b值使方程(4) 的零解不稳定。

③在区域III内

取定一点 $(a_0,\ b_0)$ 在区域II与III的交界C_0上并且$b_0>\frac{1}{r}$。当区域II中一点 $(a,\ b)$ 通过 $(a_0,\ b_0)$ 平行a轴进入区域 III时，则$da>0$，$db=0$。又令$d\zeta=0$，则由(6) 式得 $d\xi>0$。可见 $(a,\ b)$从(a_0,b_0)水平地进入区域III时，ξ是递增的，对应于$(a_0,\ b_0)$

的$\xi=0$，故进入区域III时$\xi>0$。可见区域III内的a，b使方程(1)的零解不稳定。

采用同样的方法，可以讨论方程(1) 在区域 IV、V等的稳定性。

下面我们考察二阶方程

$$\ddot{x}(t)+a\dot{x}(t-1)+bx(t-1)=0 \tag{7}$$

在系数a，b平面中解的稳定性区域。

特征方程为

$$\lambda^2+(a\lambda+b)e^{-\lambda}=0. \tag{8}$$

象前一例子那样，首先找出D划分的边界。对于零根（$\lambda=0$）得$b=0$，对于纯虚根（$\lambda=iy$）得

$$-y^2+(aiy+b)(\cos y-i\sin y)=0$$

分开实部与虚部得

$$-y^2+ay\sin y+b\cos y=0,$$

$$ay\cos y-b\sin y=0,\quad y\neq 0.$$

或 $$a=y\sin y,\quad b=y^2\cos y,\quad 0<y<\infty.$$

这是一条螺旋形的曲线C_0（见图7.2），曲线与坐标轴将（a，b）平面划分为许多区域如I，II，III，Iv 等等。下面考察方程（7）在各个区域中的零解稳定性的情况。

当$b=0$时，方程(8) 为

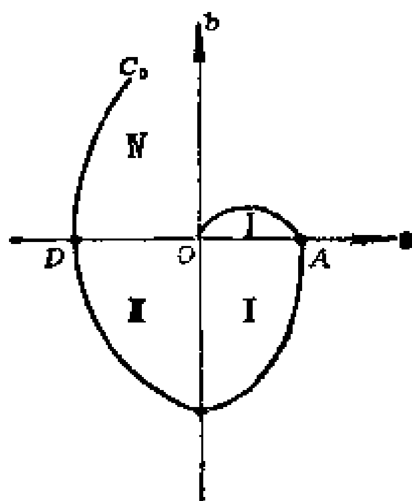


图7.2

$$\lambda^2 + a\lambda e^{-\lambda} = 0. \tag{9}$$

由此可以看出，在a轴上不可能有具正实部的根，即 $\mathrm{Re}\lambda \leqslant 0$，而且有$\lambda = 0$的根。

今在直线段OA上任取一点 $(a_0, 0)$，现考察从点 $(a_0, 0)$ 出发进入区域I和II时，方程(8) 的根的变化情况。

过通(8) 求$\dfrac{\partial\lambda}{\partial b}$得

$$2\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial b} + ae^{-\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial b} + e^{-\lambda} + (a\lambda + b)(-e^{-\lambda})\frac{\partial\lambda}{\partial b} = 0.$$

当 $a = a_0$，$b = 0$，$\lambda = 0$时，有 $a_0\dfrac{\partial\lambda}{\partial b} + 1 = 0$。故得

$$\mathrm{Re}\,\frac{\partial\lambda}{\partial b} = -\frac{1}{a_0} < 0.$$

由此可见，点(a, b) 从点 $(a_0, 0)$出发平行于b轴进入区域时，对应的所有特征根具有负实部， 直至抵达边界C_0时实部才为零。因此，在区域I中，方程(7) 的零解为一致渐近稳定。

如果点 (a, b) 从 $(a_0, 0)$ 出发平行于b轴进入区域 II时，$\lambda = 0$ 的特征根将出现正实部。故方程(7) 的零解在区域II 中是不稳定的。

用类似的方法，可以讨论其他区域的情形，请读者自行讨论之。

§ 5 李雅普诺夫泛函的存在性

众所周知，对线性常微分方程组

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathbf{R}^{n\times n}, \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{1}$$

A. M. Ляпунов 曾建立了一条著名的定理：如果(1) 之特征方程 $\det(\lambda I - A) = 0$的任意两个特征根λ_1，λ_2，恒满足$\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$，则对任意给定的实对称矩阵 $W \in \mathbf{R}^{n\times n}$，存在实对称阵 $T \in \mathbf{R}^{n\times n}$，使得令 $V(x) = x^T T x$时，沿(1)之解成立$\dot{V}(x(t)) = -x^T(t)Wx(t)$，特别地，若$\det(\lambda I - A) = 0$之根均具有负实部，则$W$正定$\Rightarrow T$为正

定。

下面对更为一般的线性时滞微分方程组

$$\dot{x}(t)=A_0x(t)+\sum_{j=1}^{k}A_jx(t-r_j), \tag{2}$$

其中$A_j\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$j=0,1,2,\cdots,k$。$r_j=\text{cosst}_0>0$，$j=1,2,\cdots,k$，获得了与Ляпунов定理类似的结果。（见文[54]）

定理1 若（2）之特征方程$\det\left(\lambda I-A_0-\sum_{j=1}^{k}A_je^{-\lambda r_j}\right)=0$的任意两个根$\lambda_1$，$\lambda_2$，恒成立$\lambda_1+\lambda_2\neq0$，则对任意给定的实对称阵$W\in\mathbf{R}^{n\times n}$，存在$V$：$C([-r,0],\mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}$，$r=\max_{1\leqslant j\leqslant k}\{r_j\}$。

$$V(\phi)\overset{\text{def}}{=}\phi^T(0)T\phi(0)+2\phi^T(0)\sum_{j=1}^{k}\int_{-r_j}^{0}F(r_j+\theta)A_j\phi(\theta)d\theta+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\int_{-r_j}^{0}\phi^T(u)A_i^T\int_{-r_i}^{0}F(r_i+\theta-r_i-u)A_j\phi(\theta)d\theta du, \tag{3}$$

其中$T\in\mathbf{R}^{n\times n}$为对称阵，$F\in C((-\infty,\infty)\mathbf{R}^{n\times n})$，使得沿方程(2)之解$x_t$成立

$$\dot{V}(x_t)=-x^T(t)Wx(t). \tag{4}$$

定理2 若$\det\left(\lambda I-A_0-\sum_{j=1}^{k}A_je^{-\lambda r_j}\right)=0$之根均位于左半平面，则$W$正定$\Rightarrow T$正定，且存在$u\in C(\{(s,\alpha);0\leqslant s\leqslant\alpha<\infty\},\mathbf{R}^+)$，$v\in C(\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+)$，$u(0,\alpha)=v(0)=0$，$u(s,\alpha)>0,v(s)>0$，$s>0$，$\alpha>0$，$u(s,\alpha),v(s)$ 关于s单调非减，$u(\alpha,\alpha)\longrightarrow\infty$，$\alpha\longrightarrow\infty$，使得

$$u(|\phi(0)|,\alpha)\leqslant V(\phi)\leqslant v(|\phi|),\ \phi\in\{\psi:\ \psi\in C([-r,0],\mathbf{R}^n),\ |\psi|\leqslant\alpha\}. \tag{5}$$

注1：若在(2)中令$A_j=0(j=1,\cdots,k)$，则得到相应的Ляпунов定理。

注2：若对（2），存在 $V(\phi)$，满足（4）、（5）式，则由W之正定性可推出（2）之零解的全局一致渐近稳定性。

在证明定理1和定理2之前，先给出下面的引理和推论。

设给定 $A_j \in \mathbf{R}^{n\times n}$，$j=0,1,\cdots k$，$r_0=0$，$r_j=\text{const}.>0$，$j=1$，$\cdots$，$k$，我们引入如下记号：

$$H(\lambda)\overset{\text{def}}{=}\lambda I - A_0 - \sum_{j=1}^{k} A_j e^{-\lambda r_j} \equiv \lambda I - \sum_{j=0}^{k} A_j e^{-\lambda r_j},$$

$$\wedge \overset{\text{def}}{=} \{\lambda_0:\ R_e\lambda_0>0, \det H(\lambda_0)=0\}.$$

$G(\lambda,W)\overset{\text{def}}{=}H^T(\lambda)^{-1}WH(-\lambda)^{-1}$，$W$为$n\times n$实对称阵，$\det H(\lambda)\neq 0$。

利用解析函留数的性质及数的定义可得

引理1 设$\det H(\lambda_0)=0$，$s\in\mathbf{R}$，则有

(i) $\text{Res}(G(\lambda,W)e^{\lambda s},\ \lambda_0)$ 关于s连续可微且

$$\frac{d}{ds}\text{Res}(G(\lambda,W)e^{\lambda s},\ \lambda_0)=\text{Res}(\lambda G(\lambda,W)e^{\lambda s},\lambda_0).$$

(ii) $\overline{\text{Res}(G(\lambda,W)e^{\lambda s},\lambda_0)}=\text{Res}(G(\lambda,W)e^{\lambda s},\bar{\lambda}_0)$，"—" 表共轭。

(iii) $[\text{Res}(G(\lambda,W)e^{\lambda s},\lambda_0)]^T=\text{Res}(G^T(\lambda,W)e^{\lambda s},\lambda_0)$.

记 $\tilde{G}(\lambda_0,W,s)\overset{\text{def}}{=}\text{Res}(G(\lambda,W)e^{\lambda s},\lambda_0)+\text{Res}(G^T(\lambda,W)e^{-\lambda s},\lambda_0)$，若$\det H(-\lambda_0)\neq 0$，则有

$$\text{(iv)}\ \frac{d}{ds}\tilde{G}(\lambda_0,W,s)-\sum_{j=0}^{k}A_j^T\tilde{G}(\lambda_0,W,s-r_j)$$

$$=\text{Res}(WH(\lambda)^{-1}e^{-\lambda s},\lambda_0),$$

$$\text{(v)}\quad \sum_{j=0}^{k}A_j^T\tilde{G}^T(\lambda_0,W,r_j)+\sum_{j=0}^{k}\tilde{G}(\lambda_0,W,r_j)A_j$$

$$=-\text{Res}(WH(\lambda)^{-1},\lambda_0)-\text{Res}(H^T(\lambda)^{-1}W,\lambda_0).$$

证 我们只对（V）证明。其余类似。由假设，可作圆 C：$|\lambda-\lambda_0|=h>0$，使 $\det H(\lambda)\neq 0, 0<|\lambda-\lambda_0|\leqslant h, \det H(-\lambda)\neq 0$ $0\leqslant|\lambda-\lambda_0|\leqslant h$。根据Res之定义，有

$$\sum_{j=0}^{k} A_j^T \tilde{G}^T(\lambda_0, W, r_j) + \sum_{j=0}^{k} \tilde{G}(\lambda_0, W, r_j) A_j$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{c^+}\Big[\Big(\sum_{j=0}^{k} A_j^T e^{-\lambda r_j}\Big)G(\lambda, W)$$

$$+ G(\lambda, W)\Big(\sum_{j=0}^{k} A_j e^{\lambda r_j}\Big)\Big]d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{c^+}\Big[\Big(\sum_{j=0}^{k} A_j^T e^{\lambda r_j}\Big)G^T(\lambda, W)$$

$$+ G^T(\lambda, W)\Big(\sum_{j=0}^{k} A_j e^{-\lambda r_j}\Big)\Big]d\lambda$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{c^+}\Big[\Big(\lambda I - \sum_{j=0}^{k} A_j^T e^{-\lambda r_j}\Big)G(\lambda, W)$$

$$+ G(\lambda, W)\Big(-\lambda I - \sum_{j=0}^{k} A_j e^{\lambda r_j}\Big)\Big]d\lambda$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{c^+}\Big[\Big(-\lambda I - \sum_{j=0}^{k} A_j^T e^{\lambda r_j}\Big)G^T(\lambda, W)$$

$$+ G^T(\lambda, W)\Big(\lambda I - \sum_{j=0}^{k} A_j e^{-\lambda r_j}\Big)\Big]d\lambda$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{c^+} WH(-\lambda)^{-1}d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{c^+} H^T(\lambda)^{-1}W d\lambda$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{c^+} WH(\lambda)^{-1}d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{c^+} H^T(-\lambda)^{-1}W d\lambda.$$

由C之作法知，$\det H(-\lambda) = \det H^T(-\lambda) \neq 0, \lambda \in C$ 及内部。故由柯西定理推出上式的第一，第四项积分为零。由此得 (v) 式。

利用引理1，注意到 $\det H(\lambda) = 0$根的共轭性及集Λ之有限性。我们有下面的

推论1 设对$\forall\lambda_0 \in \Lambda$成立$\det H(-\lambda_0) \neq 0$，则有

(i) $\Phi(s) = \sum_{\lambda_0 \in \Lambda} \tilde{G}(\lambda_0, W, S)$ 为关于S的$n \times n$实连续可微矩阵，且

$$\Phi^T(s) = \Phi(-s), \frac{d\Phi(s)}{ds} = \sum_{j=0}^{k} A_j^T \phi(s - r_j)$$

$$= \sum_{\lambda_0 \in \Lambda} \text{Res}(WH(\lambda)^{-1}e^{-\lambda s}, \lambda_0).$$

(ii) $\Phi(0) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \bar{G}(\lambda_0, W, 0)$ 为$n \times n$实对称矩阵。

(iii) $\sum_{j=0}^{k} A_j^T \Phi^T(r_j) + \sum_{j=0}^{k} \Phi(r_j) A_j$

$$= - \sum_{\lambda_0 \in \Lambda} [\text{Res}(WH(\lambda)^{-1}, \lambda_0) + \text{Res}(H^T(\lambda)^{-1}W, \lambda_0)].$$

引理2 设$\det H(iy) \neq 0$，$y \in \mathbf{R}$，则

$$\Psi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} G(\lambda, W) e^{\lambda s} d\lambda, \quad s \in \mathbf{R}$$

为$n \times n$实连续函数矩阵，且$\Psi^T(s) = \Psi(-s)$，特别地$\Psi^T(0) = \Psi(0)$为对称矩阵。

证 由上述积分的绝对收敛性即可推得 $\Psi(s)$ 关于 s 的连续性，引理的其余结论可由 $\Psi(s)$ 之定义直接推出。

引理3 设$\det H(iy) \neq$，$y \in \mathbf{R}$，则积分

$$I(s) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \lambda G(\lambda, W) e^{\lambda s} d\lambda, \quad s \in \mathbf{R}$$

关于s在任一不包含$s=0$的闭区间上一致收敛。

(利用广义积分一致收敛判别法及分部积分法可推得此引理。为节省篇幅，略去详细证明)

利用引理 3 可得

推论2 若 $\det H(iy) \neq 0$，$y \in R$，则 $\Psi(s)$ 关于s在 $s \neq 0$处连续可微，且成立

$$\dot{\Psi}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \lambda G(\lambda, W) e^{\lambda s} d\lambda = -\dot{\Psi}^T(-s), s \neq 0. \tag{6}$$

$$\dot{\Psi}(s) - \sum_{j=0}^{k} A_j^T \Psi(s - r_j) = - \sum_{\lambda_0 \in \Lambda} \text{Res}(WH^{-1}(\lambda) e^{-\lambda s}, \lambda_0),$$

$$s > 0. \tag{7}$$

$\lim_{s \to 0^+} \dot{\Psi}(s)$，$\lim_{s \to 0^-} \dot{\Psi}(s)$ 均存在且有限。

证 $\dot{\Psi}(s)$ 之连续性（6）式由引理3及积分号下求微商定理直接推出。又由约当引理知当$s>0$时，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}WH(\lambda)^{-1}e^{-\lambda s}d\lambda=-\sum_{\lambda_0\in\Lambda}Res(WH(\lambda)^{-1}e^{-\lambda},\lambda_0)$$

故有

$$\dot{\Psi}(s)-\sum_{j=0}^{k}A_j^T\Psi(s-r_j)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\lambda G(\lambda,W)e^{\lambda s}d\lambda$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{-i\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}A_j^Te^{-\lambda r_j}\right)G(\lambda,W)e^{\lambda s}d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}H^T(\lambda)G(\lambda,W)e^{\lambda s}d\lambda$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}WH(-\lambda)^{-1}e^{\lambda s}d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}WH(\lambda)^{-1}e^{-\lambda s}d\lambda$$

$$=-\sum_{\lambda_0\in\Lambda}\mathrm{Res}(WH(\lambda)^{-1}e^{-\lambda s},\lambda_0),\quad s>0。$$

所以（7）成立。注意到$\Psi(s)$ 及$\sum\limits_{\lambda_0\subset\Lambda}\mathrm{Res}(WH(\lambda)^{-1}e^{-\lambda s},\lambda_0)$关于$s$之连续性，在（7）式中令$s\to0^+$，即得

$$\lim_{s\to0^+}\dot{\Psi}(s)=\sum_{j=0}^{k}A_j^T\Psi(-r_j)-\sum_{\lambda_0\in\Lambda}\mathrm{Res}(WH(\lambda)^{-1},\lambda_0)。$$

$$\lim_{s\to0^-}\dot{\Psi}(s)=\lim_{s\to0^-}(-\dot{\Psi}^T(-s))=-\lim_{s\to0^+}\dot{\Psi}^T(s)。$$

推论全部证完。

引理4

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^+}H(\lambda)^{-1}d\lambda=\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^+}H^T(\lambda)^{-1}d\lambda=i\pi I_{n\times n}。\tag{8}$$

其中C_R为半圆：$|\lambda|=R$，$\mathrm{Re}\lambda\geqslant0$，$C_R^+$表积分沿正向进行。

证 若记$\widetilde{H}(\lambda)$（$H(\lambda)$ 之伴随矩阵）$=(h_{ij}(\lambda))_{n\times n}$，显然

$$h_{ij}(\lambda)=\widetilde{h}_{ij}(e^{-\lambda r_1},\ \cdots,\ e^{-\lambda r_k},\ \lambda),\ i\neq j. \tag{9}$$

为关于 $(e^{-\lambda r_1},\cdots,e^{-\lambda r_k},\ \lambda)$ 之多项式，且关于 λ 之次数 $\leqslant n-2$，关于 $(e^{-\lambda r_1},\ \cdots,\ e^{-\lambda r_k})$ 之次数 $\leqslant n-1$，而

$$h_{ii}(\lambda)=\lambda^{n-1}+\sum_{j=1}^{n-1}a_j^{(i)}(e^{-\lambda r_1},\ \cdots,\ e^{-\lambda r_k})\lambda^{n-1-j},$$

$$i=1,\ \cdots,\ n, \tag{10}$$

$$\det H(\lambda)=\lambda^n+\sum_{j=1}^{n}a_j(e^{-\lambda r_1},\ \cdots,\ e^{-\lambda r_k})\lambda^{n-j} \tag{11}$$

其中 $a_j^{(i)}(e^{-\lambda r_1},\ \cdots,\ e^{-\lambda r_k})$，$a_j(e^{-\lambda r_1},\ \cdots,\ e^{-\lambda r_k})$ 均为关于 $(e^{-\lambda r_1},\ \cdots,\ e^{-\lambda r_k})$ 之多项式，且次数 $\leqslant n$。

对 λ 作变量置换 $\lambda=Re^{i\theta}$，我们有

$$\int_{C_R^+}H^{-1}(\lambda)d\lambda=\int_{C_R^+}\widetilde{H}(\lambda)/\det H(\lambda)d\lambda$$

$$=i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(h_{ij}^*(Re^{i\theta}))_{n\times n}d\theta,$$

其中 $h_{ij}^*(Re^{i\theta})=\dfrac{Re^{i\theta}h_{ij}(Re^{i\theta})}{\det H(Re^{i\theta})}$，注意当 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，$R>0$ 时，$e^{-Rr_j e^{i\theta}}$ 一致有界。$j=1,\ \cdots,\ k$，故由 (9)，(10)，(11) 式可推出当 $\theta\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，一致成立。

$$|h_{ij}^*(Re^{i\theta})|=\left|\frac{Re^{i\theta}h_{ij}(Re^{i\theta})}{\det H(Re^{i\theta})}\right|\xrightarrow[R\to+\infty]{}0,\ i\neq j.$$

$$h_{jj}^*(Re^{i\theta})=\frac{Re^{i\theta}h_{jj}(Re^{i\theta})}{\det H(Re^{i\theta})}\xrightarrow[R\to+\infty]{}1. \tag{12}$$

由勒贝格积分控制收敛定理推得

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^+}H^{-1}(\lambda)d\lambda=i\lim_{R\to+\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(h_{ij}^*(Re^{i\theta}))_{n\times n}d\theta$$

$$=i\pi I_{n\times n}.$$

整理可得

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^+} H^T(\lambda)^{-1}d\lambda = i\pi I_{n\times n}$$

推论3 设$\det H(iy)\neq 0$，$y\in \mathrm{R}$，$\Psi(s)$ 如引理2所定义，则

$$\sum_{j=0}^{k}[A_j^T\Psi^T(r_j)+\Psi(r_j)A_j]$$

$$= -W+\sum_{\lambda_0\in\Lambda}[\mathrm{Res}(WH(\lambda)^{-1},\lambda_0)+\mathrm{Res}(H^T(\lambda)^{-1}W,\lambda_0)] \tag{13}$$

证 注意到$\Psi^T(r_j)=\Psi(-r_j)$，利用柯西定理及引理4即得

$$\sum_{j=0}^{k}[A_j^T\Psi^T(r_j)+\Psi(r_j)A_j]=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\sum_{j=0}^{k}A_j^Te^{-\lambda r_j}G(\lambda,W)d\lambda$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}G(\lambda,W)\sum_{j=0}^{k}A_je^{\lambda r_j}d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\lim_{t\to+\infty}\left[\int_{-it}^{it}\left[\left(-\lambda I+\sum_{j=0}^{k}A_j^Te^{-\lambda r_j}\right)G(\lambda,W)\right.\right.$$

$$\left.\left.+G(\lambda,W)\left(\lambda I+\sum_{j=0}^{k}A_je^{\lambda r_j}\right)\right]d\lambda\right]$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}WH(\lambda)^{-1}d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}H^T(\lambda)^{-1}Wd\lambda$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}W\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^+}H(\lambda)^{-1}d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^+}H^T(\lambda)^{-1}d\lambda\cdot W$$

$$+\sum_{\lambda_0\in\Lambda}[\mathrm{Res}(WH(\lambda)^{-1},\lambda_0)+\mathrm{Res}(H^T(\lambda)^{-1}W,\lambda_0)]$$

$$=-W+\sum_{\lambda_0\in\Lambda}[\mathrm{Res}(WH(\lambda)^{-1},\lambda_0)$$

$$+\mathrm{Res}(H^T(\lambda)^{-1}W,\lambda_0)].$$

定理1，2之证明

证定理1：在定理1之假设下，显然有 $\det H(iy)\neq 0, y\in \mathrm{R}$，$\det H(-\lambda_0)\neq 0$，$\lambda_0\in\Lambda$。现设$W$为任一给定的$n\times n$实对称矩阵，在（1.3）中令

$$T=\Psi(0)+\Phi(0), \quad F(s)=\Psi(s)+\Phi(s),$$

其中 $\Psi(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}G(\lambda,W)e^{\lambda s}d\lambda$, $G(\lambda, W)=H^T(\lambda)^{-1}WH(-\lambda)^{-1}$, $\Phi(s)=\sum_{\lambda_0\in\Lambda}[\mathrm{Res}(G(\lambda,W)e^{\lambda s},\lambda_0)+\mathrm{Res}(G^T(\lambda,W)e^{-\lambda s},\lambda_0)]$。由推论1，引理2及推论2知$T$为$n\times n$实对称矩阵，$F(s)$为$n\times n$实连续矩阵，且$\dot{F}(s)$在$s\neq 0$处连续，而在$s=0$处为第一类间断点。故对(1.2)之任一解$x_t$利用分部积分法可得

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_t)=&x_t^T(0)\Big(A_0^TT+\sum_{j=1}^{k}A_j^TF^T(r_j)+\sum_{j=1}^{k}F(r_j)A_j\\
&+TA_0\Big)x_t(0)+2x_t^T(0)(T-F(0))\sum_{j=1}^{k}A_jx_t(-r_j)\\
&+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}x_t^T(-r_i)A_i^T\int_{-r_j}^{0}[F(r_j+\theta)\\
&-F^T(-r_j-\theta)]A_jx_t(\theta)d\theta\\
&-x_t^T(0)\sum_{j=1}^{k}\int_{-r_j}^{0}\Big[2\dot{F}(r_j+\theta)-2A_0^TF(r_j+\theta)\\
&-\sum_{i=1}^{k}A_i^TF(r_j+\theta-r_i)-\sum_{i=1}^{k}A_i^TF^T(-r_j\\
&-\theta+r_i)\Big]A_jx_t(\theta)d\theta.
\end{aligned}\tag{13}$$

由T, $F(s)$之定义及推论1之(i),(iii),推论2,3得

$$\begin{aligned}
&A_0^TT+\sum_{j=1}^{k}A_j^TF^T(r_j)+\sum_{j=1}^{k}F(r_j)A_j+TA_0\\
=&\sum_{j=0}^{k}[A_j^T\Psi^T(r_j)-\Psi(r_j)A_j]\\
&+\sum_{j=0}^{k}[A_j^T\Phi^T(r_j)+\Phi(r_j)A_j]=-W.
\end{aligned}\tag{14}$$

$$T-F(0)=0\tag{15}$$

$$F(r_j+\theta)-F^T(-r_j+\theta)\equiv F(r_j\tau\theta)-F(r_j+\theta)\equiv 0,$$
$$-r_j\leqslant\theta\leqslant 0,\quad j=1,\ \cdots k. \tag{16}$$

$$2\dot{F}(r_j+\theta)-2A_0^TF(r_j+\theta)-\sum_{i=1}^{k}A_i^T(r_j+\theta-r_i)$$
$$-\sum_{i=1}^{k}A_i^TF^T(-r_j-\theta+r_i)$$
$$=2\Big[\dot{\Psi}(r_j+\theta)-\sum_{0}^{k}A_i^T\Psi(r_j+\theta-r_i)+\dot{\Phi}(r_j+\theta)$$
$$-\sum_{0}^{k}A_i^T\Phi(r_j+\theta-r_i)\Big]\equiv 0,$$
$$-r_j<\theta\leqslant 0,\quad j=1,2,\cdots k. \tag{17}$$

由（3.1）—（3.5）式推得

$$\dot{V}(x_t)=-x_t^T(0)Wx_t(0)=-x^T(t)Wx(t).$$

定理 1 证毕。

证 定理2：在定理 2 之假设下，$\Lambda=\varnothing$，且 $\det H(iy)\neq 0$，$y\in\mathbf{R}$，故此时在（1.3）中

$$T=\Psi(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}H^T(\lambda)^{-1}WH(-\lambda)^{-1}d\lambda,$$
$$F(s)=\Psi(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}H^T(\lambda)^{-1}WH(-\lambda)^{-1}e^{\lambda s}d\lambda.$$

若W正定，则存在$n\times n$可逆实矩阵P，使得$W=P^TP$，从而对任意的$x\in\mathbf{R}^n$，$x\neq 0$，成立

$$x^TTx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x^TH^T(iy)^{-1}P^TPH(-iy)^{-1}xdy.$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|PH(-iy)^{-1}x|^2dy>0.$$

故T为正定阵，定理 2 的第一个结论成立。

因积分 $\Psi(s)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}H^T(iy)^{-1}P^TPH(-iy)^{-1}e^{iys}dy$ 对任意 $s\in\mathbf{R}$绝对收敛，故对 $\forall\phi\in C([-r,0],\ \mathbf{R}^n)$，在（1.3）中交换

积分限即得

$$V(\phi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^T(0)H^T(iy)^{-1}P^TPH(-iy)^{-1}\phi(0)dy$$

$$+\frac{2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\phi^T(0)H^T(iy)^{-1}P^TPH(-iy)^{-1}$$

$$\cdot\sum_{j=1}^{k}\int_{-r_j}^{0}A_je^{iy(r_j+\theta)}\phi(\theta)d\theta]dy$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\sum\int_{-r_j}^{0}\phi^T(\theta)e^{-iy(r_j+\theta)}A_j^Td\theta\Big)$$

$$\cdot H^T(iy)^{-1}P^TPH(-iy)^{-1}\Big(\sum_{j=1}^{k}\int_{-r_j}^{0}A_je^{iy(r_j+\theta)}\phi(\theta)d\theta\Big)dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|PH(-iy)^{-1}(\varphi(0)$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\int_{-r_j}^{0}A_je^{iy(r_j+\theta)}\varphi(\theta)d\theta)|^2dy\geqslant 0. \qquad (18)$$

显然 $M=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|PH(-iy)^{-1}|^2dy<+\infty$。现令

$$v(s)=M(1+\alpha_1r)^2s^2,\ 0\leqslant s<+\infty.$$

其中$\alpha_1=k\cdot\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k}\{|A_j|\}$，$r=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k}\{r_j\}$，则$v(s)$关于$s$单调非减，$v(0)=0$，$v(s)>0$，$s>0$，且由（1.8）式得

$$V(\varphi)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|PH(-iy)^{-1}|^2(|\varphi(0)|+\alpha_1r|\varphi|)^2dy$$

$$\leqslant M(1+\alpha_1r)^2|\varphi|^2=v(|\varphi|),\ \varphi\in C([-r,0],R^n).$$

又令$r^*=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant k}\{r_j\}$（显然$r^*>0$），取$a_0>0$使$a_0\geqslant|A_0|$。

因 $\frac{1}{a_0}\ln\left(1+\frac{a_0}{2x}\right)\to 0$，$x\to+\infty$，故有$a^*>0$满足$a^*\geqslant\sum\limits_{j=1}^{k}|A_j|$，$\frac{1}{a_0}\ln\left(1+\frac{a_0}{2a^*}\right)\leqslant r^*$。现令

$$u(s,a)=\frac{\lambda^*e^{-2a_0r^*}s^2}{4a_0}\ln\Big(1+\frac{a_0s}{2aa^*}\Big),\ 0\leqslant s\leqslant a<+\infty.$$

其中$\lambda^*=\min\{\lambda: \det(\lambda I-W)=0\}$(由$W$正定性知$\lambda^*>0$)。显然$u(s,\alpha)$关于$0\leqslant s\leqslant\alpha<+\infty$连续，$u(s,\alpha)$关于$s$单调非减，$u(0,\alpha)=0$，$u(s,\alpha)>0$，$0<s\leqslant\alpha$，且$u(\alpha,\alpha)\to+\infty$，$\alpha\to+\infty$。我们证明对$\forall\varphi\in C_\alpha=\{\Psi: \Psi\in C([-r,0],R^n), |\Psi|\leqslant\alpha\}$成立

$$V(\varphi)\geqslant u(|\varphi(0)|,\alpha);$$

事实上，当$\varphi\in C_\alpha$时，有

$$\frac{d}{dt}|x(t,\varphi)|\geqslant-|A_0||x(t,\varphi)|-\sum_{j=1}^{k}|A_j||\varphi(-r_j)|$$

$$\geqslant-\alpha_0|x(t,\varphi)|-\alpha^*\alpha,\quad 0\leqslant t\leqslant r^*. \qquad (19)$$

因$t^*=\frac{1}{\alpha_0}\ln\left(1+\frac{|\varphi(0)|\alpha_0}{2\alpha\alpha^*}\right)\leqslant\frac{1}{\alpha_0}\ln\left(1+\frac{\alpha_0}{2\alpha^*}\right)\leqslant r^*$，由(19)式得

$$|x(t,\varphi)|\geqslant e^{-\alpha_0t}\left[|x(0,\varphi)|-\frac{\alpha^*\alpha}{\alpha_0}(e^{\alpha_0t}-1)\right]$$

$$\geqslant e^{-\alpha_0r^*}\left[|\varphi(0)|-\frac{\alpha^*\alpha}{\alpha_0}(e^{\alpha_0t^*}-1)\right]$$

$$=\frac{e^{-\alpha_0r^*}}{2}|\varphi(0)|,\quad 0\leqslant t\leqslant t^*.$$

再由(4)，(19)式得

$$V(x_{t^*}(\varphi))=V(\varphi)+\int_0^{t^*}\dot V(x_s(\varphi))ds$$

$$=V(\varphi)-\int_0^{t^*}x^T(s,\varphi)Wx(s,\varphi)ds$$

$$\leqslant V(\varphi)-\lambda^*e^{-2\alpha_0r^*}|\varphi(0)|^2t^*/4.$$

由(18)知$V(x_{t^*}(\varphi))\geqslant0$，从而由(19)得

$$V(\varphi)\geqslant\lambda^*e^{-2\alpha_0r^*}|\varphi(0)|^2t^*/4=u(|\varphi(0)|,\alpha).$$

定理2证毕。

§6 线性NFDE的常数变易公式及稳定性

在本节中，我们将介绍有界滞量的线性中立型泛函微分方程的常数变易公式及稳定性的一些结果。

假定D：$C\to\mathbf{R}^n$为线性且于零处是原子的，L：$C\to\mathbf{R}^n$ 为线性连续。则齐次的线性自治NFDE(D,L)为

$$\frac{d}{dt}Dx_t = L(x_t) \tag{1}$$

如果$G\in C$ $([0,\infty),\ \mathbf{R}^n)$，$F\in L_1^{loc}([0,\infty),\ \mathbf{R}^n)$，则非齐次的线性NFDE$(D-G,\ L+F)$为

$$\frac{d}{dt}[Dx_t-G(t)]=Lx_t+F(t),\quad t\geqslant 0. \tag{2}$$

1 常数变易公式

首先介绍一个指数估计式，类似于§1中公式(7)和(12)的证明，可以得到方程(2)过$(0,\varphi)$的解$x_t(\varphi,G,F)$的一个指数估计式，即存在常数a和b使得

$$\|x_t(\varphi,G,F)\|\leqslant be^{at}\Big[\|\varphi\|+\sup_{0\leqslant u\leqslant t}|G(u)-G(0)|$$

$$+\int_0^t|F(s)|ds\Big],\quad t\geqslant 0. \tag{3}$$

假定 $D\phi=\phi(0)-\int_{-r}^{0}[d_\theta\mu(\theta)]\phi(\theta)$，$L\phi=\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(\theta)]\cdot\phi(\theta)$。其中$\mu$和$\eta$皆为$n\times n$ 的有界变差矩阵函数，当$s\to 0$时$Var_{[-s,0]}\mu\to 0$。又设$X(t)$当$t\geqslant -r$时为右连续，在紧集上为有界变差的$n\times n$矩阵函数，并且满足下列的方程。

$$\begin{cases}D(X_t)=I+\int_0^t L(X_s)ds, & t\geqslant 0,\\ X_0(\theta)=\begin{cases}0 & -r\leqslant\theta<0,\\ I & \theta=0.\end{cases}\end{cases} \tag{4}$$

类似§2中常数变易公式的证明，不难得到方程(2)的常数变易公式。

定理1 设$T(t)$ $(t\geqslant 0)$ 为方程(1)所确定的解映射，它是强连续半群，$X(t)$由方程(4)所确定的矩阵函数，则方程(2)过$(0,\varphi)$的解$x(\varphi,G,F)$可表为

$$x(t)=T(t)\varphi(0)+\int_0^t X(t-s)F(s)ds$$

$$-\int_0^{t^*}[d_sX(t-s)][G(s)-G(0)],\quad t\geqslant 0. \tag{5}$$

这就是常数变易公式。

如将（5）变形，则可得到其他形式的常数变易公式。由(5)得

$$x(t)=T(t)\varphi(0)+\int_0^t X(t-s)F(s)ds$$

$$-\int_0^t[d_sX(t-s)]G(s)+\int_0^t[d_sX(t-s)]G(0)$$

$$-\int_t^{t^*}[d_sX(t-s)][G(s)-G(0)], \tag{6}$$

其中 $$\int_0^t[d_sX(t-s)]G(0)=X(0)G(0)-X(t)G(0) \tag{7}$$

$$\int_t^{t^*}[d_sX(t-s)][G(s)-G(0)]$$

$$=X(t-t^*)[G(t)-G(0)]$$

$$-X(0)G(t)+X(0)G(0)$$

$$=-X(0)G(t)+X(0)G(0). \tag{8}$$

将(7)，(8)代入(6)，便可得到如下形式的常数变易公式：

$$x(t)-X(0)G(t)=T(t)\varphi(0)-X(t)G(0)$$

$$+\int_0^t X(t-s)F(s)ds-\int_0^t[d_sX(t-s)]G(s),\quad t\geqslant 0. \tag{9}$$

由于$\theta<0$时$X(\theta)=0$，故(9)式亦可写成下面的形式：

$$x_t(\theta)-X_0(\theta)G(t)=T(t)\varphi(\theta)-X_t(\theta)G(0)$$

$$+\int_0^t X_{t-s}(\theta)F(s)ds-\int_0^t[d_sX_{t-s}(\theta)]G(s),\quad t\geqslant 0. \tag{10}$$

其中$-r\leqslant\theta\leqslant 0$。

我们亦可将(10)式写成下面的形式：

$$x_t-X_0G(t)=T(t)\varphi-X_tG(0)$$

$$+\int_0^t X_{t-s}F(s)ds-\int_0^t[dsX_{t-s}]G(s). \tag{11}$$

上式中后面两项积分应理解为对每一个$\theta\in[-r,0]$时是R^n中的积分。

同样地，(5)式亦可写成

$$x_t = T(t)\varphi + \int_0^t X_{t-s}F(s)ds$$
$$-\int_0^{t} [d_s X_{t-s}][G(s)-G(0)]. \quad (12)$$

常数变易公式(11)亦可写成

$$x_t - X_0 G(t) = T(t)[\varphi - X_0 G(t)]$$
$$+\int_0^t T(t-s)X_0 F(s)ds - \int_0^t [d_s T(t-s)X_0]G(s),$$
$$t\geqslant 0. \quad (13)$$

其中 $T(t)[\varphi - X_0 G(0)] \triangleq T(t)\varphi - X_t G(0)$。

如果令

$$z_t = x_t - X_0 G(t), \quad (14)$$

则(13)式可写为

$$z_t = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)X_0 F(s)ds$$
$$-\int_0^t [d_s T(t-s)X_0]G(s), \quad t\geqslant 0. \quad (15)$$

这个公式与RFDE的常数变易公式十分相象。

如果能选择一个适当的空间，使得变换(14)合理，我们就有可能利用变换(14)的逆及公式（15）来讨论许多干扰的中立型方程。

为此，设PC是由映射$[-r,0]$到R^n的某些函数所组成的空间，这些函数在$[-r,0)$上为一致连续，在0处可以间断。因此，对任何的$\psi\in PC$，都可表为$\psi=\phi+X_0 b$，其中$\phi\in C$，$b\in R^n$。PC中元素的范数定义为$\|\psi\| = \max\limits_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}|\psi(\theta)|$。则$PC$为Banach空间。

对于任何的$\psi\in PC$，定义

$$T(t)\psi = T(t)\phi + T(t)X_0, \quad t\geqslant 0.$$

则算子$T(t)$将PC映射为$[-r,0]$上的函数而且是线性的。但不一

定是将PC映入PC。变换(14)和常数变易公式(13)都适合于在 PC 空间讨论。

对于 NFDE 的稳定性的研究，李雅普诺夫第二方法仍然是最有力的工具。我们将在第九章给予详细的介绍。在本节中，仅仅对线性自治的NFDE的稳定性的特征根法作一些介绍。

2　一类中立型线性微分差分方程渐近稳定的充要条件[59]

考虑中立型方程

$$\frac{d}{dt}[x(t)+cx(t-r)]=ax(t)+bx(t-r)。\tag{16}$$

其中a、b、c、r皆为常数，$|c|<1$，$r\geqslant 0$。

下面的引理，由于证明较繁，故述而不证，读者可参看〔28〕中第12章。

引理1　方程(16)的零解为渐近稳定的充要条件为(16)的特征根都具有负实部，即(16)的特征方程

$$\lambda e^{\lambda r}+c\lambda-ae^{\lambda r}-b=0 \tag{17}$$

的根都具有负实部。

定理2　如果$a+b<0$，则方程(16)的零解为渐近稳定的充要条件为$0\leqslant r\leqslant\Delta(a,b,c)$。其中

$$\Delta(a,b,c)=\begin{cases}\infty, & \text{当}|a|\geqslant|b|,\\ \dfrac{2\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{(1-c^2)(b^2-a^2)}}{(1-c)(a-b)}, & \text{当}|a|<|b|。\end{cases}$$

证　令$z=\lambda r$，则(17)变为

$$ze^z-are^z+cz-br=0。\tag{18}$$

下面分三种情形来讨论。

(i)　当$|a|>|b|$时。应用文〔56〕中的定理5可知，对任意的$r\geqslant 0$，方程(17)所有的根具有负实部，故$\Delta(a,b,c)=\infty$。

(ii)　当$|a|<|b|$时，根据文〔57〕，知方程

$$(\alpha_1 z+\alpha_0)\operatorname{ch}z+(\beta_1 z+\beta_0)\operatorname{sh}z=0 \tag{19}$$

的所有根具有负实部的充要条件为下列三个条件之一成立：

1° $\bar{A}\cdot\bar{B}>0$，$\alpha_1\beta_1>0$，$\alpha_0\alpha_1>0$；

2° $\bar{A}\cdot\bar{B}<0$，$\alpha_1\beta_1>0$，$\alpha_0\alpha_1>0$，$\bar{k}_2=\bar{k}_3$；

3° $\bar{A}\cdot\bar{B}<0$，$\alpha_1\beta_1>0$，$\alpha_0\alpha_1<0$，$\bar{k}_2-\bar{k}_3=1$。

其中 $\bar{A}=\alpha_0\alpha_1$，$\bar{B}=\beta_0\beta_1$，

$$\bar{k}_i=\left[-\frac{\bar{\tau}_i}{\pi}-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\beta_0\operatorname{tg}\bar{\tau}_i}{\alpha_i}\right]+1,\quad i=2,\ 3.$$

$$\bar{\tau}_2=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-\bar{A}\bar{B}}}{\bar{B}},\qquad \bar{\tau}_3=\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{-\bar{A}\bar{B}}}{\bar{B}}\right),$$

$$0<\bar{\tau}_i<\pi,\quad i=2,\ 3.$$

不难看出，当 $\alpha_1=1+c$，$\beta_1=1-c$，$\alpha_0=-\dfrac{(a+b)r}{2}$，$\beta_0=\dfrac{(b-a)r}{2}$时，方程(19)便化为方程(18)的形式，利用条件2°，便得到方程(17)的根均具有负实部的充要条件为

$$\begin{cases}1-c^2>0;\\(b^2-a^2)r^2>0;\\(1+c)(a+b)r<0;\\\bar{k}_2=\bar{k}_3.\end{cases}\tag{20}$$

由于 $|c|<1$，$|b|>|a|$，$a+b<0$，故(20)中的前三个不等式得到满足。由条件$\bar{k}_2=\bar{k}_3$我们得到

$$-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{(1-c^2)(b^2-a^2)}}{(1-c)(b-a)}-\frac{r\sqrt{(1-c^2)(b^2-a^2)}}{2\pi(1-c^2)}$$
$$=-1+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{(1-c^2)(b^2-a^2)}}{(1-c)(b-a)}+\frac{r\sqrt{(1-c^2)(b^2-a^2)}}{2\pi(1-c^2)}.$$

令
$$\bar{x}=-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{(1-c^2)(b^2-a^2)}}{(1-c)(b-a)},$$

$$\bar{y}=-\frac{r\sqrt{(1-c^2)(b^2-a^2)}}{2\pi(1-c^2)}.$$

则有　$\bar{x}+\bar{y}=1-(\bar{x}+\bar{y})$。

故有　$-1<\bar{x}+\bar{y}<0$，

即有
$$-\pi<-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{(1-c^2)(b^2-a^2)}}{(1-c)(b-a)}$$
$$-\frac{r\sqrt{(1-c^2)(b^2-a^2)}}{2(1-c^2)}<0.$$

因为　$\bar{\tau}_2=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{(1-c^2)(b^2-a^2)}}{(1-c)(b-a)}\in(0,\pi)$，

及　$\frac{r\sqrt{(1-c^2)(b^2-a^2)}}{2(1-c^2)}>0$。

故得
$$r<\frac{2\pi(1-c^2)}{\sqrt{(1-c^2)(b^2-a^2)}}-\frac{2(1-c^2)}{\sqrt{(1-c^2)(b^2-a^2)}}$$
$$\cdot\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{(1-c^2)(b^2-a^2)}}{(1-c)(b-a)}.$$

利用$\bar{\tau}_2=\pi-\bar{\tau}_3$，即
$$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{(1-c^2)(b^2-a^2)}}{(1-c)(b-a)}$$
$$=\pi-\operatorname{arctg}\left(\frac{-\sqrt{(1-c^2)(b^2-a^2)}}{(1-c)(b-a)}\right).$$

故得到
$$r<\frac{2\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{(1-c^2)(b^2-a^2)}}{(1-c)(a-b)}\overset{def.}{=\!=}\Delta(a,b,c).$$

(iii) 当$|a|=|b|$时，由$a+b<0$得$a<0$。此时方程 (17) 变为
$$\lambda e^{\lambda r}-ae^{\lambda r}+c\lambda-a=0. \tag{21}$$

下面要证，方程(21)的根均具有负实部。事实上，如果有纯虚根$\lambda=iy$，$y\neq0$，$y\in\mathbf{R}$，代入(21)后得$y=0$，即$\lambda=0$。但$\lambda=0$显然不是(21)的根。故(21)不可能有纯虚根。如果(21)有正实部的根为
$$\lambda=\alpha+i\beta\qquad(\alpha>0).$$

代入方程(21)可得

$$e^{\alpha r}|\alpha-a+i\beta|=|a-c\alpha+ic\beta|.$$

因此有

$$e^{2\alpha r}(\alpha^2+a^2+\beta^2-2\alpha a)=a^2+c^2\alpha^2+c^2\beta^2-2ac\alpha.$$

另一方面，由$\alpha>0$，$|c|<1$及$a<0$可得

$$e^{2\alpha r}\alpha^2>c^2\alpha^2,\quad e^{2\alpha r}a^2>a^2,\quad e^{2\alpha r}\beta^2\geqslant c^2\beta^2,$$

$$e^{2\alpha r}(-2\alpha a)>-2\alpha a>-2\alpha ac.$$

因此，

$$e^{2\alpha r}(\alpha^2+a^2+\beta^2-2\alpha a)>a^2+c^2\alpha^2+c^2\beta^2-2ac\alpha.$$

从而导出矛盾，故对任何的$r\geqslant 0$，方程(21)的根均具有负实部。

综上所述，方程(17)的根均具有负实部的充要条件为$0\leqslant r\leqslant\Delta(a,b,c)$。再根据引理1便得定理之证。

第八章

无界滞量与无穷延滞泛函微分方程解的稳定性与有界性

李雅普诺夫第二方法仍是研究具有无界滞量或无穷延滞的泛函微分方程解的稳定性和有界性的重要方法之一。与有界滞量泛函微分方程类似，我们可得到一些无界滞量或无穷延滞方程解的稳定性与有界性定理。但由于这种方程右端泛函和研究这种方程的李雅普诺夫泛函总"记忆"着"过去"，我们必须建立合理的条件，使得这些泛函的记忆"衰退"或"健忘"。本章将着重叙述这方面的结果。

§1 无界滞量泛函微分方程的稳定性

考虑无界滞量泛函微分方程

$$\dot{x}(t)=F(t,\ x(s);\ \alpha\leqslant s\leqslant t),\ \alpha\geqslant-\infty,\ t\geqslant t_0. \quad (1)$$

其中$x\in\mathbf{R}^n$，$F(t,0)\equiv0$。当$\alpha=-\infty$时，方程(1)既是无界滞量又是无穷延滞的泛函微分方程，简记为$\dot{x}(t)=F(t,x(\cdot))$。

(1)的初始问题是：给定连续函数φ：$[\alpha,\ t_0]\to\mathbf{R}^n$，求方程(1)的解$x(t;t_0,\varphi)$，满足

$$\begin{cases}x(t;t_0,\varphi)=\varphi(t) & \text{当}\alpha\leqslant t\leqslant t_0,\\ \dot{x}(t;t_0,\varphi)=F(t;x(s;t_0,\varphi);\ \alpha\leqslant s\leqslant t),\ t\geqslant t_0.\end{cases}$$

本章将采用下述符号

(i) 设$x\in C\ ([a,b],\ \mathbf{R}^n)$，则

$$\|x\|^{[a,b]}=\sup\{|x(s)|;\ a\leqslant s\leqslant b\},\ |\cdot|\text{为}\mathbf{R}^n\text{中模},$$

(ii) 设$\lambda\in C(R^+,R^+)$，$x\in C([a,b],\ \mathbf{R}^n)$，则

$$\|\lambda(|x|)\|^{[a,b]}=\int_a^b\lambda(|x(t)|)dt.$$

定义1 称泛函$F(t,x(\cdot))$为

(i) 关于t连续，若当$x\in C([\alpha,r),\ \mathbf{R}^n)$时，$F(t,x(\cdot))$对$t\in[\alpha,r)$连续，

(ii) 关于x局部Lipschitz，若对任意$\bar{r}\in[t_0,r)$和$\mathbf{R}^n$中任意紧集L，存在常数$K_{\bar{r},L}$，使

$$|F(t,x(\cdot))-F(t,y(\cdot))|\leqslant K_{\bar{r},L}\|x-y\|^{[\cdot,t]},$$
$$t\in[t_0,\bar{r}],\ x,y\in C([\alpha,t],\ L).$$

定义2 如果W，$\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$连续，严格单增，$W(0)=0$，则称$W$为楔函数。

定义3 设$V(t,\psi(\cdot))$是对$t\geqslant0$和$\psi\in C([\alpha,t],\ \mathbf{R}^n)$定义的纯量泛函，则$V$沿方程(1)的导数为

$$\dot{V}_{(1)}(t,\psi(\cdot))=\overline{\lim_{\Delta t\to0^+}}\frac{V(t+\Delta t,\psi^*(\cdot))-V(t,\psi(\cdot))}{\Delta t},$$

其中

$$\psi^*(s)=\begin{cases}\psi(s),\ \alpha\leqslant s\leqslant t,\\ \psi(t)+F(t,\psi(\cdot))(s-t),\ t\leqslant s\leqslant t+\Delta t.\end{cases}$$

引理1 设$V(t,\psi(\cdot))$对$t\geqslant0$和$\psi\in C([\alpha,t],\ \mathbf{R}^n)$有定义且关于$\psi$局部Lipschitz，则对任给$t\geqslant0$，$\psi\in C([\alpha,t],\ \mathbf{R}^n)$，有

$$\dot{V}_{(1)}(t,\psi(\cdot))=\overline{\lim_{\Delta t\to0^+}}\frac{V(t+\Delta t,x(\cdot,t,\psi))-V(t,\psi(\cdot))}{\Delta t}.$$

其中$x(s;t,\psi)$表方程(1)过(t,ψ)之解。

证 给定t,ψ，存在方程(1)过(t,ψ)之解，定义于$[\alpha,\ t+h]$(h为某正常数)，只须证明

$$V(t+\Delta t,\ x(\cdot,t,\psi))-V(t+\Delta t,\ \psi^{*}(\cdot))$$
$$=0(\Delta t),\ 当\Delta t\to 0^{+}时。$$

选$h_1\in(0,h)$，使当$\alpha\leqslant s\leqslant t+h_1$时，$x(s;t,\psi)$，$\psi^{*}(s)\in Q$，($Q$为$R^n$中某紧集)，设$K$是$V(t,\psi(\cdot))$与$t+h_1$和$Q$相对应的 Lipschitz常数，则当$0<\Delta t\leqslant h_1$时，有

$$|V(t+\Delta t,\ x(\cdot,t,\psi))-V(t+\Delta t,\psi^{*}(\cdot))|$$
$$\leqslant K\sup_{t\leqslant s\leqslant t+\Delta t}|x(s,t,\psi)-\psi(t)-F(t,\psi(\cdot))(s-t)|$$
$$\leqslant K\sup_{t\leqslant s\leqslant t+\Delta t}|F(\bar{t},x(\cdot,t,\psi))-F(t,\psi(\cdot))|\Delta t。$$

其中$t<\bar{t}<s$。由于$F(t,x(\cdot))$之连续性，即知上述不等式右端为$0(\Delta t)$，证毕。

定义4 假如泛函$V(t,x(\cdot))\geqslant 0$，关于t连续，关于x满足局部Lipschitz条件，则称$V(t,x(\cdot))$为李雅普诺夫泛函。

定义5 称方程(1)的零解为稳定，若对任给$\varepsilon>0$，$t_0\geqslant\alpha$，存在$\delta(t_0,\varepsilon)>0$，使当$[\varphi\in C([\alpha,t_0],\ R^n)$，$\|\varphi\|^{[\alpha;t_0]}<\delta(t_0,\varepsilon)$，$t\geqslant t_0]$时，$|x(t,t_0,\varphi)|<\varepsilon$。若$\delta(t_0,\varepsilon)$与$t_0$无关，则称方程(1)的零解为一致稳定。

定义6 称方程(1)的零解为渐近稳定，若零解稳定，且对任给$t_0\geqslant\alpha$，存在$\eta(t_0)>0$，使当$[\varphi\in C([\alpha,t_0],\ R^n)$，$\|\varphi\|^{[\alpha,t_0]}<\eta(t_0)]$时，$\lim\limits_{t\to\infty}x(t;t_0,\varphi)=0$。

定义7 称方程(7)的零解为一致渐近稳定，若零解一致稳定，且存在$\eta_0>0$，使对任给$\varepsilon>0$，存在$T(\varepsilon)>0$，当$[t_0\geqslant\alpha$，$\varphi\in C([\alpha,t_0],\ R^n)$，$\|\varphi\|^{[\alpha;t_0]}<\eta_0$，$t\geqslant t_0+T(\varepsilon)]$时，$|x(t;\ t_0,\ \varphi)|<\varepsilon$。

首先，我们叙述一个稳定性定理。

定理1 设存在一个李雅普诺夫泛函$V(t,x(\cdot))$，楔函数W及连续映射ω：$R^{+}\times R^{+}\to R$，$\omega(t,0)=0$，使

(i) $V(t,0)\equiv 0$，

(ii) $W(|\psi(t)|)\leqslant V(t,\psi(\cdot))$，

(iii) $\dot{V}_{(1)}(t,\psi(\cdot))\leqslant\omega(t,V(t,\psi(\cdot)))$,

则当方程$\dot{r}(t)=\omega(t,r(t))$的零解稳定时，方程(1)的零解稳定；当方程$\dot{r}(t)=\omega(t,r(t))$的零解渐近稳定时，方程(1)的零解渐近稳定。

这是比较定理的直接应用，证明从略。

下述定理应用Razumikhin型技巧，用李雅普诺夫函数代替李雅普诺夫泛函来判别稳定性。

定理2 设存在一个李雅普诺夫函数 $V(t,x)$，楔函数W及非负连续函数ω：$R^+\times R^+\to R^+$，$\omega(t,0)=0$，使

(i) $V(t,0)\equiv 0$,

(ii) $W(|x|)\leqslant V(t,x)$,

(iii) 对 $z(t,\psi(\cdot))=V(t,\psi(t))$，当$t\geqslant 0$，$\psi\in C([\alpha,t],R^n)$，且$V(s,\psi(s))\leqslant V(t,\psi(t))$，$s\in[\alpha,t]$时，有

$$\dot{z}_{(1)}(t,\psi(\cdot))\leqslant\omega(t,V(t,\psi(t)),$$

则当方程 $\dot{r}(t)=\omega(t,r(t))$ 的零解稳定时，方程(1) 的零解也稳定。

证 对 $t\geqslant 0$，$\psi\in C([\alpha,t],R^n)$，定义泛函 $\Omega(t,\psi(\cdot))=\sup\limits_{\alpha\leqslant s\leqslant t}V(s,\psi(s))$，则$\Omega$满足定理1之(i)，(ii)。

对$t\geqslant 0$及$\psi\in C([\alpha,t],R^n)$，为证$\Omega(t,\psi(\cdot))$满足定理1之(iii)，考虑两种情形

若$V(t,\psi(t))<\Omega(t,\psi(\cdot))$，则由$V(s,\psi^*(s))$之连续性，我们断言$V(t+\xi,\psi^*(t+\xi))<\Omega(t,\psi(\cdot))$，当$\xi>0$充分小时。因此，当$\Delta t>0$充分小时，$\Omega(t+\Delta t,\psi^*(\cdot))\leqq\Omega(t,\psi(\cdot))$，从而 $\dot{\Omega}_{(1)}(t,\psi(\cdot))\leqslant 0\leqslant\omega(t,\Omega(t,\psi(\cdot)))$。

若$V(t,\psi(t))=\Omega(t,\psi(\cdot))$，则有当$s\in[\alpha,t]$时，$V(s,\psi(s))\leqslant V(t,\psi(t))$。从而由条件(iii)得当$\xi>0$充分小时，

$$V(t+\xi,\psi^*(t+\xi))-V(t,\psi(t))$$
$$\leqslant\omega(t,V(t,\psi(t)))\xi+\varepsilon(\xi)\xi$$

其中 $\varepsilon(\xi)$ 是正函数，当 $\xi\to 0$ 时，$\varepsilon(\xi)\to 0$。应用 $V(t,\psi(t))=$

$\Omega(t,\psi(\cdot))$，令ξ在$(0,\Delta t]$上变化（其中$\Delta t>0$，Δt充分小），则得

$$\Omega(t+\Delta t,\ \psi^*(\cdot))-\Omega(t,\psi(\cdot))$$
$$\leqslant\omega(t,\Omega(t,\psi(\cdot)))\Delta t+\varepsilon(\Delta t)\Delta t.$$

故定理1之条件(iii)成立，因而由定理1可知，当方程$\dot{r}(t)=\omega(t,r(t))$的零解稳定时，方程(1)的零解也稳定。

关于渐近稳定性，我们先叙述一个Marachkov型定理的推广。

定理3 设对某正常数H_1，存在常数M，使$\|F(t,\psi(\cdot))\|\leqslant M$，对$t\geqslant\alpha$，$\psi\in C([\alpha,t],\ \mathbf{R}^n)$，$\|\psi\|^{[\alpha,t]}\leqslant H_1$成立。又设存在李雅普诺夫泛函$V(t,\psi(\cdot))$，楔函数$W$，$W_1$，满足

(i) $V(t,0)\equiv 0$,

(ii) $V(t,\psi(\cdot))\geqslant W(|\psi(t)|)$,

(iii) $\dot{V}_{(1)}(t,\psi(\cdot))\leqslant -W_1(|\psi(t)|)$.

则方程(1)的零解渐近稳定。

证 定理1说明方程(1)之零解为稳定，故存在$\delta(t_0,H_1)>0$，使当$[t_0\geqslant\alpha,\ \varphi\in C([\alpha,t_0],\ \mathbf{R}^n),\ \|\varphi\|^{[\alpha;t_0]}<\delta,\ t\geqslant t_0]$时，有$|x(t;t_0,\varphi)|\leqslant H_1$。

若$x(t)=x(t;t_0,\varphi)\not\to 0$（$t\to\infty$时），则存在$\varepsilon>0$及序列$\{t_n\}\to\infty$，使$|x(t_n)|\geqslant\varepsilon$。由于$|\dot{x}(t)|\leqslant M$，故存在常数$T>0$，使当$t\in[t_n,\ t_n+T]$时，$|x(t)|\geqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$，则当$t\in[t_n,\ t_n+T]$时，$\dot{V}_{(1)}(t,x(\cdot))\leqslant -W_1(\varepsilon/2)$。不妨假设区间$[t_n,t_n+T]$互不相交（如有必要，选其子列），则

$$0\leqslant V(t,x(\cdot))\leqslant V(t_0,\varphi(\cdot))-W_1(\varepsilon/2)nT,$$
$$\text{当}t>t_n+T\text{时}.$$

可见当n充分大时，上式导出$V(t,x(\cdot))<0$，这与$V>0$矛盾。故定理3成立。证毕。

上述定理是常微分方程和有界滞量泛函微分方程相应定理的平行推广，未能体现无界滞量泛函微分方程右端泛函对过去的

记忆随时间推移而衰退的特点。为反映这个特点，T. A. Burton[101] 首先引入了"健忘的(forgetful)李雅普诺夫泛函"的概念，按照这种思想，人们得到了许多关于无界滞量泛函微分方程稳定性与有界性的有效判别准则，兹介绍如下。

定义8 称泛函$V(t,x(\cdot))$是健忘的，若存在楔函数$W_1(r)$，常数$l>0$满足

(i) $0\leqslant V(t,x(\cdot))\leqslant W_1(\|x\|^{[\alpha,t]})$,

$$t\geqslant\alpha,\ x\in C([\alpha,t],\ \mathbf{R}^n),$$

(ii) 对于任意$D>0$，$\sigma>0$，$t_0\geqslant\alpha$，存在$s>0$，使当$[\|x\|^{[\alpha,t_0]}\leqslant D,\ \|x\|^{[t_0,t_0+s]}\leqslant\sigma,\ t\geqslant t_0+s]$时，

$$0\leqslant V(t,x(\cdot))\leqslant l\max\{W_1(\sigma),\ W_1(\|x\|^{[t_0+s,t]})\}.$$

则当s与t_0无关时，称$V(t,x(\cdot))$是一致健忘的。

定理4[102] 假设存在李雅普诺夫泛函$V(t,x(\cdot))$及楔函数W_1、W_2，W，使得

(i) $0\leqslant V(t,x(\cdot))\leqslant W_1(\|x\|^{[\alpha,t]})$，$t\geqslant\alpha$，$x\in C([\alpha,t],\mathbf{R}^n)$,

(ii) $\dot V_{(1)}(t,x(\cdot))\leqslant -W_2(|x(t)|)-|\dot W_{(1)}(|x(t)|)|$，$t\geqslant t_0$，$x$为方程(1)的解。

则方程(1)的零解渐近稳定且一致稳定。又若

(iii) $V(t,x(\cdot))$是一致健忘的，

则方程(1)的零解一致渐近稳定。

证 对于任意$\varepsilon>0$，取$\delta>0$，使$W^{-1}(W_1(\delta)+W(2\delta))<\varepsilon$，$\delta<\frac{\varepsilon}{2}$。则当$[t_0\geqslant\alpha,\ \|\varphi\|^{[\alpha,t_0]}<\delta,\ t\geqslant t_0]$时，有

$$V(t)=V(t,x(\cdot,t_0,\varphi))\leqslant V(t_0,\varphi)\leqslant W_1(\delta).$$

如果存在$\bar t\geqslant t_0$，使$|x(\bar t)|\geqslant\varepsilon$，则存在最大的$t_1<\bar t$，使$|x(t_1)|=2\delta$，由于(ii)，得

$$\begin{aligned}0\leqslant V(\bar t)&\leqslant V(t_1)-W(|x(\bar t)|)+W(|x(t_1)|)\\&\leqslant V(t_0)-W(|x(\bar t)|)+W(|x(t_1)|),\end{aligned}$$

于是

$$W(|x(\bar{t})|)\leqslant V(t_0)+W(|x(t_\cdot)|)$$
$$\leqslant W_1(\delta)+W(2\delta)<W(\varepsilon),$$

故 $|x(\bar{t})|<\varepsilon$，这与 $\bar{t}$ 之定义矛盾。从而当 $[t_0\geqslant\alpha,\ \|\varphi\|^{[\alpha,t_0]}<\delta,\ t\geqslant t_0]$ 时，$|x(t;t_0,\varphi)|<\varepsilon$。故方程(1)之零解一致稳定。

再证渐近稳定性。取 $\delta_0>0$，使当 $[t_0\geqslant\alpha,\ \|\varphi\|^{[\alpha,t_0]}<\delta_0,\ t\geqslant t_0]$ 时，$|x(t)|=|x(t;t_0,\varphi)|<1$。

由(ii)知 $\varliminf_{t\to\infty}|x(t)|=0$。

下面证明 $\varlimsup_{t\to\infty}|x(t)|=0$。

若不然，有 $\varlimsup_{t\to\infty}|x(t)|=l>0$，则存在互不相交的区间列 $I_k=[t_k,t_k']$，$(k=1,\ 2,\ \cdots)$ 满足

$$|x(t_k)|=l/3,\quad |x(t_k')|=2l/3.$$

由(ii)得

$$0\leqslant V(t_n')\leqslant V(t_0)-\sum_{k=1}^{n}\int_{t_k}^{t_k'}|\dot{W}_{(1)}(|x(s)|)ds$$
$$\leqslant W_1(1)-\sum_{k=1}^{n}[W(|x(t_k')|)-W(|x(t_k)|)]$$
$$\leqslant W_1(1)-n[W(2l/3)-W(l/3)].$$

当 n 充分大时，与 V 之非负性矛盾，于是 $l=0$。因此有 $\lim_{t\to\infty}|x(t)|=0$，即(1)的零解渐近稳定。

再证在附加条件(iii)下，零解一致渐近稳定。

对于任意 $\varepsilon>0$，取 $\sigma>0$，使

$$W^{-1}(lW_1(\sigma)+W(\sigma))<\varepsilon. \tag{2}$$

仍设 $\|\varphi\|^{[\alpha,t_0]}<\delta_0'$，$x(t)=x(t;t_0,\varphi)$，因而

$$|x(t;t_0,\varphi)|<1,\quad t\geqslant t_0.$$
$$0\leqslant V(t,x(\cdot))\leqslant W_1(1),\quad t\geqslant t_0.$$

根据一致健忘泛函的定义，对 $\delta_0>0$，$\sigma>0$，存在 $s>0$，使当 $[t_0\geqslant\alpha,\ \|x\|^{[\alpha,t_0]}\leqslant\delta_0,\ \|x\|^{[t_0,t_0+s]}\leqslant\sigma,\ t\geqslant t_0+s]$ 时，

$$V(t,x(\cdot))\leqslant l\max\{W_1(\sigma),\ W_1(\|x\|^{[t_0+s,t]})\}.$$

由条件(ii)，有

$$\dot{V}_{(1)}(t,x(\cdot))\leqslant -W_2(|x(t)|),\quad t\geqslant t_0.$$

从而存在$L(\sigma)>0$，使得$|x(t;t_0,\varphi)|\geqslant\frac{\sigma}{2}$不能在任何长度超过$L$的区间上一致成立，故必有$t_1\in[t_0,\ t_0+L]\subseteq I_1=[t_0,t_0+L+s]$，使得$|x(t_1)|<\frac{\sigma}{2}$，于是或者

(A) $|x(t)|<\sigma$对所有$t\in I_1$成立，

或者

(B) 存在$\bar{t}\in I_1$，使$|x(\bar{t})|\geqslant\sigma$。

如果(A)成立，则对一切$t\geqslant t_0+L+s$，应有

$$0\leqslant V(t,x(\cdot))\leqslant V(t_0+L+s,\ x(\cdot))\leqslant lW_1(\sigma).$$

假如存在$\bar{t}\geqslant t_0+L+s$，使得$|x(\bar{t})|\geqslant\varepsilon$，则存在最大的满足$|x(t^*)|=\sigma$的$t^*<\bar{t}$。于是

$$0\leqslant V(\bar{t})\leqslant V(t^*)-\int_{t^*}^{\bar{t}}|\dot{W}_{(1)}(|x(t)|)|dt$$

$$\leqslant V(t^*)-W(|x(\bar{t})|)+W(|x(t^*)|).$$

从而 $$W(|x(\bar{t})|)\leqslant V(t^*)+W(|x(t^*)|)$$

$$\leqslant lW_1(\sigma)+W(\sigma),$$

即 $|x(\bar{t})|\leqslant W^{-1}(lW_1(\sigma)+W(\sigma))<\varepsilon$，这与$\bar{t}$之定义矛盾，所以对一切$t\geqslant t_0+L+s$，有$|x(t)|<\varepsilon$.

如果(B)成立，有

$$V(t_0+L+s)\leqslant V(t_0)-\int_{t_0}^{t_0+L+s}|\dot{W}_{(1)}(|x(t)|)|dt$$

$$\leqslant V(t_0)-\left|\int_{t_1}^{\bar{t}}|\dot{W}_{(1)}(|x(s)|)|ds\right|$$

$$\leqslant V(t_0)-\left[W(\sigma)-W\left(\frac{\sigma}{2}\right)\right],$$

于是，V在I_1上就至少要减少$\delta=\left[W(\sigma)-W\left(\frac{\sigma}{2}\right)\right]$。

考虑区间列$I_i=[t_0+(i-1)(L+s),\ t_0+i(L+s)]$，$i=1$，

2，…。在每个区间上，或者(A) 出现，或者(B) 出现。上面表明，当 (B) 出现时，V至少减少δ，但 $V[t, x(\cdot))\leqslant W_1(1)$，故在有限个区间之后，例如 N 个，(A) 一定会出现。因而，当$t\geqslant t_0+(N+1)(L+s)$ 时，$|x(t;t_0,\varphi)|<\varepsilon$。证毕

定义9 称李雅普诺夫泛函$W(t,x(\cdot))$是第I型一致健忘的，若存在楔函数$\bar{W}_i(r)$ $(i=1,2)$，$\lambda(r)$ 满足：对于任意 $D>0$，$\sigma>0$，存在 $S=S(D, \sigma)>0$，使当 $[t_0\geqslant\alpha$，$\|x\|^{[\alpha;t_0]}\leqslant D$，$t\geqslant t_0+S]$时，有

$$0\leqslant W(t,x(\cdot))\leqslant\bar{W}_1(\sigma)+\bar{W}_2(\|\lambda(|x|)\|^{[t_0;t]})_{\circ}$$

定理5[103]假设存在李雅普诺夫泛函$V(t,x(\cdot))$，$W(t,x(\cdot))$，楔函数 $W_i(r)$ $(i=1,2,3)$，$W(t, x(\cdot))$ 是第I型一致健忘的，且$W(t, 0)\equiv0$，使得对任意$x\in C([\alpha, \infty), \mathbf{R}^n)$，有

(i) $W_1(|x(t)|)\leqslant V(t,x(\cdot))\leqslant W_2(|x(t)|)$
$$+W(t,x(\cdot));$$

(ii) $\dot{V}_{(1)}(t, x(\cdot))\leqslant -W_3(|x(t)|)$;

则方程 (1)的零解一致渐近稳定。

证 先证零解是一致稳定。由于$W(t,x(\cdot))$ 是一致健忘的，则存在楔函数$\bar{W}_1(r)$，$\bar{W}_2(r)$，$\lambda(r)$，使对任意$\gamma>0$，令$D=\sigma=\gamma$，存在$S=S(\gamma)$，当$[t_0\geqslant\alpha$，$\|x\|^{[\alpha;t_0]}\leqslant\gamma$，$t\geqslant t_0+S]$ 时，

$0\leqslant W(t, x(\cdot))\leqslant\bar{W}_1(\gamma)+\bar{W}_2(\|\lambda(|x|)\|^{[t_0;t]})$。

对任意$\varepsilon>0$，取$0<\gamma<\varepsilon$，使$\bar{W}_1(\gamma)<W_1(\varepsilon)/2$。

考虑两种情况

(A) $\alpha=-\infty$，取$\delta>0$，$0<\delta<\gamma$，使$W_2(\delta)+\bar{W}_2(S\lambda(\delta))$
$$<\frac{W_1(\varepsilon)}{2}.$$

设 $x(t)=x(t;t_0,\varphi)$是(1)的任意解且$[t_0\geqslant\alpha$，$\|\varphi\|^{[\alpha;t_0]}<\delta$，$t\geqslant t_0]$，则由 $\dot{V}_{(1)}(t, x(\cdot))\leqslant -W_3(|x(t)|)$，得

$$W_1(|x(t)|)\leqslant V(t, x(\cdot))\leqslant V(t_0, \varphi(\cdot))$$
$$\leqslant W_2(|\varphi(t_0)|)+W(t_0, \varphi(\cdot))$$

$$\leqslant W_2(\delta)+\bar{W}_1(\gamma)+\bar{W}_2(\|\lambda(|\varphi|)\|^{[t_0-S;t_0]})$$
$$\leqslant W_2(\delta)+\bar{W}_1(\gamma)+\bar{W}_2(S\lambda(\delta))$$
$$<W_1(\varepsilon).$$

即$|x(t;\ t_0,\ \varphi)|<\varepsilon$。

(B) $\alpha>-\infty$，此时又分两种情形讨论：

(B_1) 如果$t_0-S\geqslant\alpha$，与(A)相同的论证可得，当$[t_0\geqslant\alpha,\ \|\varphi\|^{[\alpha;t_0]}<\delta,\ t\geqslant t_0]$时，$|x(t;\ t_0,\varphi)|<\varepsilon$。

(B_2) 如果$t_0-S<\alpha$，取$\delta_1\in(0,\gamma)$，使

$W_2(\delta_1)+L_{\alpha+S,\gamma}\cdot\delta_1<W_1(\varepsilon)$，其中$L_{\alpha+S,\gamma}$是$W(t,\ x(\cdot))$关于$\alpha\leqslant t\leqslant\alpha+S$，$\|\varphi\|^{[\alpha,t]}<\gamma$的Lipschitz常数。

当$[t_0-S<\alpha,\ \|\varphi\|^{[\alpha,t_0]}<\delta_1,\ t\geqslant t_0]$时，

$$W_1(|x(t)|)\leqslant V(t,x(\cdot))\leqslant V(t_0,x(\cdot))$$
$$\leqslant W_2(\delta_1)+L_{\alpha+S,\gamma}\cdot\delta_1$$
$$<W_1(\varepsilon).$$

取$\bar{\delta}=\min\{\delta_1,\delta\}$，则当$[t_0\geqslant\alpha,\ \|\varphi\|^{[\alpha;t_0]}<\bar{\delta},\ t\geqslant t_0]$时，

$|x(t;t_0,\varphi)|<\varepsilon$。

故$x=0$是一致稳定的。

对于$\bar{\varepsilon}=\min\{1,\ \lambda^{-1}(1)\}$，选取一致稳定定义中的$\delta$，对任意$\varepsilon>0$，取$\sigma>0$，使$W_2(\sigma)+\bar{W}_1(\sigma)<W_1(\varepsilon)/2$。由$W$为第I型健忘的，存在$S=S(\sigma)>0$，使当$[t_0\geqslant\alpha,\ \|x\|^{[\alpha;t_0]}\leqslant1,\ t\geqslant t_0+S]$时，

$$0\leqslant W(t,\ x(\cdot))\leqslant\bar{W}_1(\sigma)+\bar{W}_2(\|\lambda(|x|)\|^{[t_0;t]}).$$

设$x(t)=x(t;\ t_0,\varphi)$是(1)的解且$\|\varphi\|^{[\alpha;t_0]}<\delta$。存在$L=L(\sigma,\delta)>0$，使得在任何长度为$L$的区间上至少存在一点$t$，使$|x(t;t_0,\varphi)|<\sigma$。

事实上，首先注意到

$$0\leqslant V(t,x(\cdot))\leqslant V(t_0,\ \varphi(\cdot))$$
$$\leqslant W_2(|\varphi(t_0)|)+W(t_0,\varphi(\cdot)),\quad t\geqslant t_0.$$

(a) $\alpha=-\infty$。

$$W(t_0,\varphi(\cdot))\leqslant\overline{W}_1(\sigma)+\overline{W}_2(\|\lambda(|x|)\|^{[t_0-S,t_0]})$$
$$\leqslant\overline{W}_1(\sigma)+\overline{W}_2(S\lambda(\delta)),$$
$$V(t,x(\cdot))\leqslant W_2(\delta)+\overline{W}_1(\sigma)+\overline{W}_2(S\lambda(\delta)).$$

(b) $\alpha>-\infty$。此时又有两种情形：

(b_1) 如果 $t_0-S\geqslant\alpha$，关于 $V(t,x(\cdot))$ 有与(a)中相同的上界估计。

(b_2) 如果$t_0-S<\alpha$，则$V(t,x(\cdot))\leqslant W_2(\delta)+L_{\alpha+S,t_0}\cdot\delta$，总之，在任何情况下，$V(t,x(\cdot))$ 是上方有界的，为确定起见，设(a) 成立，存在$K=K(\delta,\ \sigma)>0$，使$V(t,x(\cdot))\leqslant K$，$t\geqslant t_0$。

如果存在$t\geqslant t_1\geqslant t_0$，使$|x(\tau)|\geqslant\sigma$，$\tau\in[t_1,t]$，则

$$V(t,x(\cdot))\leqslant V(t_1,x(\cdot))-W_3(\sigma)(t-t_1),$$

从而$t-t_1\leqslant K/W_3(\sigma)\overset{\text{def.}}{=}L/2$，故至少存在 $\bar{t}\in[t_1,\ t_1+L]$，使$|x(\bar{t})|<\sigma$。

选取序列$\{t_n\}$，$t_n+S\leqslant t_{n+1}\leqslant t_n+S+L$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 满足$|x(t_n)|<\sigma$，$n\geqslant1$。设$I_i=[t_i-S,\ t_i]$ $(i=1,2,\cdots)$，则

$$W_1(|x(t)|)\leqslant V(t,x(\cdot))\leqslant V(t_i,x(\cdot))$$
$$\leqslant W_2(|x(t_i)|)+W(t_i,x(\cdot))$$
$$\leqslant W_2(\sigma)+\overline{W}_1(\sigma)+\overline{W}_2(\|\lambda(|x|)\|^{[t_i-S,t_i]}),$$
$$t\geqslant t_i.$$

对每个I_i，或者

$(\bar{A})$ $\overline{W}_2(\|\lambda(|x|)\|^{[t_i-S,t_i]})<W_1(\varepsilon)/2$，或者

$(\bar{B})$ $\overline{W}_2(\|\lambda(|x|)\|^{[t_i-S,t_i]})\geqslant W_1(\varepsilon)/2$.

若$(\bar{A})$出现，只需重复一致稳定性的论证即得，

$|x(t;\ t_0,\varphi)|<\varepsilon,\ t\geqslant t_i$。

若$(\bar{B})$出现，则

$$\int_{t_i-S}^{t_i}\lambda(|x(t)|)dt\geqslant\overline{W}_2^{-1}(W_1(\varepsilon)/2)\overset{\text{def.}}{=}\alpha\cdot s,$$

则 $\int_0^1\lambda(|x(s\tau+t_i-s)|d_\tau\geqslant\alpha$

由于$\lambda(|x(t;\ t_0,\varphi)|)\leqslant1$，$(t\geqslant t_0)$，故由第六章§2引理1得

$$\int_{t_i-S}^{t_i} W_3(|x(t)|)dt$$

$$=\int_{t_i-S}^{t_i}(W_3\lambda^{-1})(\lambda(|x(t)|))dt\geqslant\beta>0,$$

$$V(t_i,x(\cdot))\leqslant V(t_i-S,x(\cdot))-\int_{t_i-S}^{t_i}W_3(|x(t)|)dt$$

$$\leqslant V(t_i-S,x(\cdot))-\beta.$$

在I_i上，$V(t,\ x(\cdot))$ 至少减少β，但$V(t,x(\cdot))\leqslant K$，故$(\bar{B})$只能在有限个I_i上出现，即存在 $N=N(\delta,\varepsilon)$，使在I_N上$(\bar{A})$ 出现，取$T=N(L+S)$，则

$$|x(t;t_0,\varphi)|<\varepsilon,\quad t\geqslant t_0+N(L+S).$$

即零解一致渐近稳定。证毕。

例1 考虑系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+\int_0^t C(t,s)x(s)ds.\tag{3}$$

其中 A是稳定的 n 阶方阵，$C(t,s)$ 是 n 阶连续矩阵，

$0\leqslant s\leqslant t<+\infty$，$x\in R^n$。

存在正定对称阵B，正常数γ，k，K满足

$$A^TB+BA=-I,\qquad [x^TBx]^{1/2}\leqslant\frac{1}{2k}|x|,$$

$$|Bx|\leqslant K[x^TBx]^{1/2},\quad [x^TBx]^{1/2}\geqslant\gamma|x|,$$

假设存在正常数$\bar{K}$，满足

(i) $\bar{K}\leqslant k-K\int_t^{+\infty}|C(u,t)|du,\quad t\geqslant 0.$

(ii) 任给$\sigma>0$，存在$S>0$，当$[t_0\geqslant 0,\quad t\geqslant t_0+S]$时，

$$\int_0^{t_0}\int_t^{+\infty}|C(u,s)|duds\leqslant\sigma.$$

则方程(3) 的零解为一致渐近稳定。

事实上，取

$$V(t,x(\cdot))=[x^TBx]^{1/2}+K\int_0^t\int_t^{+\infty}|C(u,s)||x(s)|duds.$$

记$W_1(\eta)=\gamma\eta$，$W_2(\eta)=\dfrac{1}{2k}\eta$，$W_3(\eta)=K\eta$，

$$W(t,x(\cdot))=K\int_0^t\int_t^{\infty}|C(u,s)||x(s)|duds,$$

则 $W_1(|x(t)|)\leqslant V(t,x(\cdot))\leqslant W_2(|x(t)|)+W(t,x(\cdot))$。

$\dot{V}_{(3)}(t,x(\cdot))\leqslant -K|x(t)|=-W_3(|x(t)|)$。

显然$W(t,x(\cdot))$关于x满足局部Lipschitz条件且$W(t,0)\equiv 0$。

对于任意的$D>0$，$\sigma>0$，存在$S>0$，使当$t\geqslant t_0+S$时，

$\int_0^{t_0}\int_t^{\infty}|C(u,s)|duds\leqslant\sigma/KD$。

故当[$t_0\geqslant 0$，$\|x\|^{[0,t_0]}\leqslant D$，$t\geqslant t_0+S$]时，

$$\begin{aligned}W(t,x(\cdot))&=K\int_0^{t_0}\int_t^{\infty}|C(u,s)|du|x(s)|ds\\&\quad+K\int_{t_0}^{t}\int_t^{+\infty}|C(u,s)||x(s)|duds\\&\leqslant KD\int_0^{t_0}\int_t^{+\infty}|C(u,s)|duds+(k-K)\int_{t_0}^{t}|x(s)|ds\\&\leqslant\sigma+(k-K)\int_{t_0}^{t}|x(s)|ds.\end{aligned}$$

故$W(t,x(\cdot))$是第I型一致健忘的，由定理5知(1)的零解一致渐近稳定。

接下来，我们将叙述一些关于渐近稳定性的Razumikhin型定理。

首先提出一个古典的结论。在这里，$F(t,x(\cdot))$仅依赖于t和$x(s)$在$g(t)\leqslant s\leqslant t$上的值，其中$\alpha\leqslant g(t)\leqslant t$。这时，方程(1)记为

$$\dot{x}(t)=F(t,x(\cdot),g(t))。\tag{4}$$

定理6 设$t\to\infty$时，$g(t)\to\infty$。如果存在一个李雅普诺夫函数$V(t,x)$，楔函数W，W_1，W_2及连续不减函数P：$[0,\infty)\to[0,\infty)$，$P(r)-r>0$，($r>0$时)，满足

(i) $W_1(|x|)\leqslant V(t,x)\leqslant W(|x|)$

(ii) 对任给初始条件(t_0,φ)，方程(4)过(t_0,φ)的解$x(t)=x(t;t_0,\varphi,g)$满足当[$V(s,x(s))<P(V(t,x(t)))$，$t\geqslant t_0$，

$g(t)\leqslant s\leqslant t$]时，有

$$\dot{V}_{(4)}(t,x(t))\leqslant -W_2(|x(t)|).$$

则方程(4) 的零解一致稳定且渐近稳定。如果存在常数$h>0$，使当$t\geqslant 0$时，$g(t)\geqslant t-h$，则方程(4) 的零解一致渐近稳定。

证 先证一致稳定性。对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta\in(0,\varepsilon)$，使 $W(\delta)<W_1(\varepsilon)$，则对 $t_0\geqslant 0$ 和 $\varphi\in C([a,\ t_0],\ R^n)$，当 $\|\varphi\|^{[a;\ t_0]}<\delta(\varepsilon)$及$t\geqslant t_0$时，

$$\dot{V}_{(4)}(t,x(t))\leqslant 0.$$

只要$t\geqslant t_0$，$V(s,x(s))\leqslant V(t,x(t))$，$s\in[g(t),t]$.

因此，类似于定理 2 的证明，可得$V(t,x(t))\leqslant \sup\limits_{a\leqslant s\leqslant t_0} V(s,\varphi(s))\leqslant W(\delta)<W_1(\varepsilon)$，故当 $t\geqslant t_0$时，$|x(t)|<\varepsilon$，因而(4) 的零解一致稳定。

下面设$H>0$固定，$\delta_1=\delta(H)$，$t_0\geqslant a$，$\varphi\in C([a,t_0],\ R^n)$，当$\|\varphi\|^{[a,t_0]}<\delta_1$时$|x(t;t_0,\varphi)|<H$。

对于任意$t_0\geqslant 0$和$\eta\in(0,\delta_1)$，取定$a=a(\eta)>0$满足

$$a(\eta)<\inf_{W_1(\eta)\leqslant r\leqslant W(H)}\{P(r)-r\}.$$

设$N=N(\eta)$ 为满足下述不等式之正整数

$$W_1(\eta)+Na>W(H).$$

设$\delta_3(\eta)=W_2(W^{-1}(W_1(\eta)))$。

令 $t_0(t_0,\ \eta)=t_0$，按下述方法构造N个数 $t_k(t_0,\eta)$，取定$t_{k+1}(t_0,\eta)$，使当$t\geqslant t_{k+1}(t_0,\eta)-a(\eta)/\delta_3(\eta)$时，$g(t)\geqslant t_k(t_0,\eta)$。记$T(t_0,\eta)=t_N(t_0,\eta)$。

下面证明当$t\geqslant T(t_0,\eta)$ 时，$|x(t,t_0,\varphi)|\leqslant\eta$。只须证明当$t\geqslant t_k(t_0,\eta)$，$k=0,1,\cdots N$时，$V(t,x(t))\leqslant W_1(\eta)+(N-k)a$。

当$k=0$时，这可由N的选取及关于一致稳定性之证明证实。假定上述假设对$k<N$成立，则如果对某一$t\geqslant t_{k+1}-a/\delta_3$，有

$$V(t,x(t))\geqslant W_1(\eta)+(N-k-1)a,$$

那么$P(V(t,x(t)))\geqslant W_1(\eta)+(N-k)a\geqslant V(s,x(s))$，$g(t)\leqslant s\leqslant t$，因此

$\dot{V}_{(4)}(t,x(t))\leqslant-\delta_3<0$.

这表明，若存在 $t^*\geqslant t_{k+1}-a/\delta_3$，使$V(t^*, x(\cdot))\leqslant W_1(\eta)+(N-(k+1))a$，则$t\geqslant t^*$时，$V(t,x(\cdot))\leqslant W_1(\eta)+(N-k-1)a$。

若 $V(t,x(t))\geqslant W_1(\eta)+(N-k-1)a$，$t_{k+1}-a/\delta_3\leqslant t\leqslant\bar{t}$，

则 $$V(\bar{t},x(\bar{t}))\leqslant W_1(\eta)+(N-k)a-\delta_3(\bar{t}-t_{k+1}+a/\delta_3)$$
$$\leqslant V(\bar{t},x(\bar{t}))-\delta_3(\bar{t}-t_{k+1}).$$

因而$\bar{t}\leqslant t_{k+1}$，从而当$t\geqslant t_{k+1}$时，

$$V(t,x(t))\leqslant W_1(\eta)+(N-k-1)a.$$

故 $t\geqslant t_0+t_N(t_0,\eta)$ 时，$|x(t)|<\eta$，所以方程（4）的零解渐近稳定。

若$g(t)\geqslant t-h$，则可取

$$t_k(t_0,\eta)=t_0+k[a(\eta)/\delta_3(\eta)+h],\ k=0,1,2\cdots N.$$

从而$T(t_0,\eta)=t_0+T(\eta)$，$T(\eta)=N(\eta)[a(\eta)/\delta_3(\eta)+h]$与$t_0$无关，故方程(4) 之零解一致渐近稳定。证毕

上述古典的结果对时滞作了较强的限制，即F对$g(t)$ 以前的历史的记忆完全消失。这种结果不适应于一般的 Volterra型积分微分方程。下面将要叙述的结果提出了一种非直接的“衰退”记忆原则，以得到渐近稳定性结论。

考虑方程

$$\dot{x}(t)=F(t,x(s);\ 0\leqslant s\leqslant t). \tag{5}$$

定理7 设存在李雅普诺夫函数 $V(t,x)$，楔函数 W_1，W_2及连续函数P：$[0,+\infty)\to[0,+\infty)$，$P(r)-r>0$ （$r>0$时），满足

(i) $W_1(|x|)\leqslant V(t,x)\leqslant W_2(|x|)$，

(ii) 对方程(5) 的任意解 $x(t)$，$t\in[0,T),T\leqslant\infty$，存在数$r>0$和楔函数$W_3$，使

(ii)$_1$ 当对$S\in[t_0,t],t>0$，$V(s,x(s))<P(V(t,x(t)))$成立时（其中$t_0=\max\{0,t-r\}$），有

(ii)$_2$ $\dot{V}_{(5)}(t,x(t))\leqslant-W_3(|x(t)|)$.

在上述条件下，若$x(t)$ 是方程(5) 定义于$[0,\infty)$ 上的有界解，

则$\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=0$。

本定理的证明完全类似于定理 6 之证明，有兴趣的读者可参阅[104]，[105]。

由定理 6 和定理 7 看出，建立无界滞量泛函微分方程的稳定性定理，必须建立合理的条件，使李雅普诺夫泛函的记忆"衰退"或"健忘"。我们再介绍几个这方面的结果。[106]

定理8 假设存在李雅普诺夫泛函$V(t,x(\cdot))$，楔函数$W_j(r)$ $(j=1,2,3,4)$，连续函数$P(r)$，$P(r)-r>0$ $(r>0)$ 满足

(i) $W_1(|x(t)|)\leqslant V(t,x(\cdot))\leqslant W_2(\|x\|^{[\alpha;t]})$；

(ii) 对任意$D>0,\sigma>0$，存在$h>0$，

使当$[t\geqslant\alpha,\|x\|^{[\alpha;t]}\leqslant D]$时，若 $P(V(t,x(\cdot)))>V(s,x(\cdot))$，$\max\{\alpha,t-h\}\leqslant s\leqslant t$，那么

$$\dot{V}_{(1)}(t,x(\cdot))\leqslant W_3(\sigma)-W_4(V(t,x(\cdot))).$$

则方程(1) 的零解一致渐近稳定。

证 先证$x=0$是一致稳定。对任意$\varepsilon>0$，取$\delta>0$，使$W_2(\delta)<W_1(\varepsilon)$。只需证明$W_1(|x(t;t_0,\varphi)|)\leqslant V(t,x(\cdot))<W_2(\delta)$，$(t\geqslant t_0)$，其中$x(t)=x(t;t_0,\varphi)$ 是(1) 的解且$\|\varphi\|^{[\alpha;t_0]}<\delta$。

显然$V(t_0,\varphi(\cdot))\leqslant W_2(\|\varphi\|^{[\alpha;t_0]})<W_2(\delta)<W_1(\varepsilon)$。若存在第一个$t_1>t_0$，使$V(t_1,x(\cdot))=W_2(\delta)$，则$\dot{V}_{(1)}(t_1,x(\cdot))\geqslant0$。又$P(V(t_1,x(\cdot)))>V(t_1,x(\cdot))\geqslant V(s,x(\cdot))$，$\alpha\leqslant s\leqslant t_1$。

取$D=\varepsilon$，$\sigma>0$，$W_3(\sigma)<W_4(W_2(\delta))$。因$\|x\|^{[\alpha;t_1]}\leqslant\varepsilon$，

$V(s,x(\cdot))<P(V(t_1,x(\cdot)))$ $(\alpha\leqslant s\leqslant t_1)$，

上式对任何$h>0$，$\max\{t_1-h,\alpha\}\leqslant s\leqslant t_1$成立。则

$$\begin{aligned}\dot{V}_{(1)}(t_1,x(\cdot))&\leqslant W_3(\sigma)-W_4(V(t_1,x(\cdot)))\\&\leqslant W_3(\sigma)-W_4(W_2(\delta))<0.\end{aligned}$$

这与$\dot{V}_{(1)}(t_1,x(\cdot))\geqslant0$矛盾。故当$t\geqslant t_0$时，

$V(t,x(\cdot))<W_2(\delta)$，从而$|x(t;t_0,\varphi)|<\varepsilon$。

下面证明$x=0$是一致吸引的。

对于$\bar{\varepsilon}=1$，选取一致稳定性证明中的δ。设$\varepsilon\in(0,\delta)$，$0<a$

$<a(\varepsilon)=\inf\{P(r)-r;\ W_1(\varepsilon)\leqslant r\leqslant W_2(\delta)\}$，正整数$N=N(\varepsilon)$，使$W_1(\varepsilon)+Na\geqslant W_2(\delta)$，$D=W_1^{-1}(W_2(\delta))$，选取$\sigma>0$，使

$$W_4(W_1(\varepsilon))-W_3(\sigma)=\gamma>0.$$

设$x(t)=x(t;t_0,\varphi)$，$\|\varphi\|^{[a,t_0]}<\delta$，则$\|x\|^{[a;t]}\leqslant D$。

对上述$D>0$，$\sigma>0$，存在$h>0$，使当$[t\geqslant a,\|x\|^{[a,t]}\leqslant D]$时，若$P(V(t,x(\cdot)))>V(s,x(\cdot))$，$\max\{a,\ t-h\}\leqslant s\leqslant t$，则

$$\dot{V}_{(1)}(t,x(\cdot))\leqslant W_3(\sigma)-W_4(V(t,x(\cdot))).$$

取$t_k=t_0+k(h+a/\gamma)$，$(k=0,1,\cdots N)$，我们要用归纳法证明$V(t,x(\cdot))\leqslant W_1(\varepsilon)+(N-k)a$，$t\geqslant t_k$，$(k=0,1,\cdots N)$。(6)

当$k=0$时，由$N=N(\varepsilon)$的定义，(6)成立。

设当$k<N$时成立，待证$k+1<N$时，(6)成立。

若存在$\bar{t}\geqslant t_k+h$，使$V(\bar{t},x(\cdot))\geqslant W_1(\varepsilon)+(N-k-1)a$，则

$$P(V(\bar{t},x(\cdot)))>V(\bar{t},\ x(\cdot))+a\geqslant W_1(\varepsilon)+(N-k)a$$
$$\geqslant V(s,\ x(\cdot)),\ \bar{t}-h\leqslant s\leqslant\bar{t}.$$

则 $\dot{V}_{(1)}(\bar{t},x(\cdot))\leqslant W_3(\sigma)-W_4(W_1(\varepsilon))=-\gamma<0$.

上式说明若存在$\hat{t}\geqslant t_k+h$，使$V(\hat{t},x(\cdot))\leqslant W_1(\varepsilon)+(N-k-1)a$，则对所有$t\geqslant\hat{t}$，有$V(t,x(\cdot))\leqslant W_1(\varepsilon)+(N-k-1)a$。

下面证明这样的$\hat{t}$存在，若存在t^*使当$t_k+h=t_{k+1}-a/\gamma\leqslant t\leqslant t^*$时，$V(t,x(\cdot))>W_1(\varepsilon)+(N-k-1)a$，则

$$V(t^*,\ x(\cdot))\leqslant W_1(\varepsilon)+(N-k)a-\gamma(t^*-t_{k+1}+a/\gamma)$$
$$\leqslant V(t^*,\ x(\cdot))-\gamma(t^*-t_{k+1}).$$

从而$t^*\leqslant t_{k+1}$，故

$$V(t,x(\cdot))\leqslant W_1(\varepsilon)+(N-k-1)a,\ (t\geqslant t_{k+1}).$$

令$k=N$，$T=N(h+a/\gamma)$，则$|x(t;t_0,\varphi)|\leqslant\varepsilon$，$t\geqslant t_0+T$。即(1)的零解为一致渐近稳定。证毕。

定义10 称李雅普诺夫泛函$V(t,x(\cdot))$是第II型一致健忘的，如果存在楔函数$W_j(r)$ $(j=1,2)$，非负连续不减函数$\lambda(r)$满足：对任意$D>0$，$\sigma>0$，存在$S=S(D,\ \sigma)>0$，当$[t_0\geqslant a,\|x\|^{[a;t_0]}\leqslant D,\ t\geqslant t_0+S]$时，

$0 \leqslant V(t, x(\cdot)) \leqslant \overline{W}_1(\sigma) + \overline{W}_2(\|x\|^{[t_0, t]})\lambda(t - t_0)$.

定理9 假设存在第II型一致健忘泛函$V(t, x(\cdot))$，李雅普诺夫函数$H(t, x)$，楔函数$W_j(r)$ ($j=1,2,3,4$)，连续函数 $P(r)$，$P(r)-r>0$，($r>0$时)，满足

(i) $W_1(|x(t)|) \leqslant V(t, x(\cdot))$，

(ii) 存在$h>0$，若$P(V(t, x(\cdot))) > V(s, x(\cdot))$，$\max\{\alpha, t-h\} \leqslant s \leqslant t$，则

$\dot{V}_{(1)}(t, x(\cdot)) \leqslant -W_2(|x(t)|)\eta(t)$，

其中对任意$T>0$，存在$r=r(T)>0$，使当$t \geqslant \alpha$时，$\int_t^{t+T} \eta(s)ds \geqslant r$。

(iii) $W_3(|x|) \leqslant H(t, x) \leqslant W_4(|x|)$，

(iv) 任给$L>0$，存在$\bar{D}>0$，当$\|x\|^{[\alpha, t]} \leqslant L$时，

$\dot{H}_{(1)}(t, x) \leqslant \bar{D}$ ($\geqslant -\bar{D}$)，

则方程(1) 的零解是一致渐近稳定。

证 先证$x=0$是一致稳定。对任意$\varepsilon>0$，存在$0<\gamma<\varepsilon$，使$\overline{W}_1(\gamma)<W_1(\varepsilon)/2$。令$D=\sigma=\gamma$，存在$S=S(\gamma)$，使当[$t_0 \geqslant \alpha$，$\|x\|^{[\alpha; t_0]} \leqslant \gamma$，$t \geqslant t_0+S$]时，

$0 \leqslant V(t, x(\cdot)) \leqslant \overline{W}_1(\gamma) + \lambda(t-t_0)\overline{W}_2(\|x\|^{[t_0; t]})$。

考虑两种情况

(a) $\alpha=-\infty$，取$\delta_1>0$，$0<\delta_1<\gamma$，

$\lambda(S)\overline{W}_2(\delta_1)<W_1(\varepsilon)/2$；

(b) $\alpha>-\infty$，此时又分两种情形：

$(b)_1$ $t_0-S \geqslant \alpha$，取$\delta_1>0$同(a)；

$(b)_2$ $t_0-S<\alpha$，设$L_{\alpha+S,\gamma}$为$V(t, x(\cdot))$关于$\|\varphi\|^{[\alpha; t]} \leqslant \gamma$，$\alpha \leqslant t \leqslant \alpha+S$的Lipschitz常数，取$\delta_2>0$，$L_{\alpha+S,\gamma} \cdot \delta_2<W_1(\varepsilon)$。

令$\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$，设$x(t)=x(t; t_0, \varphi)$，$\|\varphi\|^{[\alpha, t_0]}<\delta$。

若(a)成立，则$V(t_0, \varphi) \leqslant \overline{W}_1(\gamma) + \lambda(S)\overline{W}_2(\|\varphi\|^{[t_0-S, t_0]})$

$\leqslant \overline{W}_1(\gamma) + \lambda(S)\overline{W}_2(\delta) < W_1(\varepsilon)$。

若$(b)_1$成立，则同上可证$V(t_0, \varphi)<W_1(\varepsilon)$。

若$(b)_2$成立，则$V(t_0, \varphi(\cdot)) \leqslant L_{\alpha+S,\gamma} \cdot \delta < W_1(\varepsilon)$。

待证$V(t,x(\cdot))<W_1(\varepsilon)$，$(t\geqslant t_0)$。若存在第一个$\bar{t}>t_0$，使$V(\bar{t},\ x(\cdot))=W_1(\varepsilon)$。故存在$t^*<\bar{t}$，使

$$\dot{V}_{(1)}(t^*,\ x(\cdot))>0,\ V(t^*,x(\cdot))\geqslant W_1(\varepsilon)-e,$$

其中$e<\min\left\{\frac{W_1(\varepsilon)}{2},\ \inf\limits_{W_1(\varepsilon)/2\leqslant r\leqslant W_1(\varepsilon)}\{P(r)-r\}\right\}$。

这时，$P(V(t^*,x(\cdot)))$

$$\geqslant V(t^*,x(\cdot))+e\geqslant W_1(\varepsilon)\geqslant V(s,x(\cdot)),\ \alpha\leqslant s\leqslant t^*,$$

因而$\dot{V}_{(1)}(t^*,x(\cdot))\leqslant -W_2(|x(t^*)|)\eta(t^*)\leqslant 0$，这与$\dot{V}_{(1)}(t^*,x(\cdot))>0$矛盾。故$t\geqslant t_0$时，$V(t,\ x(\cdot))<W_1(\varepsilon)$，因而$|x(t;\ t_0,\ \varphi)|<\varepsilon$。即$x=0$一致稳定。

对于$\bar{\varepsilon}=1$，选取一致稳定性证明中的δ。设$x(t)=x(t;t_0,\varphi)$，$\|\varphi\|^{[\alpha,t_0]}<\delta$，则$V(t,\ x(\cdot))<W_1(\bar{\varepsilon})$，$t\geqslant t_0$。

对任意$\varepsilon\in(0,\delta)$，令$0<a<\bar{a}(\varepsilon)=\inf\limits_{W_1(\varepsilon)\leqslant r\leqslant W_1(1)}\{P(r)-r\}$。取正整数$N=N(\varepsilon)$，使$W_1(\varepsilon)+Na\geqslant W_1(1)$。

先证存在$t_1\geqslant t_0+h$，使$V(t_1,\ x(\cdot))\leqslant W_1(\varepsilon)+(N-1)a$。若不然，$V(t,\ x(\cdot))>W_1(\varepsilon)+(N-1)a$，$(t\geqslant t_0+h)$，则

$$P(V(t,x(\cdot)))>V(t,x(\cdot))+a\geqslant W_1(\varepsilon)+Na\geqslant V(s,x(s)),$$

$(t-h\leqslant s\leqslant t)$，则

$$V(t,x(\cdot))\leqslant W_1(1)-\int_{t_0+h}^{t}\eta(s)W_2(|x(s)|)ds.$$

不妨设(iv)为：对任意$L>0$，存在$\bar{D}>0$，当$\|x\|^{(\tau;t)}\leqslant L$时，$\dot{H}_{(1)}(t,\ x)\leqslant\bar{D}$。这里$L=1$，$\bar{D}=\bar{D}(1)$。

对于$D=1$，$\sigma>0$，$\overline{W}_1(\sigma)<W_1(\varepsilon)/2$，存在$S>0$，当$[\bar{t}_0\geqslant t_0$，$\|x\|^{[\alpha,\bar{t}_0]}\leqslant 1$，$t\geqslant\bar{t}_0+S]$时，$W_1(\varepsilon)\leqslant V(t,\ x(\cdot))\leqslant\overline{W}_1(\sigma)+\lambda(t-\bar{t}_0)\overline{W}_2(\|x\|^{[\bar{t}_0,t]})$。

考虑区间$I_j=[t_0+h+(j-1)S,\ t_0+h+jS]$，$(j=1,2,\cdots)$，令$\bar{t}_0=t_0+h+(j-1)S$，$t=t_0+h+jS$。

$$\|x\|^{[\bar{t}_0,t]}\geqslant\overline{W}_2^{-1}((W_1(\varepsilon)-\overline{W}_1(\sigma))/\lambda(s))\overset{\text{def.}}{=\!=}q>0.$$

故必存在$t_j\in I_j$ $(j=1,2,\cdots)$使$|x(t_j)|\geqslant q$。

取$\bar{q}>0$，满足 $\bar{q}<q$，$\bar{q}<W_3(q)$，$2\bar{q}/\bar{D}\leqslant S$。考虑区间 $I'_j=[t_j-\bar{q}/\bar{D},\ t_j]$，$(j=2,3\cdots)$。对任意$t\in I'_j$，

$$H(t_j,x(t_j))-H(t,x(t))\leqslant \bar{D}(t_j-t)\leqslant \bar{q},$$

则 $$W_3(q)-W_4(|x(t)|)\leqslant H(t_j,x(t_j))-H(t,x(t))\leqslant \bar{q},$$

$|x(t)|\geqslant W_4^{-1}(W_3(q)-\bar{q})\overset{\text{def.}}{=\!=}b$，由于$\bar{q}/\bar{D}\leqslant S/2$，则 $I'_j\subseteq I_{j-1}\cup I_j$ $(j=2,3\cdots)$，由条件(ii)，存在$\gamma>0$，使

$$\int_{t_j-\bar{q}/\bar{D}}^{t_j}\eta(t)dt\geqslant r\quad (j=2,3,\cdots).$$

取正整数K，使$W_1(1)-rW_2(b)K<0$，则

$$V(t_0+h+2KS,x(\cdot))\leqslant W_1(1)-\int_{t_1+h}^{t_0+h+2KS}\eta(t)W_2(|x(t)|)dt$$

$$\leqslant W_1(1)-\sum_{j=1}^{K}\int_{t_{2j}-\bar{q}/\bar{D}}^{t_{2j}}\eta(t)W_2(|x(t)|)dt$$

$$\leqslant W_1(1)-rW_2(b)K<0。$$

这与$V\geqslant 0$矛盾，故存在 $t_1\in[t_0+h,\ t_0+h+2KS]$，使 $V(t_1,\ x(\cdot))\leqslant W_1(\varepsilon)+(N-1)a$，

下面证$V(t,x(\cdot))\leqslant W_1(\varepsilon)+(N-1)a$，$(t\geqslant t_1)$。若不然，存在 $t_2>t_1$，使$V(t_2,\ x(\cdot))>W_1(\varepsilon)+(N-1)a$，且满足 $\dot{V}_{(1)}(t_2,x(\cdot))>0$，但$P(V(t_2,x(\cdot)))>V(t_2,x(\cdot))+a>W_1(\varepsilon)+Na\geqslant V(s,\ x(\cdot))$，$(t_2-h\leqslant s\leqslant t_2)$，则 $\dot{V}_{(1)}(t_2,\ x(\cdot))\leqslant -\eta(t_2)W_2(|x(t_2)|)\leqslant 0$，矛盾。令 $T_1=h+2KS$，则 $V(t,\ x(\cdot))\leqslant W_1(\varepsilon)+(N-1)a$，$(t\geqslant t_0+T_1\geqslant t_1)$。

重复上述证明，可知存在$t_k=t_0+k(h+2KS)$，使 $V(t,x(\cdot))\leqslant W_1(\varepsilon)+(N-k)a$，$(t\geqslant t_k)$，$(k=1,\ 2,\ \cdots N)$。故当 $t\geqslant t_0+N(h+2KS)$时，$V(t,x(\cdot))\leqslant W_1(\varepsilon)$，即$|x(t;t_0,\varphi)|<\varepsilon$。证毕。

例2　考虑系统

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+\int_0^t C(t-s)x(s)ds+\int_0^t D(t-s)x(s-h)ds. \tag{7}$$

其中$A(t)$，$C(t)$，$D(t)$是连续函数，$\int_0^{+\infty}|C(t)|dt\leqslant\bar{C}<+\infty$；

$$C_1|D(t)|\leqslant\int_t^{+\infty}|C(s)|ds\leqslant C_2|C(t)|.$$

推论 若存在$\eta(t)$，$k>1+C_2/C_1$满足：

(i) $A(t)+K\bar{C}+(K-1)/KC_2\leqslant-\eta(t)$，其中$\eta(t)$满足：对任意$T>0$，存在$r=r(T)>0$，使$\int_t^{t+T}\eta(s)ds\geqslant r\quad(t\geqslant-h)$

(ii) 对任意$\sigma>0$，存在$S>0$，当$t\geqslant t_0+S$时，有
$\int_{-\tau}^{t}\int_t^{+}|C(u-s)|duds\leqslant\sigma$。
则方程(7) 的零解一致渐近稳定。

证 取$V(t,x(\cdot))$

$$=|x(t)|+K\int_{-h}^{t}\int_t^{+\infty}|C(u-s)|\,|x(s)|duds,$$

$$\dot{V}_{(7)}(t,x(\cdot))\leqslant(A(t)+K\bar{C})|x(t)|$$

$$-(K-1)\int_0^t|C(t-s)|\,|x(s)|ds+\int_0^t|D(t-s)|\,|x(s-h)|ds.$$

当$t\geqslant0$时，$\max\{-h,t-h\}=t-h$，$q=(K-1)C_1/C_2>1$，若$qV(t,x(\cdot))>V(s,x(\cdot))$，$t-h\leqslant s\leqslant t$，则

$$qV(t,x(\cdot))$$

$$>|x(t-h)|+K\int_{-h}^{t-h}\int_{t-h}^{+\infty}|C(u-s)|\,|x(s)|duds$$

$$qV(t,x(\cdot))$$

$$>|x(t-h)|+K\int_0^t\int_t^{+\infty}|C(\tau-\eta)|\,|x(\eta-h)|d\tau d\eta$$

$$>KC_1\int_0^t|D(t-s)|\,|x(s-h)|ds.$$

$$\dot{V}_{(7)}(t,x(\cdot))\leqslant(A(t)+K\bar{C})|x(t)|$$

$$-(K-1)\int_{-h}^{t}|C(t-s)|\,|x(s)|ds+q/KC_1V(t,x(\cdot))$$

$$\leqslant(A(t)+K\bar{C}+q/KC_1)|x(t)|$$

$$\leqslant -\eta(t)|x(t)|。$$

令$H(t,x)=\frac{x^2}{2}$，则

$$H'_{(6)}(t,x)\leqslant |x(t)|\left|\int_0^t |C(t-s)|\,|x(s)|ds\right.$$

$$+|x(t)|\left|\int_0^t |D(t-s)|\,|x(s-h)|ds\right.。$$

对任意$L>0$，若$\|x\|^{[-h,t]}\leqslant L$，则

$$H'_{(6)}(t,x)\leqslant L^2(\bar{C}+C_2\bar{C}/C_1)。$$

下面证明$V(t,x(\cdot))$是第II型一致健忘的。对任意$D>0$，$\sigma>0$，存在$S>0$，使当$t\geqslant t_0+S$时，

$$\int_{-h}^{t_0}\int_t^{+\infty}|C(u-s)|duds\leqslant \sigma/DK。$$

则当$[t_0\geqslant 0,\ \|x\|^{[-h,t_0]}\leqslant D,\ t\geqslant t_0+S]$时，有

$$V(t,x(\cdot))=|x(t)|+K\int_{-h}^{t_0}\int_t^{+\infty}|C(u-s)|\,|x(s)|duds$$

$$+K\int_{t_0}^{t}\int_t^{+\infty}|C(u-s)|\,|x(s)|duds$$

$$\leqslant DK\int_{-h}^{t_0}\int_t^{+\infty}|C(u-s)|duds+[1+K\bar{C}(t-t_0)]\,\|x\|^{[t_0,t]}$$

$$\leqslant \sigma+[1+K\bar{C}(t-t_0)]\,\|x\|^{[t_0,t]}。$$

故定理 9 的条件满足，(7) 的零解一致渐近稳定。

文[106]还用 Razumikhin 型方法扩充了定理4和定理5，这里仅叙述其结论，有兴趣的读者可在原文中找到证明。

定理10 假设存在第II型一致健忘的李雅普诺夫泛函$V(t,x(\cdot))$，楔函数$W_3(r)$，$W(r)$，连续函数$P(r)$，$P(r)-r>0$（$r>0$时），满足：存在$h>0$，若$\bar{V}(t,x(\cdot))=V(t,x(\cdot))+W(|x(t)|)$，$P(\bar{V}(t,x(\cdot)))>\bar{V}(s,x(\cdot))$，$\max\{t-h,a\}\leqslant s\leqslant t$，那么$\dot{V}_{(1)}(t,x(\cdot))\leqslant -\eta(t)W_3(|x(t)|)-|\dot{W}_{(1)}(|x(t)|)|$，其中$\eta(t)$满足：任给$r>0$，存在$T=T(r)$，使$\int_t^{t+T}\eta(s)ds\geqslant r\quad(t\geqslant a)$。

则方程(1) 的零解一致渐近稳定。

定理11 假设存在李雅普诺夫泛函$V(t, x(\cdot))$，第I型健忘的泛函$W(t,x(\cdot))$，楔函数$W_j(r)$ $(j=1,2,3)$，连续函数$P(r)$，$P(r)-r>0$（当$r>0$时），满足：

(i) $W_1(|x(t)|)\leqslant V(t,x(\cdot))\leqslant W_2(|x(t)|)$
$$+W(t,x(\cdot)),$$

(ii) 存在$h>0$，使若$P(V(t,x(\cdot)))>V(s,x(\cdot))$，$\max\{\alpha, t-h\}\leqslant s\leqslant t$，则$\dot{V}_{(1)}(t,x(\cdot))\leqslant -W_3(|x(t)|)$。

则方程(1)的零解一致渐近稳定。

§2 无界滞量泛函微分方程的有界性

建立合理的条件，使得方程右端泛函和李雅普诺夫泛函对过去的记忆衰退，仍是用李雅普诺夫第二方法研究无界滞量泛函微分方程有界性的重要课题，本节将叙述这方面的部分结果。

考虑方程

$$\dot{x}(t)=F(t, x(s); \alpha\leqslant s\leqslant t), \alpha\geqslant -\infty, t\geqslant t_0. \quad (1)$$

其中$x\in \mathbf{R}^n$。方程(1)常简记为$\dot{x}(t)=F(t, x(\cdot))$。

定义1 假设对于任意$H>0$，存在$D=D(H)>\alpha$，使当$[t_0\geqslant\alpha, \|\varphi\|^{[\alpha,t_0]}\leqslant H, t\geqslant t_0]$时，$|x(t; t_0, \varphi)|\leqslant D$，则称方程(1)的解一致有界。

定义2 假设存在$B>0$，使对每个$r>0$，存在$T=T(r)>0$，当$[t_0\geqslant\alpha, \|\varphi\|^{[\alpha;t_0]}\leqslant r; t\geqslant t_0+T]$时，$|x(t; t_0, \varphi)|\leqslant B$，则称方程(1)的解一致最终有界。

定理1[102] 假设存在李雅普诺夫泛函$V(t, x(\cdot))$及楔函数$W_1(r)$，$W_2(r)$，$W(r)$，使得

(i) $W_1(|x(t)|)\leqslant V(t, x(\cdot))\leqslant W_2(\|x\|^{[\alpha;t]})$对$t\geqslant\alpha$及任意连续函数$x(s)$，$s\geqslant\alpha$成立；

(ii) $\dot{V}_{(1)}(t, x(\cdot))\leqslant -W(|x(t;t_0,\varphi)|)$，$t\geqslant t_0$，

则方程(1)的解一致有界，若再设

(iii) 对于任意$D>0$，存在 $L(D)>0$，使得当 $\|x\|^{[\alpha,t]}\leqslant D$ 时，$|F(t,x(\cdot))|\leqslant L(D)$，

(iv) $V(t,x(\cdot))$是一致健忘的（见上节定义8），则方程（1）的解一致最终有界。

证 显然方程（1）的解一致有界，故对给定$r>0$，存在$D=D(r)\geqslant r>0$，使当$[t_0\geqslant\alpha$，$\|\varphi\|^{[\alpha,t_0]}\leqslant r$，$t\geqslant t_0]$时，$|x(t)|=|x(t;\ t_0,\ \varphi)|\leqslant D(r)$，从而由（i）及（iii），有 $V(t,x(\cdot))\leqslant W_2(D)$，$|\dot{x}(t)|\leqslant|F(t,x(\cdot))|\leqslant L(D)=L$。

由于$V(t,x(\cdot))$是一致健忘的，存在$l>0$，对于上述D以及任意$\sigma>0$，存在$s>0$，使当$[t_0\geqslant\alpha$，$\|x\|^{[\alpha,t_0]}\leqslant D$，$\|x\|^{[t_0,t_0+s]}\leqslant\sigma$，$t\geqslant t_0+s]$时，

$$V(t,x(\cdot))\leqslant l\max\{W_2(\sigma),W_2(\|x\|^{[t_0+s,t]})\}.$$

取$s\geqslant\sigma/L$，假如对某个$t_1\geqslant t_0$，在$[t_1,\ t_1+s]$上有

$$|x(t)|\leqslant\sigma,$$

将有$W_1(|x(t;t_0,\varphi)|)\leqslant V(t,x(\cdot))\leqslant V(t_1+s,x(\cdot))\leqslant lW_2(\sigma)$，当 $t\geqslant t_1+s$。所以

$$|x(t;t_0,\ \varphi)|\leqslant W_1^{-1}(lW_2(\sigma))(=B),\ 当t\geqslant t_1+s时 \quad (2)$$

现考虑区间列$I_i=[t_0+(i-1)s,\ t_0+is]$，$i=1,\ 2,\ \cdots$，在每个$I_i$上，或者

（A）对所有$t\in I_i$，$|x(t)|\leqslant\sigma$；或者

（B）对某个$t_i\in I_i$，有$|x(t_i)|>\sigma$。

当（A）成立时，根据以上分析，应有

$$|x(t,t_0,\varphi)|\leqslant B,\ 当t\geqslant t_0+is.$$

当（B）成立时，由于 $|x'(t)|\leqslant L(D)$，在区间 $I_i'=[t_i-\sigma/2L,\ t_i+\sigma/2L]$上有$|x(t)|\geqslant\sigma/2$，从而在$I_i'$上有$\dot{V}_{(1)}(t,x(\cdot))\leqslant -W(\sigma/2)$。

因为$s\geqslant\sigma/L$，$[t_i-\sigma/2L,\ t_i]$与$[t_i,\ t_i+\sigma/2L]$中至少有一个在I_i之中，于是在I_i上，$V(t,\ x(\cdot))$至少减少$\sigma W(\sigma/2)/2L$。由于$0\leqslant V(t,\ x(\cdot))\leqslant W_2(D)$，（B）只能在有限个 I_i 上出现，即在有限个区间后，一定有（A）出现，设在I_N上出现（A），令

$T=(N+1)s$，于是当$[t_0\geqslant\alpha,\ \|\varphi\|^{[\alpha,t_0]}\leqslant r,\ t\geqslant t_0+T]$时，有$|x(t;t_0,\varphi)|\leqslant B$，即 (1) 的解一致最终有界，证毕。

定理2[102] 假如存在李雅普诺夫泛函$V(t,x(\cdot))$及楔函数W_1，W_2，W使得

(i) $0\leqslant V(t,\ x(\cdot))\leqslant W_1(\|x\|^{[\alpha;\ t]})$当$t\geqslant\alpha$及$x\in C([\alpha,\ t],\ \mathbf{R}^n)$，

(ii) $\dot V_{(1)}(t,\ x(\cdot))\leqslant -W_2(|x(t)|)-|\dot W_{(1)}(|x(t)|)|$当$t\geqslant t_0$及$x(t)$为方程(1) 的解时成立，

则 (1) 的解一致有界，此外，若

(iii) $V(t,x(\cdot))$是一致健忘的，

则 (1) 的解一致最终有界。

证 对于任意$H>0$，当$[t_0\geqslant\alpha,\ \|\varphi\|^{[\alpha;t_0]}<H,\ t\geqslant t_0]$时，有 $V(t)=V(t,x(\cdot;t_0,\varphi))\leqslant V(t_0,\varphi(\cdot))\leqslant W_1(H)$。如果存在$\bar t\geqslant t_0$，使$|x(\bar t)|>H$，则存在最大的满足$|x(t_1)|=H$的$t_1<\bar t$，从而

$$0\leqslant V(\bar t)\leqslant V(t_1)-W(|x(\bar t)|)+W(|x(t_1)|)$$
$$\leqslant V(t_0)-W(|x(\bar t)|)+W(|x(t_1)|),$$

于是 $W(|x(\bar t)|)\leqslant V(t_0)+W(|x(t_1)|)\leqslant W_1(H)+W(H)$，即

$$|x(\bar t)|\leqslant W^{-1}(W_1(H)+W(H)),$$

故对于$t\geqslant t_0$，有

$$|x(t;t_0,\varphi)|\leqslant W^{-1}(W_1(H)+W(H))\ \ (=D(H)).$$

从而方程 (1) 的解一致有界。

再证 (iii) 成立时，(1) 的解一致最终有界。任取$B>0$ 以及满足

$$lW_1(\sigma)+W(\sigma)<W(B)$$

的$\sigma>0$，易知$\sigma<W^{-1}(lW_1(\sigma)+W(\sigma))<B$。

由于 (1) 的解一致有界，于是当 $[t_0\geqslant\alpha,\ \|\varphi\|^{[\alpha,t_0]}\leqslant r,\ t\geqslant t_0]$时，$x(t)=x(t;t_0,\varphi)$ 满足

$$|x(t;t_0,\ \varphi)|\leqslant D(r)$$

以及$0\leqslant V(t,\ x(\cdot))\leqslant W_1(D)$。

由条件 (ii) 知存在$L=L(r,\ \sigma)>0$，使得$|x(t;t_0,\varphi)|\geqslant\sigma/2$

不能在任何长度超过 L的区间上一致成立。根据一致健忘泛函的定义，存在 $l>0$，对 $D>0$，$\sigma>0$，存在 $s>0$，使当 $[t_0\geqslant\alpha$，$\|x\|^{[\alpha;t_0]}\leqslant D$，$\|x\|^{[t_0;t_0+t]}\leqslant\sigma$，$t\geqslant t_0+s]$时，有

$$0\leqslant V(t,x(\cdot))\leqslant l\max\{W_1(\sigma),\ W_1(\|x\|^{[t+s,t]})\}.$$

因必有$t_1\in[t_0,\ t_0+L]\subseteq I_1=[t_0,\ t_0+L+s]$，使得 $|x(t_1)|\leqslant$ /2，于是，或者

(A) $|x(t)|<\sigma$对所有$t\in I_1$成立，或者

(B) 存在$\bar{t}\in I_1$，使得$|x(\bar{t}_1)|\geqslant\sigma$。

如果 (A) 成立，则对一切$t\geqslant t_0+L+s$，应有

$$0\leqslant V(t,x(\cdot))\leqslant V(t_0+L+s,\ x(\cdot))\leqslant lW_1(\sigma).$$

假如存在$\bar{t}\geqslant t_0+L+s$，使得 $|x(\bar{t})|>\sigma$，则存在最大的满足$|x(t^*)|=$的$\sigma t^*<\bar{t}$，有

$$0\leqslant V(\bar{t})\leqslant V(t^*)-\int_{t^*}^{\bar{t}}|\dot{W}_{(1)}(|x(s)|)|ds$$

$$\leqslant V(t^*)-W(|x(\bar{t})|)+W(|x(t^*)|),$$

从而 $W(|x(\bar{t})|)\leqslant V(t^*)+W(|x(t^*)|)\leqslant lW_1(\sigma)+W(\sigma)\leqslant W(B)$，即 $|x(\bar{t})|\leqslant B$。因为 $\sigma<W^{-1}(lW_1(\sigma)+W(\sigma))\leqslant B$，所以对于所有$t\geqslant t_0+L+s$，有$|x(t)|\leqslant B$。

如果(B) 成立，有

$$V(t_0+L+s)\leqslant V(t_0)-\int_{t_0}^{t_0+l+s}|\dot{W}_{(1)}(|x(s)|)|ds$$

$$\leqslant V(t_0)-\left|\int_{t_1}^{\bar{t}_1}|\dot{W}_{(1)}(|x(s)|)ds\right|$$

$$\leqslant V(t_0)-[W(\sigma)-W(\sigma/2)],$$

于是，V在I_1上就至少要减少$\sigma=W(\sigma)-W(\delta/2)$。

考虑区间列 $I_i=[t_0+(i-1)(L+s),\ t_0+i(L+s)]$，$i=1$，2，…。在每个区间上，或者 (A) 出现，或者 (B) 出现，上面已表明，当 (B) 出现时，V至少减少δ，但$V(t,x(\cdot))\leqslant W_1(D)$，故在有限个区间之后，例如$N$个，(A) 一定会出现，则当$t\geqslant t_0+(N+1)(L+s)$时，$|x(t;\ t_0,\ \varphi)|\leqslant B$，于是 (1) 的解一致最终有界，证毕。

定理3[102] 假设存在李雅普诺夫泛函 $V(t,x(\cdot))$，楔函数 $W_i(r)(i=1, 2, 3)$ $W(r)$以及正数U，满足

(i) $0\leqslant V(t,x(\cdot))\leqslant W_1(|x(t)|)+W_2(\|x\|^{[\alpha;t]})$对$t\geqslant\alpha$及任意连续函数$x(s)$，$t\geqslant s\geqslant\alpha$成立，

(ii) $\dot V_{(1)}(t,x(\cdot))\leqslant -W_3(|x(t)|)-|\dot W_{(1)}(|x(t)|)|$ 对$t\geqslant t_0$及$|x(t)|\geqslant U$成立。

(iii) $\lim\limits_{r\to\infty}[2W(r)-W_2(r)]=\infty$。

则 (1) 的解一致有界。

证 设给定$H>0$，不妨设$0<H<U$，由 (iii) 可求得 $M>U$ 使得当$r\geqslant M$时，有

$$2W(r)>W_2(r)+W_1(U)+2W(U)。$$

考虑 (1) 的解$x(t)=x(t;t_0,\varphi)$，$t_0\geqslant\alpha$，$\|\varphi\|^{[\alpha;t_0]}\leqslant H$，或者

(A) 对于所有$t\geqslant t_0$，有$|x(t)|\leqslant M$，或者

(B) 存在第一个$t_1>t_0$，使$|x(t_1)|=M$。

当 (B) 出现时，由 (ii) 知 $|x(t)|\geqslant U$ 不可能对所有$t\geqslant t_0$都成立。必然有第一个 $t_2>t_1$，使得 $|x(t_2)|=U$。设 $|x(\bar t)|=\max\limits_{t_1\leqslant s\leqslant t_2}|x(t)|$，则$|x(\bar t)|\geqslant M$，待证$|x(t)|\leqslant|x(\bar t)|$对$t\geqslant t_0$成立。

若不然，将有第一个区间$[t_3, t_4]$，使

$|x(t_3)|=U$，$|x(t_4)|=|x(\bar t)|$，$|x(t)|\geqslant U$当 $t\in[t_3,t_4]$。另一方面，$|x(t)|\geqslant U$ 不可能对所有 $t\geqslant t_4$ 都成立，将有第一个$t_5>t_4$，使$|x(t_5)|=U$，于是得到

$$\begin{aligned}V(t_5,x(\cdot))&\leqslant V(t_3,x(\cdot))-\int_{t_3}^{t_4}|\dot W_{(1)}(|x(s)|)|ds\\&\quad-\int_{t_4}^{t_5}|\dot W_{(1)}(|x(s)|)|ds\\&\leqslant W_1(|x(t_3)|)+W_2(\|x\|^{[\alpha;t_3]})\\&\quad-[W(|x(t_4)|)-W(|x(t_3)|)]-[W(|x(t_4)|)\\&\quad-W(|x(t_5)|)]\end{aligned}$$

$$\leqslant W_1(U)+W_2(|x(\bar{t})|)-2W(|x(\bar{t})|)+2W(U)$$
$$<0.$$

这矛盾表明当$t\geqslant t_0$时，$|x(t)|\leqslant|x(\bar{t})|$。由（ii），有

$$0\leqslant V(\bar{t},x(\cdot))\leqslant V(t_1,x(\cdot))-\int_{t_1}^{\bar{t}}|\dot{W}_{(1)}(|x(s)|)|ds$$
$$=V(t_1,x(\cdot))-W(|x(\bar{t})|)+W(|x(t_1)|)$$
$$\leqslant W_1(M)+W_2(M)-W(|x(\bar{t})|)+W(M).$$

于是$W(|x(\bar{t})|)\leqslant W_1(M)+W_2(M)+W(M)$，即

$$|x(\bar{t})|\leqslant W^{-1}(W_1(M)+W_2(M)+W(M)).$$

取 $D(H)=\max\{M,\ W^{-1}(W_1(M)+W_2(M)+W(M))\}$，从而当$[t_0\geqslant\alpha,\ t\geqslant t_0,\ \|\varphi\|^{[\tau;t_0]}\leqslant H]$时，有 $|x(t;t_0,\varphi)|\leqslant D(H)$。证毕。

文[107]用类似的方法得到下述结论

定理4 设存在李雅普诺夫泛函V，楔函数$W(r)$，$W_1(r)$和正数U，使

(i) $0\leqslant V(t,\ x(\cdot))\leqslant W_1(\|x\|^{[\alpha;t]})$，$t\geqslant\alpha$，$x\in C([\alpha,\ t],\ R^n)$，

(ii) $\dot{V}_{(1)}(t,x(\cdot))\leqslant-\dot{W}_{(1)}(|x(t)|)$，当$t\geqslant t_0$，$|x(t)|\geqslant U$时，

(iii) $\lim\limits_{r\to\infty}\{W(r)-W_1(r)\}=+\infty$。

则方程（1）的解一致有界。

当V满足某种衰退记忆假设时，则可得到下述一致最终有界定理。

定理5[107] 设存在李雅普诺夫泛函$V(t,x(\cdot))$，楔函数$W(r)$，$W_1(r)$，$W_2(r)$，连续函数$\beta:[\alpha,\infty)\to[0,\infty)$及正常数$U$，$l$，满足

(i) $0\leqslant V(t,x(\cdot))\leqslant W_1(\|x\|^{[\alpha;t]})$，$t\geqslant\alpha$，$x\in C([\alpha,t],R^n)$；

(ii) 对任意$D>0$，$\sigma>0$，存在$S>0$，使当$[t_0\geqslant\alpha,\|x\|^{[\alpha;t_0]}\leqslant D,\ t\geqslant t_0+S,\ |x(t^*)|\geqslant\sigma$对$t_0\leqslant t^*\leqslant t]$时，

$$V(t,x(\cdot))\leqslant lW_1(\|x\|^{[t_0;t]});$$

(iii) $\dot{V}_{(1)}(t,x(\cdot))\leqslant -W_2(|x(t)|)-|\dot{W}_{(1)}(|x(t)|)|$，当$t\geqslant t_0$，$|x(t)|\geqslant U$时；

(iv) $\dot{V}_{(1)}(t,x(\cdot))\leqslant\beta(t)$，$t\geqslant t_0$，$x(t)$为方程（1）的解，

(v) $\lim\limits_{t\to\infty}\beta(t)=0$，$\lim\limits_{t\to\infty}[W(r)-h(l)W_1(r)]=+\infty$，其中$h(l)=\max\{l,1\}$。

则方程（1）的解一致有界且一致最终有界。

证 由定理4知方程（1）的零解一致有界，则对任取$H>0$，存在$D(H)>0$，使当$[t_0\geqslant\alpha,\ \|\varphi\|^{[\alpha;t_0]}\leqslant H,\ t\geqslant t_0]$时，$|x(t)|=|x(t;t_0,\varphi)|\leqslant D$。

若在任何区间上均有$|x(t)|\leqslant U$，则定理已获证，故下设有一区间使其上$|x(t)|\geqslant U$。由(iii)知，存在$p>0$，是使$|x(t)|\geqslant U$成立的最大区间的长度

由条件（ii）知，存在$S=S(D,2U)$，使当$[t_0\geqslant\alpha,\ \|x\|^{[\alpha,t_0]}\leqslant D,\ |x(t^*)|\geqslant 2U,\ t_0\leqslant t^*\leqslant t,\ t\geqslant t_0+S]$时，有

$$V(t,x(\cdot))\leqslant lW_1(\|x\|^{[t_0,t]}).$$

由(V)知，对$\rho=[W(2U)-W(U)]/2S>0$，存在$m>0$，使当$t\geqslant\alpha+m$时，$\beta(t)\leqslant\rho$。

再由(V)，必存在$R>2U$，使当$r\geqslant R$时，有

$$W(r)-lW_1(r)>W(2U)\tag{3}$$

考虑区间列$I_i=[t_0'+(i-1)L,\ t_0'+iL]=[t_{i-1}';\ t_i']$，$i=1$，2，…，$t_0'=t_0+m$，$L=p+S$。

对解$x(t)=x(t;t_0,\varphi)$，在I_1上，或者

(A) $|x(t)|\leqslant 2U$成立，或者

(B) 至少存在一点$\bar{t}_1\in I_1$，使$|x(\bar{t}_1)|>2U$。

如果（A）成立，则或者

(A′) $|x(t)|<2U$对$t\geqslant t_0'$成立，或者

(A″) 存在第一个$t^*\geqslant t_0'$，使$|x(t^*)|=2U$。

如果（A″）成立，则或者

(A_1'') $|x(t)|<R$对$t>t_1'$成立，或者

(A_2'') 存在第一个$t_1^* > t_1'$，使$|x(t_1^*)| = R$成立。

如果(A_2'')成立，则同定理3之证明，得

$|x(t)| \leqslant W^{-1}(W(R) + lW_1(R)) (= B)$ 对一切 $t \geqslant t_1'$ 成立。

于是，对情形(A)，总有$|x(t)| \leqslant B, t \geqslant t_1'$。

如果(B)成立，则或者

(B') 至少存在一个区间$[t^{(1)}, t^{(2)}] \subseteq I_1$，使$t^{(2)} - t^{(1)} \geqslant S$且$\|x\|^{[t^{(1)}, t^{(2)}]} \leqslant 2U$，或者

(B'') 对任意使$\|x\|^{[t^{(1)}, t^{(2)}]} \leqslant 2U$的区间$[t^{(1)}, t^{(2)}]$，都有$t^{(2)} - t^{(1)} < S$成立。

如果(B')成立，根据对(A)的讨论，有

$|x(t)| \leqslant B$对一切$t \geqslant t^{(1)}$成立。

如果(B'')成立，不妨假定至少存在一个区间$[t^{(1)}, t^{(3)}]$及$t^{(4)} > t^{(3)}$，使得$|x(t^{(1)})| = 2U$，$|x(t^{(2)})| = |x(t^{(3)})| = U$；$U \leqslant |x(t)| \leqslant 2U$，$t \in [t^{(1)}, t^{(2)}]$，$\|x\|^{[t^{(1)}, t^{(3)}]} < 2U$，其中$t^{(4)}$为大于$t^{(3)}$且满足$|x(t)| = 2U$的第一个点，$t^{(3)}$为小于$t^{(4)}$且满足$|x(t)| = U$的最大点。

在区间$[t^{(1)}, t^{(2)}]$上，由$\dot{V}_{(1)}(t, x(\cdot)) \leqslant -|W_{(1)}(|x(t)|)|$，有

$$V(t^{(2)}) - V(t^{(1)}) \leqslant -W(2U) + W(U) (= -\delta) < 0. \tag{4}$$

这表明$V(t)$在$[t^{(1)}, t^{(2)}]$上至少减少δ。

在区间$[t^{(2)}, t^{(3)}]$上，由于$t^{(3)} - t^{(2)} < S$，结合条件(iv)，有$V(t) - V(t^{(2)}) \leqslant \rho(t - t^{(2)}) < \rho S = \delta/2$，这表明$V(t)$在$[t^{(2)}, t^{(3)}]$上至多增加$\delta/2$。

因此，$V(t)$在I_1至少减少$\delta/2$。

由于$V(t) \leqslant W_1(D)$，所以(B'')只能连续地在有限个区间I_k上出现，于是，必存在自然数N，使得在I_N上必出现(B')这种情形。

由上述讨论知，只要取$T = m + (N+1)L$，则对一切$t \geqslant t_0 + T$，

成立 $|x(t;t_0,\varphi)|\leqslant B$，从而（1）的解一致最终有界。证毕。

为以下的叙述方便起见，我们引入下述记号

对任意函数 x：$[a,b]\to R^n$，记 $|x(b)-x(a)|$ 为 $|x[a,b]|$。

定理6[101] 设存在李雅普诺夫泛函 $V(t,x(\cdot))$，连续函数 Q：$[0,\infty)\times R^n\to[0,\infty)$，楔函数 W_1,W_2 及正常数 U,L,R_1,μ，满足

(i) $W_1(|x(t)|)\leqslant V(t,x(\cdot))\leqslant Q(t,x(t))+W_2(\|x\|^{[a;t]})$；

(ii) 当 $Q(t,x)\leqslant U$ 时，$|x|\leqslant L$；

(iii) $\dot V_{(1)}(t,x(\cdot))\leqslant-\mu|F(t,x(\cdot))|$ 当 $Q(t,x(t))\geqslant U$ 时；

(iv) 若 $R\geqslant R_1$，则

$$U+W_2(L+R)-\mu R<W_1(L+R).$$

则方程(1)的解有界。

证 假若不然，存在无界解 $x(t)$。

若在区间 $[a,b]$ 上，$Q(t,x(t))\geqslant U$，则

$$0\leqslant V(t,x(\cdot))\leqslant V(a,x(\cdot))-\mu|x[a,t]|,$$

故 $|x(t)|\leqslant\frac{1}{\mu}[\mu|x(a)|+V(a,\ x(\cdot))]$，$t\in[a,\ b]$。因而，由于 $x(t)$ 是无界解，则存在序列 $\{S_n\}$，使 $Q(S_n,x(S_n))=U$，$(n=1,2,\cdots)$ 且 $S_n\to\infty(n\to\infty)$。

因此，可以找到 $t_0\geqslant0$ 及 $R\geqslant R_1$，使 $Q(t_0,x(t_0))=U$ 而 $\|x\|^{[a;t_0]}<L+R$。由 $x(t)$ 之无界性知：存在第一个 $t_2>t_0$，使 $|x(t_2)|=L+R$。从而存在 $t_1\geqslant t_0$，使 $Q(t_1,\ x(t_1))=U$，且 $Q(t,x(t))>U,t\in(t_1,t_2]$。则在 $[t_1,t_2]$ 上，有

$$\dot V_{(1)}(t,x(\cdot))\leqslant-\mu|F(t,\ x(\cdot))|=-\mu|\dot x_{(1)}(t)|,$$

所以

$$\begin{aligned}W_1(|x(t)|)&\leqslant V(t,x(\cdot))\leqslant V(t_1,x(\cdot))-\mu|x[t_1,\ t]|\\&\leqslant Q(t_1,x(\cdot))+W_2(\|x\|^{[a;t_1]})-\mu|x[t_1,t]|\\&\leqslant U+W_2(L+R)-\mu|x[t_1,t]|,\end{aligned}$$

故在 $t=t_2$ 时，有

$$W_1(L+R)\leqslant U+W_2(L+R)-\mu R,$$

这与(iv)矛盾。证毕。

注意，条件(i)实际上是一种衰退记忆假设，它要求V对$x(t)$的依赖性强于V对$x(\cdot)$的依赖性。

定义3 称纯量值泛函 $V(t,x(\cdot))$ 为一致正定且强渐小的(decrescent)，若存在连续函数Q,W：$[0,\infty)\times R^n\to[0,\infty)$，楔函数 W_1，W_2，连续纯量值函数$\alpha(t)\geqslant\alpha$，及连续纯量值泛函$(Jt,W(s,x(s))$；$\alpha(t)\leqslant s\leqslant t)$以及常数$m<1$，满足

(i) $W(t,x(t))\leqslant V(t,x(\cdot))\leqslant Q(t,x(t))+J(t,W(\cdot,x(\cdot)))$；

(ii) $J(t,W(\cdot,x(\cdot)))\leqslant m\sup\limits_{\alpha(t)\leqslant s\leqslant t}W(s,x(s))$；

(iii) $W_1(|x|)\leqslant W(t,x)\leqslant Q(t,x)\leqslant W_2(|x|)$。

定理7[101] 设存在一致正定且强渐小的李雅普诺夫泛函 $V(t,x(\cdot))$，满足

$$W(t,x(t))\leqslant V(t,x(\cdot))\leqslant Q(t,x(t)+m\sup_{\alpha(t)\leqslant s\leqslant t}W(s,x(s)),$$

其中$\alpha(t)\geqslant\alpha$为某连续函数，$m<1$。若存在正数U，使

$$\dot V_{(1)}(t,x(\cdot))\leqslant 0,\ 当Q(t,x(t))\geqslant U时,$$

则方程 (1) 的解一致有界。

证 对给定的$H>0$，我们要找$D>0$，使当$[t_0\geqslant 0,\|\varphi\|^{[\alpha;t_0]}\leqslant H,t\geqslant t_0]$时，$|x(t;t_0,\varphi)|\leqslant D$。

对$H>0$，若$\|\varphi\|^{[\alpha;t_0]}\leqslant H$，则当$t\in[\alpha,t_0]$时，$W(t,\varphi(t))\leqslant W_2(|\varphi(t)|)\leqslant W_2(H)$。取$M>W_2(H)+U$，使

$$U+mM<M. \tag{5}$$

由于$Q(t,x)\geqslant W(t,x)$，故当$W(t,x)\geqslant U$时，$\dot V_{(1)}(t,x(\cdot))\leqslant 0$。

首先，我们证明解是有界的，因而可延拓。

对$x(t)=x(t;t_0,\varphi)$，或者

(a) $W(t,x(t))<M$对所有$t\geqslant t_0$成立，或者

(b) 存在第一个$t^*>t_0$，使$W(t^*,x(t^*))=M$。此时，存在$\bar M$，使$Q(t^*,x(t^*))<\bar M$。

若(b) 成立，则或者

(b_1) $Q(t,x(t))>U$对所有$t\geqslant t^*$成立，或者

(b_2) 存在第一个$t_1>t^*$，使$Q(t_1,x(t_1))=U$。

若（b_2）成立，则存在$\bar{t}\geqslant t^*(t_1>\bar{t})$，使$W(\bar{t},x(\bar{t}))$是$W(t,x(t))$在$[\alpha,t_1]$上最大值，则我们断言当$t\geqslant\alpha$时，$W(t,x(t))\leqslant W(\bar{t},x(\bar{t}))$。

若不然，则存在第一个在t_1后的区间$[t_2,t_3]$，使得$Q(t_2,x(t_2))=U$,$W(t_3,x(t_3))=W(\bar{t},x(\bar{t}))$，而在区间$[t_2,t_3]$上，有$W(t,x(t))\leqslant W(\bar{t},x(\bar{t}))$,$Q(t,x(t))\geqslant U$。

但是，在$[t_2,t_3]$上，$\dot{V}_{(1)}(t,x(\cdot))\leqslant 0$,再由(5)式得

$$\begin{aligned}W(t_3,x(t_3))&\leqslant V(t_3,x(\cdot))\leqslant V(t_2,x(\cdot))\\&\leqslant U+m\sup_{\alpha(t_2)\leqslant s\leqslant t_2}W(s,x(s))\\&\leqslant U+mW(\bar{t},x(\bar{t}))<W(\bar{t},x(\bar{t}))。\end{aligned}$$

这与$W(t_3,x(t_3))=W(\bar{t},x(\bar{t}))$矛盾。

故（b_2）成立时，$W(t,x(t))\leqslant \max\limits_{\alpha\leqslant t\leqslant t_1}W(t,x(t))$

$$=W(\bar{t},x(\bar{t}))。$$

其次，我们求$W(\bar{t},x(\bar{t}))$之上界。

因在$[t^*,\bar{t}]$上，$\dot{V}_{(1)}(t,x(\cdot))\leqslant 0$，故

$$\begin{aligned}W(\bar{t},x(\bar{t}))&\leqslant V(\bar{t},x(\cdot))\leqslant V(t^*,x(\cdot))\\&\leqslant Q(t^*,x(t^*))+m\sup_{\alpha(t^*)\leqslant s\leqslant t^*}W(s,x(s))\\&\leqslant\bar{M}+mM,\end{aligned}$$

所以，（b_2）成立时，$W(t,x(t))\leqslant\bar{M}+mM$。

对情形(b_1)，有$Q(t,x(t))>U(t\geqslant t^*$时)，所以当$t\geqslant t^*$时，$\dot{V}\leqslant 0$，从而

$$\begin{aligned}W_1(|x(t)|)&\leqslant W(t,x(t))\leqslant V(t,x(\cdot))\\&\leqslant V(t^*,x(\cdot))\\&\leqslant Q(t^*,x(t^*))+m\sup_{\alpha(t^*)\leqslant s\leqslant t^*}W(s,x(s))\\&<\bar{M}+mM。\end{aligned}$$

显然，若情形（a）成立，则$W(t,x(t))<M<\bar{M}+mM$。

因此，在所有情形下，均有

$$W_1(|x(t)|)\leqslant W(t,x(t))\leqslant \overline{M}(1+m),$$

故 $|x(t)|\leqslant W_1^{-1}(\overline{M}(1+m))(=D)$。

注意到M, $\overline{M}$ 之选取仅与H有关，故上式说明方程（1）的解一致有界。证毕。

例1 考虑系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+\int_0^t C(t,s)x(s)ds+F(t). \tag{6}$$

其中A为稳定$n\times n$阶矩阵，$C(t,s)$是$n\times n$阶连续矩阵，$0\leqslant S\leqslant t<\infty$，$F$：$[0,\infty)\to R^n$有界，连续，$|F(t)|\leqslant p$。

设矩阵B，常数K，k，r如下定义

$$A^TB+BA=-I,$$

$$|Bx|\leqslant K[x^TBx]^{1/2},$$

$$|x|\geqslant 2k[x^TBx]^{1/2},$$

$$[x^TBx]^{1/2}\geqslant r|x|.$$

如果存在$m<1$，使$\frac{K}{r}\int_0^t\int_t^\infty|C(u,s)|duds\leqslant m$；存在$d>0$，使$k-\frac{K}{2kr}\int_t^\infty|C(u,t)|du\geqslant d$，则方程（6）的解一致有界。

证 定义

$$V(t,x(\cdot))=[x^TBx]^{1/2}+K/r\int_0^t\int_t^\infty|C(u,s)|du[x^T(s)Bx(s)]^{1/2}ds,$$

则

$$\dot{V}_{(6)}(t,x(\cdot))\leqslant-[k-\frac{K}{2kr}\int_t^\infty|C(u,t)|du]|x|+K|F(t)|$$

$$\leqslant-2kd[x^TBx]^{1/2}+Kp,\ \text{其中}|F(t)|\leqslant P,$$

故当$[x^TBx]^{1/2}\geqslant KP/2kd\overset{\text{def.}}{=\!=}U$时，$\dot{V}_{(6)}(t,x(\cdot))\leqslant 0$。

令$Q(t,x)=W(t,x)=[x^TBx]^{1/2}$，

$$J(t,W(t,x(\cdot)))=K/r\int_0^t\int_t^\infty|C(u,s)|du[x^T(s)Bx(s)]^{1/2}ds,$$

则定理7的所有条件成立，故（6）的零解一致有界。

定义4 设V满足定义3中一切条件，$U>0$。称V为第III型健忘的，若对每个$R>0$，$T>0$，存在$S>0$，使当$[W(t,x(t))\leqslant R$，$t\in[\alpha,\infty)$；$Q(t_1,x(t_1))=U$对某个$t_1\in[T,t]$成立；$t\geqslant T+S]$时，

$$J(t,W(\cdot,x(\cdot)))\leqslant m\sup_{T\leqslant s\leqslant t}W(s,x(s))。$$

若S与T无关，则称V为第III型一致健忘的。

定理8[101] 设$V(t,x(\cdot))$是第III型健忘的且满足定理7的一切条件，设当$Q(t,x(t))\geqslant U$时，$\dot{V}_{(1)}(t,x(\cdot))\leqslant-\delta<0$且设$M>U$，$m<\bar{m}<1$，$U+mM<\bar{m}M$。则方程(1)的解对充分大的$t$满足$W(t,x(t))\leqslant M/\bar{m}$。此外，若$V$是第III型一致健忘的，则方程(1)的解对$D=M/\bar{m}$一致最终有界。

证 由定理7知(1)的解一致有界。若$x(t)$是(1)的解，由于当$Q(t,x(t))\geqslant U$时，$\dot{V}_{(1)}(t,x(\cdot))\leqslant-\delta$，我们知道，一定存在$t_1\geqslant t_0$，使$Q(t_1,x(t_1))<U$。

设存在区间$[t_2,t_3]$，满足$Q(t_2,x(t_2))=Q(t_3,x(t_3))=U$，$Q(t,x(t))>U$，$t\in(t_2,t_3)$，$\sup\limits_{a\leqslant s\leqslant t_3}W(s,x(s))=\widetilde{M}>M$，则在$[t_2,t_3]$上，$\dot{V}_{(1)}(t,x(\cdot))\leqslant 0$，这说明

$$\begin{aligned}W(t,x(t))\leqslant V(t,x(\cdot))&\leqslant V(t_2,x(\cdot))\\&\leqslant U+m\sup_{a(t_2)\leqslant s\leqslant t_2}W(s,x(s))\\&\leqslant U+m\widetilde{M}<\bar{m}\widetilde{M}.\end{aligned}$$

一般地，若$[t_j,t_{j+1}]$是任意具有$[t_2,t_3]$性质的区间，$t_j>t_3$，则$W(t,x(t))<\bar{m}\widetilde{M}$，因而$W(t,x(t))<\bar{m}\widetilde{M}$，只要$t\geqslant t_2$。

事实上，若$T=t_2$，$R=\widetilde{M}$，则存在S，使得若$t_4>t_2+s$，$Q(t,x(t))\geqslant U$，$t\in[t_4,t_5]$且$Q(t_4,x(t_4))=U$，则

$$\begin{aligned}W(t,x(t))\leqslant V(t,x(\cdot))&\leqslant V(t_4,x(\cdot))\\&\leqslant U+m\sup_{t_2\leqslant s\leqslant t_4}W(s,x(s))\end{aligned}$$

$$\leqslant U + m(\bar{m}\widetilde{M}) \leqslant \bar{m}(\bar{m}\widetilde{M}).$$

只要$\bar{m}\widetilde{M} > M$。

照这种方式继续下去，我们断言或者 $Q(t, x(t))$ 最终保持小于 U，或对充分大的使 $\bar{m}^k\widetilde{M} > M$，$\bar{m}^{k+1}\widetilde{M} < M$ 成立的 k，$W(t, x(t)) \leqslant \bar{m}^k\widetilde{M}$，因$\bar{m}^k\widetilde{M} - M > 0$且

$0 < \bar{m}[\bar{m}^k\widetilde{M} - M] = \bar{m}^{k+1}\widetilde{M} - \bar{m}M < M - \bar{m}M = M(1 - \bar{m})$，故 $\bar{m}^k\widetilde{M} - M < M(1 - \bar{m})/\bar{m}$，即$\bar{m}^k\widetilde{M} < M + M(1 - \bar{m})/\bar{m} = M/\bar{m}$，这说明当$t$充分大时，总有

$$W(t, x(t)) \leqslant M/\bar{m}.$$

再证一致最终有界性。

给定$R > 0$，若在$[\alpha, \infty)$上，$W(t, x(t)) \leqslant R$，则存在S使得如果$Q(t, x(t)) < U$ 在某一长度至少为S的区间I上成立且然后在$[t_1, t)$上，$Q(t, x(t))$超过U时，那么

$$\begin{aligned} W(t, x(t)) &\leqslant V(t_1, x(\cdot)) \\ &\leqslant Q(t_1, x(t_1)) + m\sup_{s\in I} W(s, x(s)) \\ &\leqslant U + mU < \bar{m}M. \end{aligned}$$

从而对以后的t，总有$W(t, x(t)) < M$。

因当$Q(t, x(t)) \geqslant U$时，$\dot{V}_{(1)}(t, x(\cdot)) \leqslant -\delta < 0$，我们知道若$|x(t)| < R$，$t \in [\alpha, \infty)$，则存在数$J$，使得只能在长度最多为$J$的区间上，$W(t, x(t))$保持比$U$大。

可以证明，在每一个长度为$J + S$的区间上，$W(t, x(t))$ 的上界从$\bar{m}\widetilde{R}$变化到$\bar{m}(\bar{m}\widetilde{R})$。找$k$，使$\bar{m}^{(k+1)}\widetilde{M} < M$。则当 $t \geqslant t_0 + R(J + S)$时，有

$$W(t, x(t)) \leqslant M/\bar{m}.$$

从而(1)的解一致最终有界。证毕。

作为上述定理的应用，我们考虑扰动Volterra 积分微分方程以结束本节。

例2 考虑系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+\int_0^t C(t,\ s)x(s)ds+P(t,\ x). \qquad (7)$$

其中A，C于例1所说明，$P(t,\ x):[0,\ \infty)\times R^n\to R^n$连续且

$|P(t,\ x)|/|x|\to 0$，当$|x|\to\infty$时关于t一致成立

设B，k,K，r，μ，U,Φ如下定义

$$A^TB+BA=-I,$$

$$|Bx|\leqslant K[x^TBx]^{1/2},$$

$$|x|\geqslant 2k[x^TBx]^{1/2},$$

$$r|x|\leqslant [x^TBx]^{1/2},$$

$$k-K\int_t^\infty |C(u,\ t)|du\geqslant\mu>0,$$

$$\Phi(t,\ s)=K/r\int_t^\infty |C(u,\ s)|du \text{ 连续.}$$

设存在$m<1$，使对$R>0$，存在$S>0$，使当$T\geqslant 0$，$t\geqslant T+S$时，

$$(R/u)\int_0^T\Phi(t,\ s)ds+\int_T^t\Phi(t,\ s)ds\leqslant m,$$

则方程(7)之解为一致最终有界。

证 作$V(t,x(\cdot))=[x^TBx]^{1/2}+K\int_0^t\int_t^\infty |C(u,s)|du|x(s)|\cdot ds$,

则对某个正数U，$\delta>0$，有

$$\dot{V}_{(7)}(t,\ x(\cdot))\leqslant -\mu|x|+K|P(t,\ x)|<-\delta, \text{当} |x(t)|\geqslant U。$$

定义$J(t,\ W(x(\cdot)))=K/r\int_0^t\int_t^\infty |C(u,s)|du[x^T(s)Bx(s)]^{1/2}\cdot ds$,

则 $K\int_0^t\int_t^\infty |C(u,\ s)|du|x(s)|ds\leqslant J(t,\ W(x(\cdot)))$， 其 中

$W(t,\ x)=W(x)=Q(t,\ x)=[x^TBx]^{1/2}$。

对任意$R>0$，若在$[a,\ \infty)$上，$W(x(t))\leqslant R$,$Q(x(t_1))=U$对$T\geqslant 0$及某个$t_1\in[T,\ t]$成立且$t\geqslant T+s$，则$W(x(t_1))=U$，故$R\leqslant (R/U)\sup\limits_{T\leqslant s\leqslant t}W(x(s))$。从而

$J(t,\ W(x(\cdot)))$

$$
\begin{aligned}
&=\int_0^t \Phi(t,\ s)W(x(s))ds \\
&\leqslant\int_0^T \Phi(t,\ s)Rds+\int_T^t \Phi(t,\ s)W(x(s))ds \\
&\leqslant R\int_0^T \Phi(t,\ s)ds+\int_T^t \Phi(t,\ s)ds\sup_{T\leqslant s\leqslant t} W(x(s)) \\
&\leqslant[(R/U)\int_0^T \Phi(t,\ s)ds+\int_T^t \Phi(t,\ s)ds]\sup_{T\leqslant s\leqslant t} W(x(s)) \\
&\leqslant m\sup_{T\leqslant s\leqslant t} W(x(s)).
\end{aligned}
$$

则定理 8 的一切条件均满足，方程（7）的零解一致最终有界。证毕。

§3 无穷延滞泛函微分方程的稳定性

无穷延滞泛函微分方程的稳定性理论与相空间的选择密切相关，这里我们介绍J·Kato引入的容许空间概念及容许空间上无穷延滞泛函微分方程的稳定性理论。

1.容许空间

设X为定义于$(-\infty,\ 0]$上的$\boldsymbol{R}^n$——值函数的线性空间，并赋予了半范数$\|\cdot\|_X$.记

$X_\tau=\{\phi\in X;\ \phi(s)$于$[-\tau,\ 0]$上连续，$\phi_{-\tau}\in X\}$，$\tau\geqslant0$。

其中 ϕ_t 表示定义于 $(-\infty,\ 0]$ 上 $\boldsymbol{R}^n$ 一值函数，其定义为 $\phi_t(s)=\phi(t+s)$，$-\infty<s\leqslant0$。

定义1 称空间$(X,\ \|\cdot\|_X)$为容许的，如果对任意 $\tau\geqslant0$ 及 $\phi\in X_\tau$，满足

(i) $\phi_t\in X$，且ϕ_t对t连续，$t\in[-\tau,\ 0]$，

(ii) $\mu\|\phi(0)\|\leqslant\|\phi\|_X\leqslant K(\tau)\sup\limits_{-\tau\leqslant s\leqslant0}\|\phi(s)\|+M(\tau)\|\phi_{-\tau}\|_X$，

其中$\mu>0$是个常数，$K(s)$，$M(s)$是连续函数。

称容许空间$(X,\|\cdot\|_X)$具有衰退记忆，若 $K(s)=K$ 为常数，

$\lim_{s\to\infty} M(s)=0$。

由定义可以看出，若 $(X, \|\cdot\|_X)$是容许容间，$\tau\geqslant 0$，则空间 $(X_\tau, \|\cdot\|_{X_\tau})$也是允许的，这里$\|\phi\|_{X_\tau}=\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}\|\phi_s\|_X$；而$\boldsymbol{R}^n$也是个容许空间，其半范数定义为$\|\phi\|_{R^n}=\|\phi(0)\|$。

例1 以C_h^γ表示：当$h<+\infty$时，所有于$[-h, 0]$上连续函数集合，而当$h=+\infty$时，所有于$(-\infty, 0]$上连续，且$\lim_{s\to-\infty}e^{\gamma s}\varphi(s)$存在的函数$\varphi$全体构成的集合。在$C_h^\gamma$中定义半范数

$$\|\varphi\|_{C_h^\gamma}=\sup_{h\leqslant s\leqslant 0}e^{\gamma s}\|\varphi(s)\|,$$

则 $(C_h^\gamma, \|\cdot\|_{C_h^\gamma})$是容许空间。

例2 以M_h^γ表示所有于$(-h, 0]$上可测，$e^{\gamma s}\|\varphi(s)\|$于$(-h, 0]$上可积的函数$\varphi$构成的集合，其中$0\leqslant h\leqslant+\infty$，$0\leqslant\gamma<+\infty$。在$M_h^\gamma$上定义半范数

$$\|\varphi\|_{M_h^\gamma}=\|\varphi(0)\|+\int_{-h}^{0}e^{\gamma s}\|\varphi(s)\|ds,$$

则$(M_h^\gamma, \|\cdot\|_{M_h^\gamma})$是容许空间。

在容许空间中，我们引入如下序关系$<$：设X与Y是两个容许空间，若存在常数γ，使对任意$\varphi\in X$，有$\varphi\in Y$，且$\|\varphi\|_Y\leqslant\gamma\cdot\|\varphi\|_X$，则称$X<Y$。

由(ii)易证对任意$\tau\geqslant 0$，$X_\tau<X<\boldsymbol{R}^n$。

对以上两例给出的容许空间，有如下简单的性质

(i) 当$\gamma>0$或$h<\infty$时，C_h^γ，M_h^γ有衰退记忆，

(ii) 若$h<\infty$，则对任意r和β，有$C_h^\gamma<C_h^\beta$，$M_h^\gamma<M_h^\beta$，

(iii) 若$\gamma>\beta$，则$C_h^\beta<M_h^\gamma$，

(v) 若$0\leqslant k\leqslant h\leqslant\infty$，则$C_h^\gamma<C_k^\gamma$，$M_h^\gamma<M_k^\gamma$。

2.容许空间对中的稳定性概念

设X是容许空间，考虑泛函微分方程

$$\dot{x}(t)=f(t, x_t)。\tag{1}$$

其中$f: R^+ \times X \to \mathbf{R}^n$为全连续，$f(t, 0) \equiv 0$。

首先，我们叙述方程(1)的零解在容许空间对(X, Y)中的各种稳定性定义。

定义2 设$(X, \|\cdot\|_X)$，$(Y, \|\cdot\|_Y)$为容许空间，$X<Y$，称方程(1)的零解在(X, Y)中

(i) 稳定，若对任意$t_0 \geq 0$，$\varepsilon>0$，存在$\delta(t_0, \varepsilon)>0$，使当$[t \geq t_0$，$\|x_{t_0}\|_X<\delta(t_0, \varepsilon)]$时，$\|x_t\|_Y<\varepsilon$，其中$x$是方程(1)定义于$t \geq t_0$上的解；

(ii)一致稳定，若(i)中δ与t_0无关；

(iii)渐近稳定，若它稳定，且对任意$t_0 \geq 0$，存在$\delta_0(t_0)>0$，使当$\|x_{t_0}\|_X<\delta_0(t_0)$时，$\lim\limits_{t \to \infty} \|x_t\|_Y=0$，

(iv)等度渐近稳定，若它是渐近稳定，且(iii)中极限$\lim\limits_{t \to \infty} \|x_t\|_Y=0$对$\|x_{t_0}\|_X<\delta_0(t_0)$一致成立，

(v)一致渐近稳定，若它是一致稳定，且存在$\delta_0>0$，使对任意$\varepsilon>0$，存在$T(\varepsilon)>0$，使当$[t_0 \geq 0, t \geq t_0+T$，$\|x_{t_0}\|_X<\delta_0]$时，$\|x_t\|_Y<\varepsilon$。

定理1 设X_i，$Y_i(i=1, 2)$均为容许空间且$X_2<X_1<Y_1<Y_2$，则(X_1, Y_1)中稳定性蕴含(X_2, Y_2)中相同类型的稳定性，特别(X, X)中稳定性蕴含$(X, \mathbf{R}^n)$中稳定性，当X具有衰退记忆时，$(X, \mathbf{R}^n)$中稳定性蕴含(X, X)中相同类型的稳定性。

证 我们以渐近稳定性为例，证明定理后半部分。

因X具有衰退记忆，故存在$M_1>0$，使

$$M(s) \leq M_1, \quad s \geq 0.$$

由(1)的零解于$(X, \mathbf{R}^n)$中的稳定性知：对任给$\varepsilon>0$，$t_0 \geq 0$，存在$\delta \in \left(0, \dfrac{\varepsilon}{2M_1}\right)$，使当$\|x_{t_0}\|_X<\delta$时，

$$|x(t)|<\varepsilon/2(K+M_1), \quad t \geq t_0.$$

从而 $\|x_t\|_X \leq K \sup\limits_{t_0 \leq s \leq t} |x(s)|+M_1 \|x_{t_0}\|_X$

$$\leqslant \frac{K\varepsilon}{2(K+M_1)}+M_1\delta<\varepsilon.$$

故$x=0$于(X, X)中稳定。

取$\delta_0(t_0)=\delta(t_0, 1)$，则当$\|x_{t_0}\|_X<\delta_0(t_0)$时，$\|x_t\|_X<1$。对任意$\varepsilon>0$，由$x=0$在$(X, \boldsymbol{R}^n)$中之渐近稳定性知存在$T>0$，使当$t\geqslant t_0+T$时，$|x(t)|<\frac{\varepsilon}{2K}$。 取 $T_1>0$，使当 $t\geqslant T_1$ 时，$M(t)<\frac{\varepsilon}{2}$。则当$t\geqslant t_0+T+T_1$时，

$$\|x_t\|_X\leqslant K\sup_{t-T_1\leqslant s\leqslant t}|x(s)|+M(T_1)\|x_{t-T_1}\|_X$$

$$\leqslant K\cdot\frac{\varepsilon}{2K}+\frac{\varepsilon}{2}\cdot 1=\varepsilon.$$

故$x=0$于(X, X)中渐近稳定。证毕。

上述定理讨论了在$(X, \boldsymbol{R}^n)$中稳定性与在(X, X)中稳定性的关系，由此可以看出，在有限时滞情形，这两种稳定性是无差别的。但当时滞无界时，这两种概念并非一定等价。例如，当我们取X为$(-\infty, 0]$上有界连续函数空间，并在其上定义上确界范数时，方程(1) 的零解一定不会于 (X,X) 中渐近稳定，这是由于，对方程(1)的任意非零解 $x(t)$，$\|x_t\|_X=\sup_{-\infty<s\leqslant 0}|x(t+s)|\nrightarrow 0$（当$t\to\infty$时）。

3.容许空间对中的稳定性定理

我们先介绍几个研究$(X, \boldsymbol{R}^n)$中稳定性的比较定理。

定义3 定义于$\{(t, \varphi); \varphi\in X_{t-\tau}, t\geqslant\tau\}$上的实值连续函数$V(t, \varphi; \tau)$，$\tau\geqslant 0$，称为李雅普诺夫函数，如果满足

(i) $a(\|\varphi\|_Y)\leqslant V(t, \varphi; \tau)$，$a$为楔函数，

(ii) $V(t, \varphi; \tau)\leqslant b(t, \tau, \|\varphi\|_{X_{t-\tau}})$，其中函数$b(t, \tau, r)$于$\boldsymbol{R}^+\times\boldsymbol{R}^+\times\boldsymbol{R}^+$上非负连续，对$r$非减，且$b(t, \tau, 0)\equiv 0$。

$V(t, \varphi; \tau)$沿方程(1)的导数为

$$\dot V_{(1)}(t,\varphi,\tau)=\sup\left\{\overline{\lim_{s\to t+0}}\frac{V(s,x_s;\tau)-V(t,\varphi;\tau)}{s-t}\right\},$$

其中$x(s)$为方程(1)满足$x_t=\varphi$的解，而"sup"遍取一切这样的解。

在叙述比较定理之先，我们还需要引进如下记号和规定。

(L) 存在 $(\boldsymbol{R}^+)^3$ 上连续函数 $L(t, s, r)$，对 r 非减，$L(t,s,0)\equiv 0$，及$(\boldsymbol{R}^+)^2$上的连续函数$\delta_0(t, s)>0$，使得对方程(1) 的任何解$x(s)$，满足

$$\|x_t\|_X\leqslant L(t, s, \|x_s\|_X) \text{ 若 } \|x_s\|_X<\delta_0(t, s), \ t\geqslant s。$$

〔注〕 由第四章所介绍的无穷延滞方程的基本理论可知，若(1)的零解对初值问题是唯一的，则条件(L)成立。

(uL) 在(L)中，$L(t, s, r)$和$\delta_0(t, s)$满足

$$L(t, s, r)=L(t-s, 0, r),$$

$$\delta_0(t, s)=\delta_0(t-s, 0)。$$

(F) $F(r)$为$\boldsymbol{R}^+$上连续非减函数，且$F(r)-r>0$，($r>0$时)。

(P) $p(t, r)$ 于 $\boldsymbol{R}^+\times(0, \infty)$ 上连续，对r非减，且满足$p(t, r)\leqslant r$，$\lim\limits_{t\to\infty}p(t, r)=\infty$。

(uP) 在P中，假设$q(r)=t-p(t, r)$是正的且与t无关。

容易证明，在条件(P)下，$\sigma(t, r)=\sup\{s;\ p(s, r)\leqslant t\}$ 对r非减，$\sigma(t, r)\geqslant t$，且

$$p(t, r)\geqslant\tau, \text{ 若 } t\geqslant\sigma(\tau, r)。$$

下面的定理2至定理4引自文〔108〕

定理2 假设

(i) 条件(L)成立，

(ii) 存在李雅普诺夫函数$V(t, \varphi;\ \tau)$，$\tau\geqslant 0$满足

$$\dot V_{(1)}(t, \varphi;\ \tau)\leqslant\omega(t, V(t, \varphi;\ \tau)),$$

当$V(t, \varphi;\ \tau)>0$，$p(t, V(t, \varphi;\ \tau))\geqslant\tau$且

$$V(s, \varphi_{s-t};\ \tau)\leqslant V(t, \varphi;\ \tau) \quad \text{当} s\in[p(t, V(t, \varphi;\ \tau)), t],$$

其中$\omega(t, r)$为$(R^+)^2$上非负连续函数，$\omega(t, 0)\equiv 0$而$p(t,r)$满足(P)；

(iii)纯量方程

$$\dot y(t)=\omega(t, y(t)) \tag{2}$$

的零解是稳定的。

则方程(1)的零解是于$(X, \mathbf{R}^n)$中稳定的。

证 令$x(t)$为(1)自$t=\tau(\tau\geqslant 0)$出发的解，记$V(t)=V(t, x_t; \tau)$，对任何$\eta>0$，令$\varepsilon=a(\eta)$。由(iii)，存在$\delta_1=\delta_1(\tau, \varepsilon)$，$0<\delta_1\leqslant\varepsilon$，使当$y_0=\delta_1$时，有

$$\delta_1\leqslant y(t, \tau, y_0)<\varepsilon, \quad t\geqslant\tau, \tag{3}$$

其中$y(t)=y(t, \tau, y_0)$是(2)过(τ, y_0)的右行最大解。

对于上述$\delta_1>0$，存在$\delta>0$，使得

$$\sup_{\tau\leqslant t\leqslant\sigma(\tau,\delta_1)}\ \sup_{\tau\leqslant s\leqslant t} b(t, \tau, L(s, \tau, \delta))<\delta_1 \text{ 且}$$

$$\delta\leqslant\inf_{\tau\leqslant s\leqslant\sigma(\tau,\delta_1)}\delta_0(s, \tau)_{\circ}$$

又根据条件(B)和(L)，若$\|x_\tau\|_X<\delta$，$t\in[\tau, \sigma(\tau, \delta_1)]$，则

$$\begin{aligned}V(t)&\leqslant b(t, \tau; \|x_t\|_{X_{t-\tau}})\\&\leqslant b(t, \tau, \sup_{-(t-\tau)\leqslant s\leqslant 0}\|(x_t)_s\|_X)\\&\leqslant b(t, \tau, \sup_{\tau\leqslant s\leqslant t}\|x_s\|_X)\\&\leqslant\sup_{\tau\leqslant s\leqslant t} b(t, \tau, \|x_s\|_X)\\&\leqslant\sup_{\tau\leqslant s\leqslant t} b(t, \tau, L(s, \tau, \|x_\tau\|_X))<\delta_1.\end{aligned}$$

注意到(3)式，有

$$V(t)<y(t), \quad t\in[\tau, \sigma(\tau, \delta_1)].$$

下面我们证明

$$V(t)\leqslant y(t), \quad t\geqslant\tau. \tag{4}$$

令$y_n(t)$，$n=1, 2, \cdots$，为方程

$$\dot{y}=\omega(t, y)+\frac{1}{n}, \quad y(\tau)=y_0$$

的任何解，则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n(t)=y(t)$，$t\geqslant\tau$。

用反证法，假设(4)式不成立，则存在$t_1>\sigma(\tau, \delta_1)$，使$V(t_1)>y(t_1)$。因而当$n$充分大时，有$V(t_1)>y_n(t_1)$。由于$y_n(t)$非减，我们可找到$t_2\in[\sigma(\tau, \delta_1), t_1]$，使得

$V(t_2)=y_n(t_2)$，$V(t_2)\geqslant V(t)$当$t\in[\tau, t_2]$，且

$$\dot{V}(t_2) \geqslant \dot{y}_n(t_2) = \omega(t_2, y_n(t_2)) + \frac{1}{n} = \omega(t_2, V(t_2)) + \frac{1}{n}. \tag{5}$$

另一方面，因为$V(t_2) > 0$，$t_2 \geqslant \sigma(\tau, \delta_1)$，$p(t_2, V(t_2)) \geqslant p(t_2, \delta_1) \geqslant \tau$，而且$V(t) \leqslant V(t_2)$，当$t \in [p(t_2, V(t_2)), t_2]$，根据条件(ii)，有

$$\dot{V}(t_2) \leqslant \omega(t_2, V(t_2)),$$

导出矛盾。所以(4)式成立，从而有

$$a(\|x(t)\|) \leqslant V(t) < \varepsilon = a(\eta), \quad t \geqslant \tau,$$

由此得出$\|x(t)\| < \varepsilon$，$t \geqslant \tau$，证毕。

定理3 在定理2中，补加假设(UL)，(UB)和(UP)成立，而且(2)的零解一致稳定，则方程(1)的零解于$(X, \boldsymbol{R}^n)$中一致稳定。

证 在定理的假设下，显见$\sigma(t, r) = t + q(r)$，且δ，δ_1可选得与τ无关，使

$$\sup_{0 \leqslant \xi \leqslant q(\delta_1)} \sup_{0 \leqslant \eta \leqslant q(\delta_1)} b(\xi, 0, L(\eta, 0, \delta)) \leqslant \delta_1 \text{ 且}$$

$$\delta \leqslant \inf_{0 \leqslant \xi \leqslant q(\delta_1)} \delta_0(\xi, 0).$$

其余证明同定理1。

定理4 假设

(i) 条件(UL)成立，

(ii) 存在李雅普诺夫函数$V(t, \varphi; \tau)$，$\tau \geqslant 0$满足条件(UB)以及

$$\dot{V}_{(1)}(t, \varphi; \tau) \leqslant -\omega(t, V(t, \varphi; \tau)). \tag{6}$$

当$V(t, \varphi; \tau) > 0$，$p(t, V(t, \varphi; \tau)) \geqslant \tau$，且

$$V(s, \varphi_{s-t}; \tau) \leqslant F(V(t, \varphi; \tau))$$

对$s \in [p(t, V(t, \varphi; \tau)), t]$，

其中$\omega(t, r)$为$(R^+)^2$上的非负连续函数，$\omega(t, 0) \equiv 0$，而$p(t, r)$和$F(r)$分别满足条件(UP)和(F)，

(iii) 纯量方程

$$\dot{z}(t) = -\omega(t, z) \tag{7}$$

的零解一致渐近稳定。

则(1)的零解在$(X, \boldsymbol{R}^n)$中一致渐近稳定。

证 由(iii)，存在$\delta_0>0$及$T_0(\eta)>0$，使当$\tau\geqslant 0, 0<z_0<\delta_0$，有

$$|z(t, \tau, z_0)|<\eta, \quad t\geqslant\tau+T_0(\eta). \tag{8}$$

对上述的$\delta_0>0$，存在$\delta_1>0$，使得

$$\sup_{0\leqslant\xi\leqslant q(\delta_0)} \sup_{0\leqslant\eta\leqslant 2(\delta_1)} b(\xi, 0, L(\eta, 0, \delta_1))\leqslant\delta_0 \text{且}$$

$$\delta_1\leqslant \inf_{0\leqslant\xi\leqslant q(\delta_0)} \delta_0(\xi, 0).$$

则当$\|x_\tau\|_X<\delta_1$时，有

$$V(t, x_t; \tau)<\delta_0, \quad t\in[\tau, \tau+q(\delta_0)].$$

由此可以证明

$$V(t)=V(t, x_t; \tau)\leqslant\delta_0, \quad t\geqslant\tau.$$

事实上，若存在$t_1>\tau+q(\delta_0)$，使$V(t_1)>\delta_0$，则可找到$t_2\in[\tau+q(\delta_0), t_1]$，使得$V(t_2)\geqslant\delta_0$，$\dot{V}(t_2)>0$且$V(t)\leqslant V(t_2)$当$t\in[\tau, t_2]$。但因为$p(t_2, V(t_2))\geqslant p(t_2, \delta_0)\geqslant\tau$，且$V(t)\leqslant V(t_2)\leqslant F(V(t_2))$当$t\in[p(t_2, V(t_2)), t_2]$，故有$\dot{V}(t_2)\leqslant 0$，矛盾。

现在证明：对任何$\eta>0(\eta<\delta_0)$，存在$T(\eta)>0$，使当$\|x_\tau\|_X<\delta_1$时，有

$$V(t, x_t; \tau)\leqslant\eta, \qquad t\geqslant\tau+T(\eta). \tag{9}$$

令 $a=\inf\limits_{\eta\leqslant s\leqslant\delta_0}\{F(s)-s\}>0$，并设$m$为使得$\eta+ma\geqslant\delta_0$的第一个正整数。记$C_n=\eta+na(n=0, 1, 2, \cdots m)$，$\sigma_i=\sigma(\tau_{i-1}, C_{m-i})=\tau_{i-1}+q(C_{m-i})$，$\tau_0=\tau$，$\tau_i=\sigma_i+T_0(\eta)$。

首先，我们证明：存在$t_1\in[\sigma_1, \sigma_1+T_0(\eta)]$，使

$$V(t_1)<C_{m-1}. \tag{10}$$

假若不然，则成立

$$V(t)\geqslant C_{m-1} \quad \text{对一切} t\in[\sigma_1, \sigma_1+T_0(\eta)]. \tag{11}$$

由此，当$s\in[\tau, t]$，有

$$F(V(t))\geqslant V(t)+a\geqslant C_{m-1}+a\geqslant\delta_0\geqslant V(s)。$$

因为$t\geqslant\sigma_1=\sigma(\tau,\ C_{m-1})$且$p(t,\ V(t))\geqslant p(t,\ C_{m-1})\geqslant\tau$，故

$$F(V(t))\geqslant V(s),\quad t\in[\sigma_1,\ \sigma_1+T_0(\eta)],$$

按条件(ii)，有

$$\dot V(t)\leqslant-\omega(t,\ V(t)),\ t\in[\sigma_1,\ \sigma_1+T_0(\eta)],$$

从而 $V(t)\leqslant z(t,\ \sigma_1,\ z_1)$，$t\in[\sigma_1,\ \sigma_1+T_0(\eta)]$，其中 $z_1=V(\sigma_1,\ x_{\sigma_1};\tau)<\delta_0$，且$z(t,\ \sigma_1,z_1)$是(7) 满足$z(\sigma_1)=z_1$的右行最大解。因为$0<z_1<\delta_0$，有

$$|z(t,\ \sigma_1,\ z_1)|<\eta,\ t\geqslant\sigma_1+T_0(\eta),$$

由此得到

$$V(\sigma_1+T_0(\eta))<\eta。$$

另一方面，由(11)，有

$$V(\sigma_1+T_0(\eta))\geqslant C_{m-1}>\eta,$$

导出矛盾，故(10)式成立。

其次，我们证明

$$V(t)\leqslant C_{m-1}\quad 对一切t\geqslant t_1。\tag{12}$$

若不然，则存在$t_1^*>t_1$，使得$V(t^*)>C_{m-1}$ 且 $\dot V(t_1^*)>0$。但是，因为$t_1^*>\sigma(\tau,\ C_{m-1})$，$p(t_1^*,\ V(t_1^*))\geqslant p(t_1^*,\ C_{m-1})\geqslant\tau$，且

$$F(V(t_1^*))\geqslant V(t_1^*)+a\geqslant\delta_0\geqslant V(s),\ 当s\in[\tau,\ t_1^*],$$

按定理的条件 (ii)，应有 $\dot V(t_1^*)\leqslant0$，导出矛盾，故 (12) 式得证。

将比较解$z(t,\ \sigma_1,\ z_1)$代替为$z(t,\ \sigma_k,\ z_k)$，利用上述同样的方法可以证明

$$\dot V(t)\leqslant C_{m-k}当t\geqslant\sigma_k+T_0(\eta),\ k=2,\ \cdots,\ m,$$

其中 $z_k=V(\sigma_k,\ x_{\sigma_k};\tau)<\delta_0$。

在进行m次之后，我们得到

$$V(t)\leqslant\eta\qquad 当t\geqslant\tau+T(\eta),$$

其中 $\tau+T(\eta)=\sigma_m+T_0(\eta)$，且 $T(\eta)=q(C_{m-1})+\cdots+q(C_0)+mT_0(\eta)$。证毕。

例3 在空间C_∞^γ上考虑纯量方程

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + bx(t-h) + \int_{-\infty}^{0} g(t,\ s,\ x(t+s))ds, \tag{13}$$

其中a, b, h都是常数，$a>0$，$|b|<a$，$h>0$。假设$g(t,\ s,\ x)$连续，且满足

$$|g(t,\ s,\ x)| \leqslant m(s)|x|,$$

其中$\int_{-\infty}^{0} m(s)ds < a - |b|$，$\int_{-\infty}^{0} m(s)e^{-\gamma s}ds < \infty$，$\gamma>0$。 (14)

则方程(13)的零解于$(C_\infty^\gamma,\ R^n)$上一致渐近稳定。

证 由(14)，我们可选取常数$F>0$及$(0,\ \infty)$上的连续函数$q(r)$，对r非减，$q(r)\leqslant -h$当$r>0$，使得

$$a - |b| - F^{1/2}\int_{-\infty}^{0} m(s)ds = \delta > 0. \tag{15}$$

$$2\int_{-\infty}^{q(r)} m(s)e^{-\gamma s}ds \leqslant \delta r^{1/2} \tag{16}$$

令$V(t,\ \varphi) = \varphi^2(0)$，则有

$$\dot{V}_{(13)}(t,\ x_t) \leqslant -2x^2(t) + 2|b||x(t)||x(t-h)| + 2|x(t)|\int_{-\infty}^{0} m(s)|x(t+s)|ds.$$

记$V(t) = V(t,\ x_t)$，则由(15)、(16)，得

$$\begin{aligned} & 2\int_{-\infty}^{q(V(t))} m(s)|x(t+s)|ds \\ & \leqslant 2\|x_t\|_{C_\infty^\gamma}\int_{-\infty}^{q(V(t))} m(s)e^{-\gamma s}ds \\ & \leqslant 2\int_{-\infty}^{q(V(t))} m(s)e^{-\gamma s}ds \\ & \leqslant \delta|x(t)|,\ \text{当}\ \|x_t\|_{C_\infty^\gamma}\leqslant 1\ \text{时。} \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} & 2\int_{q(V(t))}^{0} m(s)|x(t+s)|ds \\ & \leqslant 2F^{1/2}\int_{q(V(t))}^{0} m(s)|x(t)|ds \end{aligned}$$

$$\leqslant 2F^{1/2}|x(t)|\int_{-\infty}^{0} m(s)ds.$$

只要$V(s)\leqslant FV(t)$　当$s\in[t+q(V(t)),\ t]$。由此，我们看出

$$\dot{V}_{(13)}(t,\ \varphi)\leqslant -2(a-|b|)\varphi^2(0)+\delta\varphi^2(0)$$
$$+2F^{1/2}\varphi^2(0)\int_{-\infty}^{0} m(s)ds$$
$$\leqslant -\delta\varphi^2(0)$$
$$= -\delta V(t,\ \varphi),$$

只要$\|\varphi\|_{C_\infty^\gamma}\leqslant 1$，$t+q(V(t,\ \varphi))\geqslant\tau$，且

$$V(s,\ \varphi_{s-t})\leqslant FV(t,\ \varphi),\ s\in[t+q(V(t,\ \varphi)),\ t].$$

因此，定理4的条件全部满足，故对于$(C_\infty^\gamma,\ \boldsymbol{R}^n)$，(13)的零解一致渐近稳定。

用类似的方法，〔109〕得到$(X,\ \boldsymbol{R}^n)$中渐近稳定与等度渐近稳定的比较定理。

定理5　假设

(i)　条件(L)，(P)，(F)成立，

(ii)　存在李雅普诺夫函数$V(t,\ \varphi;\ \tau)$，$\tau\geqslant 0$，满足

$$\dot{V}_{(1)}(t,\ \varphi;\ \tau)\leqslant -w(t,\ V(t,\ \varphi;\ \tau)).$$

当　$V(t,\ \varphi;\ \tau)>0$，$p(t,\ V(t,\ \varphi;\ \tau))\geqslant\tau$，$V(s,\ \varphi_{s-t};\ \tau)\leqslant F(V(t,\ \varphi;\ \tau))$对所有$s\in[p(t,\ V(t,\ \varphi;\ \tau)),\ t]$成立时。
其中$\omega(t,\ r)$为$(R^+)^2$上的非负连续函数，$w(t,\ 0)=0$。

则当(iii)　纯量方程$\dot{z}(t)=-w(t,\ z)$的零解稳定，且存在常数$\delta_0>0$，使对任意$t_0\geqslant 0$，$z_0\geqslant 0, z_0\leqslant\delta_0$。方程$\dot{z}(t)=-w(t,z)$过$(t_0,\ z_0)$的解$z(t;\ t_0,\ z_0)$满足

$$\lim_{t\to\infty} z(t;\ t_0,\ z_0)=0$$

时，方程(1)的零解于$(X,\ \boldsymbol{R}^n)$中渐近稳定；

当(iv)　纯量方程$\dot{z}(t)=-\omega(t,\ z)$的零解稳定，且存在常数$\delta_0>0$，使对任意$t_0\geqslant 0$，$\varepsilon>0$，存在$T(t_0,\ \varepsilon)>0$，使当$[z_0\geqslant 0,\ z_0\leqslant\delta_0,\ t\geqslant t_0+T(t_0,\ \varepsilon)]$时，$z(t;\ t_0,z_0)<\varepsilon$时，方程(1)的零解于$(X,\ \boldsymbol{R}^n)$中等度渐近稳定。

我们再回过来讨论一般容许空间中的稳定性问题。以下以$\mathscr{K}$表$\boldsymbol{R}^+$上实值连续不减函数类，而$a\in\mathscr{K}^+$表示$a\in\mathscr{K}$，且$r>0$时，$a(r)>0$。

引理1 设X是容许空间，$\delta\in\mathscr{K}^+$，则对任意$\tau>0$，存在常数$\theta>0$及$\rho\in\mathscr{K}^+$，使对任意$\phi\in X_\tau$，若ϕ满足：

当$|s-t|\leqslant\delta(\varepsilon)$，$s、t\in[-\tau,\ 0]$时，$\|\phi(s)-\phi(t)\|\leqslant\varepsilon$。

$$(17)$$

则有

$$m[\{t\in[-\tau,\ 0];\ \|\phi_t\|_X\geqslant\theta\|\phi\|_X\}]\geqslant\rho(\|\phi\|_X)$$

其中$m(A)$表$A\subset R$的Lebesgue测度。

证 设K，M，μ于定义1给出，令$K=\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant\tau}K(s)$，$M=\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant\tau}M(s)$。设$\phi\in X_\tau$，则由定义1的(ii)可得：若$\|\phi\|_X\geqslant\varepsilon$，且对所有$t\in[-\tau,\ 0]$，有$\|\phi(t)\|\leqslant\varepsilon/2K$，则$\|\phi_t\|_X\geqslant\varepsilon/2M$对所有$t\in[-\tau,\ 0]$成立。另一方面，若对所有$s\in[-\tau,\ 0]$，$\|\phi(s)\|\geqslant\varepsilon/2K$，则由(17)式得

$\|\phi(t)\|\geqslant\varepsilon/4K$，$t\in J=[s-\delta(\varepsilon/4K),\ s+\delta(\varepsilon/4K)]\cap(-\tau,\ 0]$，因而$\|\phi_t\|_X\geqslant\mu\varepsilon/4K$，$t\in J$。令$\theta=\min\left\{\dfrac{1}{2M},\ \dfrac{\mu}{4K}\right\}$，$\rho(\varepsilon)=\min\{\tau,\ \delta(\varepsilon/4K)\}(\leqslant m[J])$，则引理1成立。证毕。

以下总设$v(t)$，$w(t)$为$[\tau,\infty)$上非负连续函数（$\tau\geqslant0$为某常数），$\dot{v}(t)$表右上$Dini$导数；$C(t,r)$为$\boldsymbol{R}^+\times\boldsymbol{R}^+$上非负连续函数，且关于$r$非减，存在$c\in\mathscr{K}^+$，使$c(t,r)\leqslant c(r)$，$t\geqslant0$。

为方便起见，我们叙述一个平凡的结论。

引理2 若(P)成立，则$\sigma(t,r)=\sup\{s;\ p(s,r)\leqslant t\}$关于$r$非减，$\sigma(t,r)\geqslant t$，且当$t\geqslant\sigma(\tau,r)$，$r>0$时，$p(t,r)\geqslant\tau$。此外，我们可找$\beta(\tau;\ v)>0$，使当$v(t)$于$[\tau,\ \sigma(\tau,\beta(\tau;\ v)]$上连续时，$v(t)\leqslant\beta(\tau,v)$。

取$\beta(\tau,v)=\min\{\sup\limits_{\tau\leqslant s\leqslant\sigma(t;1)}v(s),1\}$即可完成上述引理的证明。

引理3 设给定$\tau\geqslant0$，且设当$[v(t)>0$，$p(t,v(t))\geqslant\tau$，且

对所有$s\in[p(t,v(t)),t]$，有$v(s)\leqslant F(v(t)]$时，$\dot{v}(t)\leqslant -w(t)$，则我们有

(i) $v(t)\leqslant\beta(\tau;\ v)$对所有$t\geqslant\tau$成立，

(ii) 当$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}v(t)=\beta>0$时，$\lim\limits_{t\to\infty}v(t)=\beta$，

(iii) 若$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}v(t)>0$，则$\int^{\infty}w(t)dt<+\infty$。

证 (a)令$\beta(\tau,v)=\beta>0$，并设存在$t_1>\tau$，使$v(t_1)>\beta$，由引理2知$t_1>\sigma(\tau,\beta)$。则存在$t_2\in[\sigma(\tau,\beta),\ t_1]$，使$v(t_2)>\beta$，$\dot{v}(t_2)>0$且对所有$t\in[\tau,t_2]$有$v(t)\leqslant v(t_2)$。另一方面，$p(t_2,\ v(t_2))\geqslant p(t_2,\ \beta)\geqslant\tau$ 且 $v(t)\leqslant v(t_2)\leqslant F(v(t_2))$，$t\in[p(t_2,\ v(t_2)),t_2]$，则$\dot{v}(t_2)\leqslant 0$。矛盾。

(b) 给定$\beta>0$，可找到$\varepsilon>0$，使

$$\beta+\varepsilon\leqslant F(\beta-\varepsilon),\quad \beta-\varepsilon>0. \tag{18}$$

若$\underline{\lim\limits_{t\to\infty}}v(t)=\gamma<\beta$，则令$\varepsilon<\beta-\gamma$，可选取$t_1,t_2$使

$$v(t)\leqslant\beta+\varepsilon,\quad t\geqslant t_1.$$

且$t_2\geqslant\sigma(t_1,\beta-\varepsilon)$，$v(t_2)\geqslant\beta-\varepsilon$，$\dot{v}(t_2)>0$。因$v(t)\leqslant\beta+\varepsilon\leqslant F(\beta-\varepsilon)\leqslant F(v(t_2))(t\in[t_1,t_2])$且$p(t_2,v(t_2))\geqslant p(t_2,\beta-\varepsilon)\geqslant t_1$，同(i)相同讨论即可导出矛盾。

(c) 设$\lim\limits_{t\to\infty}v(t)=\beta>0$。取$t_1,t_2$，使当$t\geqslant t_1$时，$|v(t)-\beta|<\varepsilon$，$t_2\geqslant\sigma(t_1,\beta-\varepsilon)$，其中$\varepsilon>0$满足(18)。则，如同(ii)，有

$$\dot{v}(t)\leqslant -w(t),\quad t\geqslant t_2. \tag{19}$$

因$v(t)\geqslant 0$，$w(t)\geqslant 0$，(19)式说明$\int^{+\infty}w(t)dt<+\infty$。证毕。

推论：设$v(t)$，$w(t)$满足引理3之条件，则下列断言成立

(i) 若对任何$\sigma\geqslant\tau$，$\Gamma>\gamma>0$，$G>0$，存在T，使

$$\int_{\sigma}^{\sigma+T}w(t)dt\geqslant G \text{ 只要}\Gamma\geqslant v(t)\geqslant\gamma\text{于}[\sigma,\sigma+T]\text{上成立。} \tag{20}$$

则有 $\lim\limits_{t\to\infty}v(t)=0$。

(ii) 若对任何$\varepsilon>0$，存在正数$\eta(\varepsilon)$，$\xi(\varepsilon)$，$\zeta(\varepsilon)$使

$m[\{s\in[t-\eta(\varepsilon),t];\ w(s)\geqslant\xi(\varepsilon)\}]\geqslant\zeta(\varepsilon)$，当 $w(t)$，$v(t)\geqslant\varepsilon$时，　　(21)

则$\lim\limits_{t\to\infty}v(t)=0$或$\lim\limits_{t\to\infty}w(t)=0$。

【注】 若$w(t)=c(t,v(t))$，则条件(20)等价于

$$\int_{\sigma}^{\sigma+T}c(t,\gamma)dt\geqslant G. \tag{22}$$

推论之证明 (i) 若结论不真，则由引理3之(ii)，有$\lim\limits_{t\to\infty}v(t)=\beta>0$，从而当$t\geqslant t_2$时，$|v(t)-\beta|<\varepsilon$且(19)式成立。那么，在(i)的假设下，取与$\sigma=t_2$，$\Gamma=\beta+\varepsilon$，$\gamma=\beta-\varepsilon$，$G=2\varepsilon$对应的$T$，则

$$\begin{aligned}v(t_2+T)\leqslant v(t_2)-\int_{t_2}^{t_2+T}w(s)\,ds&\leqslant\beta+\varepsilon\\&-\int_{t_2}^{t_2+T}w(s)ds<\beta-\varepsilon\end{aligned}$$

这与$|v(t_2+T)-\beta|<\beta-\varepsilon$矛盾。

(ii) 设$\lim\limits_{t\to\infty}w(t)\neq0$，$\lim\limits_{t\to\infty}v(t)=\beta>0$则存在$\varepsilon>0$和发散序列$\{s_k\}$，使$w(s_k)\geqslant\varepsilon$。不妨设$\beta\geqslant2\varepsilon$，$s_{k+1}-s_k\geqslant\eta(\varepsilon)$，$s_1\geqslant t_2+\eta(\varepsilon)$。由假设得$\int_{s_1-\eta(\varepsilon)}^{s_k}w(s)ds\geqslant K\xi(\varepsilon)\zeta(\varepsilon)\to\infty(k\to\infty$时)，这与(19)矛盾，从而当$\lim\limits_{t\to\infty}v(t)=\beta>0$时，必有$\lim\limits_{t\to\infty}w(t)=0$。

证毕。

引理4 设给定$\tau\geqslant0$并设当$p(t,v(t))\geqslant\tau$，$v(t)>0$时，$\dot{v}(t)\leqslant-w(t)$，则

(i) 若对某一$\varepsilon>0$和$t_1\geqslant\sigma(\tau,\varepsilon)$，有$v(t_1)\leqslant\varepsilon$，则当$t\geqslant t_1$时，$v(t)\leqslant\varepsilon$，

(ii) 若条件(20)成立，则存在一个依赖于τ，$\beta(\tau;v)$及$\varepsilon>0$的T_1，使当$t\geqslant\tau+T_1$时，$v(t)\leqslant\varepsilon$。

证 (i) 假若不然，则存在$t_2>t_1$，使$v(t_2)>\varepsilon$，$\dot{v}(t_2)>0$。因此时，$p(t_2,v(t_2))\geqslant p(t_2,\varepsilon)\geqslant\tau$，故

$v(t_2)\leqslant -w(t_2)\leqslant 0$，矛盾

(ii) 对$\sigma=\sigma(\tau,\varepsilon)$，$\Gamma=\beta(\tau;\ v)$，$\gamma=\varepsilon$，$G=\beta(\tau;\ v)$，取$T=T(\tau,\varepsilon)$满足（20），则$T_1=T(\tau,\varepsilon)+\sigma(\tau,\varepsilon)-\tau$即为所求。事实上，设对所有$t\in[\sigma(\tau,\varepsilon),\ \tau+T_1]$，$v(t)\geqslant\varepsilon$，则$p(t,v(t))\geqslant p(t,\varepsilon)\geqslant\tau$，因此，$\dot v(t)\leqslant -w(t)$，再由引理3之($i$)知$\varepsilon\leqslant v(t)\leqslant\beta(\tau;\ v)$，我们得

$$\int_{\sigma(\tau,\varepsilon)}^{\tau+T_1} w(t)dt\leqslant v(\sigma(\tau,\varepsilon))-v(\tau+T_1)\leqslant\beta(\tau;\ v)-\varepsilon.$$

这与(20)矛盾。因此，存在$t_1\in[\sigma(\tau,\varepsilon),\ \tau+T_1]$，使$v(t_1)\leqslant\varepsilon$，从而由(i)知$t\geqslant t_1$时，$v(t)\leqslant\varepsilon$。证毕。

定理6 设(L)成立，存在李雅普诺夫函数$\{V(t,\phi;\tau);\tau\geqslant 0\}$，使得对某非负连续函数$W(t,\phi;\ \tau)$，当

(c_1) $V(t,\phi;\ \tau)>0$,

(c_2) $P(t,V(t,\phi;\ \tau))\geqslant\tau$,

(c_3) $V(s,\phi_{s-t};\ \tau)\leqslant F(V(t,\phi;\tau)),s\in[P(t,V(t,\phi;\tau)),t]$

时满足

(c) $\dot V_{(1)}(t,\phi;\tau)\leqslant -W(t,\phi;\tau)$,

其中$p(t,r)$及F分别满足条件(P),(F)。

则方程(1)的零解于(X,Y)中稳定。此外

(i) 在下述条件之一下，方程(1)的零解于(X,Y)中渐近稳定

($H1$) 对方程(1)的任意解$x(t)$，$v(t)=V(t,x_t;\ \tau)$，$w(t)=W(t,x_t;\tau)$满足(20)，

($H2$) 存在常数N及$c\in\mathscr{K}^+$，使$\|f(t,\phi)\|\leqslant N$，$W(t,\phi;\ \tau)=c(\|\phi\|_Y)$。

(ii) 若在条件(c_1),(c_2)下条件(C)成立，则当($H1$)满足时，方程(1)的零解于(X,Y)中等度渐近稳定。

证 设$x(t)$是方程(1)从$t=\tau$出发的解，记$v(t)=V(t,x_t;\ \tau)$，$w(t)=W(t,x_t;\ \tau)$。显然，对任意$\varepsilon>0$，可找到$\delta>0$，使$\delta\leqslant\inf\limits_{\tau\leqslant s\leqslant\sigma(\tau;\varepsilon)}\delta_0(s,\tau)$且

$$\sup_{\tau\leqslant s\leqslant\sigma(\tau,\varepsilon)}\ \sup_{\tau\leqslant u\leqslant\sigma(\tau,\varepsilon)} b(s,\tau,L(u,\tau,\delta))\leqslant\varepsilon. \tag{23}$$

则当$\|x_\tau\|_X\leqslant\delta$，$t\in[\tau,\sigma(\tau,\varepsilon)]$时，

$$\begin{aligned}
v(t)&\leqslant b(t,\tau,\ \|x_t\|_{X_{t-\tau}})\\
&\leqslant \sup_{-(t-\tau)\leqslant s\leqslant 0} b(t,\tau,\|(x_t)_s\|_X)\\
&\leqslant \sup_{\tau\leqslant u\leqslant t} b(t,\tau,\|x_u\|_X)\\
&\leqslant \sup_{\tau\leqslant u\leqslant t} b(t,\tau,L(u,\tau,\delta))\leqslant\varepsilon.
\end{aligned}$$

从而由引理3之(i)知当$t\geqslant\tau$时，$v(t)\leqslant\varepsilon$，这表明（1）的零解于(X,Y)中稳定且在$(H1)$下，(1)的零解于(X,Y)中渐近稳定。

设$(H2)$满足。因$\|f(t,\phi)\|\leqslant N$，故$x(t)$满足（17)式，其中$\delta(r)=r/N$，从而由引理1知存在常数$\theta>0$及$\rho\in\mathscr{K}^+$，使

$$m[\{s\in[t-1,t];\ \|x_s\|_Y\geqslant\theta\|x_t\|_Y\}]\geqslant\rho(\|x_t\|_Y),$$

即 $$m[\{s\in[t-1,t];\ w(s)\geqslant c(\theta\|x_t\|_Y)\}]\geqslant\rho(\|x_t\|_Y).$$

因此，推论中条件(21)成立，其中$\eta(\varepsilon)=1$，$\xi(\varepsilon)=c(\theta c^{-1}(\varepsilon))$，$\zeta(\varepsilon)=p(c^{-1}(\varepsilon))$，其中$c^{-1}(r)=\inf\{s;c(s)\geqslant r\}$。故由推论知方程(1)之零解为渐近稳定。

由引理4知(ii)成立。证毕。

定理7 若定理6中条件(L)换为(uL)，(B)换为(uB)且$\sigma(t,r)-t=q(r)$为正，不依赖于t，则方程(1)的零解于(X,Y)中一致稳定。而且在下列条件之一下它于(X,Y)中一致渐近稳定：

$(H3)$ 条件$(H1)$成立，且与$(H1)$相关的(20)式中出现的T与σ无关，

$(H4)$ 在(c_1)，(c_2)下，(c)成立且$(H2)$满足，此外，存在$l>0$，使$Y_l<X$。

证 显而易见，在定理假设下δ可选为仅是ε的函数使(23)成立，所以，方程(1)的零解于(X,Y)中一致稳定且在$(H3)$下，方程(1)的零解一致渐近稳定。

因已建立了一致稳定性，为证明一致渐近稳定，只须证明，

对任意$\varepsilon>0$，存在T，使得对某个$\beta>0$，当$\|x(t)\|\leqslant\beta$ （$t\geqslant\tau$），和$\|x_\tau\|_X<\beta$时，有

$$\inf\{\|x_t\|_X;\ \sigma(\tau,\varepsilon)\leqslant t\leqslant\tau+T\}\leqslant\varepsilon。\tag{24}$$

另一方面，在(H4)假设下，由引理4的(i)，只须证明，对某一与τ无关的T，有

$$\inf\{v(t);\ \sigma(\tau,\varepsilon)\leqslant t\leqslant\tau+T\}\leqslant\varepsilon。$$

设有条件(H4)，并设在$[\sigma(\tau,\varepsilon),\ \tau+T]$上，$v(t)\geqslant\varepsilon$，$\|x_t\|_X\geqslant\varepsilon$，而对某个$\beta>0$，$\|x_\tau\|_X\leqslant\beta$，$\|x_t\|_Y\leqslant\beta$，$t\geqslant\tau$。因$Y_l<X$，即对某个$\gamma>0$，$\|x_t\|_X\leqslant\gamma\sup\limits_{t-l\leqslant s\leqslant t}\|x_s\|_Y$，我们可找到序列$\{t_k\}$，使得$t_k\in[\sigma(\tau,\varepsilon)+(2k-1)l,\ \sigma(\tau,\varepsilon)+2kl]$且当$\sigma(\tau,\varepsilon)+2kl\leqslant\tau+T$时，有$\|x_{t_k}\|_Y\geqslant\varepsilon/\gamma$。所以由引理1，对某个$\rho\in\mathscr{K}^+$和常数$\theta>0$，存在

$$\int_{t_k-l}^{t_k}w(t)dt\geqslant c(\varepsilon\theta/\gamma)\rho(\varepsilon/\gamma)(=d(\varepsilon)),$$

因此，$\displaystyle\int_{\sigma(\tau,\varepsilon)}^{\sigma(\tau,\varepsilon)+2kl}w(t)dt\geqslant kd(\varepsilon)$

由此得到，当$t\in[\sigma(\tau,\varepsilon)+2kl,\ \tau+T]$时，

$$v(t)\leqslant V(\sigma(\tau,\varepsilon))-kd(\varepsilon)\leqslant b(\sigma(\tau,\varepsilon)-\tau,0,\gamma\beta)-kd(\varepsilon)。$$

注意到$\|x_\sigma\|_X\leqslant\gamma\|x_\sigma\|_{Y_l}\leqslant r\beta$和$\sigma(\tau,\varepsilon)-\tau=p(\varepsilon)$，则当$T\geqslant p(\varepsilon)+2b(p(\varepsilon),0,\gamma\beta)l/d(\varepsilon)$时得矛盾。证毕。

第九章

中立型泛函微分方程的稳定性理论

本章将介绍具有界滞量及无穷延滞中立型泛函微分方程的稳定性理论。为了叙述的方便，我们将所讨论的方程分为算子型中立型泛函微分方程和非算子型（超中立型）泛函微分方程两种类型。

§1 算子型中立型泛函微分方程的稳定性

算子型中立型泛函微分方程是时滞泛函微分方程的自然推广，但由于它的定性性质与其伴随的差分算子性质密切相关，因而其稳定性研究要比时滞泛函微分方程相应问题的研究复杂得多。M. A. Cruz 和 J. K. Hale[113] 首先引进了稳定差分算子概念，并提出了具有稳定差分算子的中立型泛函微分方程的稳定性理论。

我们先从线性自治D算子入手，给出关于D算子稳定性的一个等价命题，从而引出一般D算子的稳定性概念。

考虑齐次差分方程

$$Dy_t = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

和非齐次差分方程

$$Dy_t = h(t), \quad t \geqslant 0. \tag{2}$$

其中D: $C \to \mathbf{R}^n$线性，在0处为原子的，$h \in c([0,\infty),\mathbf{R}^n)$。不失一般性，设$D\varphi = \varphi(0) - \int_{-r}^{0}[d\mu(\theta)]\varphi(\theta)$，其中$\underset{[-s,0]}{\mathrm{Var}}\,\mu \to 0$（$s \to 0$

时）。

记$C_D=\{\varphi\in C;\ D\varphi=0\}$，对$\psi\in C_D$，设$y_t(\psi)$是(1)过$(0,\psi)$的解，定义$T_D(t)$：$C_D\to C_D$，$t\geqslant0$为

$$T_D^{(t)}\psi=y_t(\psi)$$

则$T_D(t)$是一个强连续线性变换半群，定义

$$a_D=\inf\{a\in\mathbf{R};\ \text{存在}\ K=K(a),\ \text{使}\ \|T_D(t)\|\leqslant Ke^{at},\ t\geqslant0\}。$$

引理1 若$D:C\to\mathbf{R}^n$线性，在0处是原子的，则存在n个函数$\varphi_1,\cdots\varphi_n\in C$，使$D\Phi=I$，其中$\Phi=(\varphi_1,\cdots\varphi_n)$。

证 由假设，不妨设 $D\varphi=\varphi(0)-\int_{-r}^{0}[d\mu(\theta)]\varphi(\theta)$，其中$\underset{[-s,0]}{\mathrm{Var}}\ \mu\to0(s\to0$时)。

对任意$s\in[0,r]$，定义$\psi\in C$为

$$\psi(\theta)=\begin{cases}0, & -r\leqslant\theta\leqslant-s,\\ 1+\dfrac{\theta}{s}, & -s<\theta\leqslant0.\end{cases}$$

则
$$D\psi I=I-\int_{-s}^{0}[d\mu(\theta)]\left(1+\frac{\theta}{s}\right).$$

若$s>0$充分小，则$\det D\psi I\neq0$。定义$\Phi=\psi I(D\psi I)^{-1}$，则 $D\Phi=I$。证毕。

设Φ如上定义，$\Psi=I-\Phi D$,则Ψ，$C\to C_D$是一个连续投影。以$y(\psi,h)$记(2)过$(0,\psi)$的解，则易证

$$D\psi=h(0),\ y(\psi,h)=y(\Psi\psi,0)+y(\Phi h(0),\ h).\quad(3)$$

对固定$t\geqslant0$，定义$\mathscr{K}_D(t)$：$C([0,t],\ \mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}^n$为

$$\mathscr{K}_D(t)h=y(\Phi h(0),h)(t).$$

显然，$\mathscr{K}_D(t)$是一个线性算子。关于$\mathscr{K}_D(t)$的范数估计，我们有下述结论

引理2 对任意$a>a_D$，$a\neq0$，存在常数$K=K(a)$，使

$$\|\mathscr{K}_D(t)\|\leqslant\begin{cases}Ke^{at}, & \text{若}a>0.\\ K, & \text{若}a<0.\end{cases}$$

证明从略，有兴趣的读者可参阅[114]。

定理1 设D：$C\to \boldsymbol{R}^n$线性、连续，在0处为原子的，则下述命题等价：

(i) 方程

$$Dy_t=0,\quad t\geqslant 0,\quad y_0\in C_D$$

的零解渐近稳定，

(ii) $a_D<0$，

(iii) 存在常数a，$b>0$，使对任意$h\in C([0,\infty),\ \boldsymbol{R}^n)$，非齐次方程

$$Dy_t=h(t),\quad t\geqslant 0$$

的解$y(t)$满足

$$\|y_t\|\leqslant be^{-at}\|y_0\|+b\sup_{0\leqslant u\leqslant t}|h(u)|,\quad t\geqslant 0.$$

证 (i)$\Longrightarrow$(ii)。

因方程(1)的零解渐近稳定，存在$\delta_0>0$，使当$\varphi\in C_D$，$\|\varphi\|<\delta_0$时，$y(t)=y(t,\varphi)$满足

$$\|y_t(\varphi)\|<1,$$

即 $$\|T_D(t)\varphi\|<1,$$

从而 $$\|T_D(t)\|\leqslant 1/\delta_0,\quad t\geqslant 0.$$

再由(1)的零解之渐近稳定性知对任给$\eta>0$，存在$\tau=\tau(\eta)>0$，使当$t\geqslant\tau(\eta)$时，有

$$\|T_D(t)\varphi\|<\eta,\ \text{只要}\|\varphi\|<\delta_0.$$

取$\eta=\dfrac{\delta_0}{2}$，$\tau_0=\tau(\eta)$，则当$t\geqslant\tau_0$时，有

$$\|T_D(t)\varphi\|<\frac{\delta_0}{2}\qquad \text{只要}\|\varphi\|<\delta.$$

从而 $$\|T_D(\tau_0)\|\leqslant\frac{1}{2}.$$

对任意$t\geqslant 0$，存在正整数n及$\tau^*\in[0,\tau_0]$，使$t=n\tau_0+\tau^*$。由$T_D(t)$之半群性即得

$$\|T_D(t)\|=\|T_D(n\tau_0+\tau^*)\|$$

$$\leqslant \|T_D(\tau^*)\| \|T_D(\tau_0)\|^n$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta_0} 2^{-\frac{t-\tau^*}{\tau_0}}$$

$$\leqslant \frac{2}{\delta_0} e^{-\frac{t}{\tau_0}\ln 2},$$

故 $a_D \leqslant -\frac{1}{\tau_0}\ln 2 < 0$。

(ii)$\Longrightarrow$(iii)

因$a_D<0$，选取$a>0$，使 $a_D<-a<0$，按 a_D 之定义知存在$K_1=K_1(a)$，使得

$$\|T_D(t)\| \leqslant K_1 e^{-at}, \quad t \geqslant 0.$$

设$y(\psi,h)(t)$为(2)过$(0,\psi)$之解，由(3)得

$$y(\psi,h)(t) = y(\Psi\psi,0)(t) + y(\Phi h(0),h)(t)$$
$$= (T_D(t)\Psi\psi)(0) + \mathscr{K}_D(t)h,$$

则由引理2得

$$|y(\psi,h)(t)| \leqslant |(T_D(t)\Psi\psi)(0)| + |\mathscr{K}_D(t)h|$$
$$\leqslant \|T_D(t)\| \|\Psi\psi\| + K \sup_{0\leqslant u\leqslant t} |h(u)|$$
$$\leqslant K_1 e^{-at} \|\Psi\| \|\psi\| + K \sup_{0\leqslant u\leqslant t} |h(u)|.$$

令$b=\max\{K_1\|\Psi\|,K\}$，即得(iii)。

显然(iii)$\Longrightarrow$(i)。证毕。

据此，我们可引入非线性、非自治差分算子一致稳定的定义。

定义1 设$D\in c(\boldsymbol{R}\times C,\ \boldsymbol{R}^n)$。如果存在常数$a$，$b>0$，使对任意$h\in c([0,\infty),\ \boldsymbol{R}^n)$，非齐次差分方程

$$D(t,y_t)=h(t), \quad t\geqslant t_0$$

的解$y(t)$满足

$$\|y_t\| \leqslant be^{-a(t-t_0)}\|y_{t_0}\| + b \sup_{t_0\leqslant u\leqslant t} |h(u)|, \quad t\geqslant t_0. \tag{4}$$

则称D算子是一致稳定的。

显然，由定理1知当D为线性自治算子，且在0处为原子时，D算子是一致稳定的，当且仅当差分方程（1）之零解渐近稳定。

容易证明，若D算子一致稳定，则存在正常数a,b,c,d，使对任意$h\in c([0,\infty),\boldsymbol{R}^n)$，$t_0\geqslant 0$，方程

$$D(t,y_t)=h(t),\quad t\geqslant t_0$$

之解$y(t)$满足

$$\|y_t\|\leqslant e^{-a(t-s)}(b\|\varphi\|+c\sup_{t_0\leqslant u\leqslant t}|h(u)|)+d\sup_{s\leqslant u\leqslant t}|h(u)|. \tag{5}$$

其中$s\geqslant t_0$，$t\geqslant s+r$。

具有稳定D算子的中立型泛函微分方程拥有时滞泛函微分方程所具有的许多性质，这里我们叙述一个关于自治中立型泛函微分方程有界解的极限集的一个结论。

考虑自治中立型泛函微分方程

$$\frac{d}{dt}D(x_t)=f(x_t),\quad t\geqslant 0. \tag{6}$$

其中D：$C\to\boldsymbol{R}^n$线性，在0处原子的，f：$\Omega\to\boldsymbol{R}^n$连续，$\Omega\subseteq C$为开集。记(6)为NFDE$(D,f,\Omega)$

对于NFDE(D,f,Ω)，正轨道$\gamma^+(\varphi)$，$\gamma^+(\varphi)$的ω—极限集$\omega(\gamma^+(\varphi))$以及不变集的概念与延滞泛函微分方程相应概念相同。

定理2 设线性算子D：$C\to\boldsymbol{R}^n$连续，在0处原子，且一致稳定，又设$\Omega\subseteq C$为开集，映射f：$\Omega\to\boldsymbol{R}^n$全连续，则NFDE$(D,f,\Omega)$的正轨道$\gamma^+(\varphi)$是相对紧的充要条件为$\gamma^+(\varphi)$有界。若$\gamma^+(\varphi)$有界，则$\omega(\gamma^+(\varphi))$是非空、紧、不变连通集。

证 因为第一部分成立时，第二部分的证明与时滞泛函微分方程相应定理的证明相同，故这里仅给出第一部分的证明。

显然，$\gamma^+(\varphi)$相对紧蕴含$\gamma^+(\varphi)$有界。反之，若$\gamma^+(\varphi)$有界，则由f的全连续性知存在常数$M>0$，使$|f(\gamma^+(\varphi))|\leqslant M$。设$x(t)$为方程(6)过$(0,\varphi)$的解，则对任意$\tau\geqslant 0$，$t\geqslant 0$，有

$$D(x_{t+\tau}-x_t)=\int_t^{t+\tau}f(x_s)ds.$$

由定义1知

$$\|x_{t+\tau}-x_t\|\leqslant b\|x_\tau-\varphi\|+bM\tau.$$

因x_τ在$\tau=0$处连续，故$x(t)$在$[-r,\infty)$上一致连续，又由于$x(t)$有界，从而$\gamma^+(\varphi)$相对紧，证毕。

对连续映射V：$C\to \mathbf{R}^+$，定义

$$\dot{V}_{(6)}(\phi)=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}[V(x_h(\phi))-V(\phi)]。$$

定义2 对自治NFDE(D,f)，称V：$C\to \mathbf{R}^n$为在$G\subseteq C$上的李雅普诺夫泛函，若V在clG上(G的闭包)连续，且在G上有$\dot{V}_{(6)}(\phi)\leqslant 0$。令

$$S=\{\varphi\in ClG;\ \dot{V}_{(6)}(\varphi)=0\}$$

$M=S$中关于NFDE(D,f)的最大不变集

下述定理是时滞泛函微分方程相应定理的推广，故我们仅叙述其结论

定理3 设 NFDE(D,f)为自治的，线性算子D为一致稳定，V是G上对于 NFDE(D,f)的李雅普诺夫泛函，$\gamma^+(\varphi)\subseteq G$且或者$x_t(\varphi)$有界或者$Dx_t(\varphi)$有界$(t\geqslant 0)$，则当$t\to\infty$时，$x_t(\varphi)\to M$。若

$$G=U_l=\{\varphi\in C;\ V(\varphi)<l\},$$

且存在常数$K=K(l)$，使$\phi\in U_l$蕴含$|\varphi(0)|<K$或$|D\phi|<K$，则当$\phi\in U_l$时，$x_t(\phi)\to M(t\to\infty)$。

由定理2和定理3可以看出，经典的动力系统中所知道的那些性质对具有稳定线性有D算子的中立型泛函微分方程仍然成立，事实上，O・J・Staffans 证明了具有线性、一致稳定的D算子的中立型泛函微分方程可以写为具有无穷延滞的时滞泛函微分方程，他还利用这个事实讨论了中立型方程的稳定性。有兴趣的读者可参阅[115]。

接下来，让我们讨论具非线性D算子的中立型微分方程

$$\frac{d}{dt}D(t,x_t)=f(t,x_t)。\tag{7}$$

其中$D,f\in C(\mathbf{R}^+\times C,\mathbf{R}^n)$，$D$在0处为原子的，$f(t,0)=D(t,0)=0$。

对$V\in C([-r,\infty)\times C,\mathbf{R})$，定义

$$\dot V_{(7)}(t,\varphi)\quad \overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}\{V(t+h,x_{t+h}(t,\varphi))-V(t,\varphi)\}.$$

关于(7)的各种稳定性与RFDE的相同（见第六章§1)。例如：

称(7)的零解为一致稳定，若对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta(\varepsilon)>0$，使对任意$(t_0,\varphi)\in \mathbf{R}^+\times C$，当$\|\varphi\|<\delta(\varepsilon)$，$t\geq t_0$时，$|x(t;t_0,\varphi)|<\varepsilon$。

若存在 $\delta_0>0$，使对任意 $\eta>0$，存在 $T(\eta)>0$，使对任意$(t_0,\varphi)\in \mathbf{R}^+\times C$，当$\|\varphi\|<\delta_0$，$t\geq t_0+T(\eta)$时，$|x(t;t_0,\varphi)|<\eta$，则称(7)的零解为一致渐近稳定。

引理3 设算子D为一致稳定的，$x(t)=x(t;\ t_0,\varphi)$ 为方程(7)过(t_0,φ)的解，则对任意连续函数α：$\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$，$\alpha(0)=0$，$\alpha(\delta)>0$，$\delta>0$时，存在连续函数$\beta$：$\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$，$\beta(0)=0$，$\beta(\delta)>0$，$\delta>0$时，满足

(i) 当$\|\varphi\|\leq\delta$时，若$|D(t,x_t)|\leq\alpha(\delta)$，$t\geq t_0$，则

$$\|x_t\|\leq\beta(\delta),\quad t\geq t_0$$

(ii) 对任意$M\geq\delta$和$A>0$，存在$T=T(M,\delta,A)>0$，使当$\|\varphi\|\leq M$，$|D(t,x_t)|\leq\alpha(\delta)$，$t\geq t_0$时，有

$$\|x_t\|\leq\beta(\delta)+A,\quad t\geq t_0+T.$$

证 (i) 由(4)式，取$\beta(\delta)\geq b(\delta+\alpha(\delta))$即证

(ii) 取$T>\max\left\{0,\frac{1}{a}\ln\frac{bM}{\beta(\delta)+A-b\alpha(\delta)}\right\}$，则当 $t\geq t_0+T$ 时，由(4) 式得

$$\begin{aligned}\|x_t\|&\leq be^{-a(t-t_0)}\|\varphi\|+b\sup_{t_0\leq u\leq t}|D(u,x_u)|\\&\leq be^{-aT}M+b\alpha(\delta)\\&\leq\beta(\delta)+A.\end{aligned}$$

证毕。

定理4 [116]设算子D为一致稳定的，$f:\mathbf{R}\times(C$中有界集$)\to\mathbf{R}^n$中有界集，如果存在连续函数V：$\mathbf{R}\times C\to\mathbf{R}^n$，满足

(i) $u(|D(t,\varphi)|)\leq V(t,\varphi)\leq v(\|\varphi\|)$，

(ii) $\dot V_{(7)}(t,\varphi)\leq -w(|D(t,\varphi)|)$，

其中u,v,w为连续非减函数，$u(0)=v(0)=0$，当$s>0$时，$u(s)$，

$v(s), w(s)>0$。且存在连续函数 $\alpha(s)$，$\alpha(0)=0$，$\alpha(s)>0$，$s>0$ 时，使$v(s)\leqslant u(\alpha(s))$。

则方程(7)的零解为一致渐近稳定。

证 设$\beta(\delta)$于引理3给出。对任意$\varepsilon>0$，存在 δ：$0<\delta<\varepsilon$，$\beta(\delta)<\varepsilon$，由(i)，(ii)得当$\|\varphi\|\leqslant\delta$时，对$x(t)=x(t;\ t_0,\varphi)$，有

$$u(|D(t,x_t)|)\leqslant V(t,x_t)\leqslant V(t_0,\ \varphi)\leqslant v(\|\varphi\|)\leqslant v(\delta)$$
$$\leqslant u(\alpha(\delta)),\ \ t\geqslant t_0.$$

从而 $\quad |D(t,x_t)|\leqslant\alpha(\delta),\ \ t\geqslant t_0$

根据引理3得

$$\|x_t\|\leqslant\beta(\delta)<\varepsilon,\ \ t\geqslant t_0.$$

这说明(7)的零解为一致稳定。

下面证明(7)的零解为一致渐近稳定。设 $\delta_0=\delta(1)$。对任意$\eta>0$，要证明存在$\tau=\tau(\eta)>0$，使当$t\geqslant t_0$，$\|\varphi\|\leqslant\delta_0$ 时，对(7)的解$x(t)=x(t;t_0,\varphi)$，有

$$\|x_t\|\leqslant\eta,\ \ 当t\geqslant t_0+\tau(\eta). \tag{8}$$

假设(8)式不成立，则有

$$\|x_t\|\geqslant\delta=\delta(\eta),\ \ t\geqslant t_0.$$

由(4) 式，对任意的$\tau\geqslant t_0$，有

$$\delta\leqslant\|x_t\|\leqslant be^{-a(t-\tau)}\|x_\tau\|+b\sup_{\tau\leqslant u\leqslant t}|D(u,x_u)|. \tag{9}$$

选取正数$\bar{\tau}$，使$\bar{\tau}>\max\left\{0,\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{2b}{\delta}\right\}$，记$\bar{t}_0=t_0+\bar{\tau}$，由(9)式，得

$$\delta\leqslant\|x_{\bar{t}_0}\|\leqslant be^{-a\bar{\tau}}\|x_{t_0}\|+b\sup_{t_0\leqslant u\leqslant\bar{t}_0}|D(u,x_u)|$$
$$\leqslant\frac{\delta}{2}+b\sup_{t_0\leqslant u\leqslant\bar{t}_0}|D(u,x_u)|.$$

从而有

$$b\sup_{t_0\leqslant u\leqslant\bar{t}_0}|D(u,\ x_u)|\geqslant\frac{\delta}{2}.$$

故存在$t_1'\in[t_0,\bar{t}_0]$，使

$$|D(t_1',t_{t_1'})|\geqslant\frac{\delta}{2b}.$$

同理，有

$$|D(t_k', x_{t_k}')| \geqslant \frac{\delta}{2b}, \quad t_k' \in [\bar{t}_{k-1}, \bar{t}_k]。$$

这里$\bar{t}_0 = t_0$，$\bar{t}_k = t_0 + k\bar{r}$ $(k=1,2,\cdots)$。再根据f的有界性，存在常数L，使

$$\left|\frac{d}{dt}D(t, x_t)\right| < L, \quad 当 t \geqslant t_0。$$

由上面讨论知，当$\|x_t\| \geqslant \delta$对 $t \geqslant t_0$成立时，存在 $t_i \in [t_0 + (2i-1)\bar{r}, t_0 + 2i\bar{r}]$，$i = 1,2,\cdots$，使

$$|D(t_i, x_{t_i})| \geqslant \frac{\delta}{2b},$$

从而

$$|D(t, x_t)| \geqslant \frac{\delta}{4b} \quad 当 t \in \left[t_i - \frac{\delta}{4Lb}, \ t_i + \frac{\delta}{4Lb}\right]。$$

不妨设L可取得足够大，使$\frac{\delta}{4Lb} < \frac{\bar{r}}{2}$，因而各区间$\left[t_i - \frac{\delta}{4bL}, \ t_i + \frac{\delta}{4bL}\right]$互不相交，此时有

$$\dot{V}_{(7)}(t, x_t) \leqslant -W\left(\frac{\delta}{4b}\right), \quad 当 t \in \left[t_i - \frac{\delta}{4Lb}, t_i + \frac{\delta}{4Lb}\right],$$

从面

$$V(t_k, x_{t_k}) \leqslant V(t_0, \varphi) - W\left(\frac{\delta}{4b}\right) \cdot \frac{\delta}{2Lb}(k-1)。$$

选取正整数 $K > 1 + V(\delta_0) \Big/ \left[\frac{\delta}{2Lb} W\left(\frac{\delta}{4b}\right)\right]$，则有

$$V(t_k, x_{t_k}) < V(t_0, \varphi) - W\left(\frac{\delta}{4b}\right) \frac{\delta}{2Lb} \quad V(\delta_0) \Big/ \left[\frac{\delta}{2Lb} W\left(\frac{\delta}{4b}\right)\right] \leqslant 0。$$

导出矛盾。这表明，存在$t^* \in [t_0, \ t_0 + 2k\bar{r}]$，使$\|x_{t^*}\| < \delta$，因而有$\|x_t\| < \eta$，当$t \geqslant t_0 + 2k\bar{r}$。即(7)的零解一致渐近稳定，证毕。

对中立型泛函微分方程，也可建立Razumikhin型定理。

定理5[116] 设算子D是一致稳定的，且$|D(t,\varphi)|\leqslant K\|\varphi\|$，$K$为某常数；$f:\boldsymbol{R}\times C\to\boldsymbol{R}^n$为连续，且将$\boldsymbol{R}\times$（$C$中有界集）映为$\boldsymbol{R}^n$中有界集。设存在连续函数$V:\boldsymbol{R}^+\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$及满足定理4假设的$u$，$v$，$w$，$v(Ks)\leqslant u(\alpha(s))$，$s\geqslant 0$，以及连续非减函数$F:\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}^+$，$F(v(K\eta))>v(\beta(\eta))$，$\eta>0$，使

(i) $u(|x|)\leqslant V(t,x)\leqslant v(|x|)$，

(ii) 当$F(V(t,D(t,x_t)))\geqslant V(\xi,x(\xi))$对$t-r\leqslant\xi\leqslant t$成立时，有

$$\dot V_{(7)}(t,D(t,x_t))\leqslant -W(|D(t,x_t)|)。$$

则方程(7)的零解为一致渐近稳定。

证 先证一致稳定性。对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当$s\leqslant\delta$时，$\beta(s)<\varepsilon$。现要证明，对 $x(t)=x(t;t_0,\varphi)$，当$\|\varphi\|\leqslant\delta$时，有

$$V(t,D(t,x_t))\leqslant v(K\delta),\qquad t\geqslant t_0。\tag{10}$$

假若不然，则存在$t_1>t_0$，满足

$$V(t_1,D(t_1,x_{t_1}))=v(K\delta),$$

$$V(t,D(t,x_t))\leqslant v(K\delta),\qquad 当t_0\leqslant t\leqslant t_1,$$

及存在$t_n>t_1$，$t_n\to t_1$，使得

$$V(t_n,D(t_n,x_{t_n}))>v(K\sigma),$$

从而应有

$$\dot V(t_1,D(t_1,x_{t_1}))\geqslant 0。$$

另一方面，由于

$$u(|D(t,x_t)|)\leqslant V(t,D(t,x_t))\leqslant v(K\delta)\leqslant u(\alpha(\delta)),$$

$t_0\leqslant t\leqslant t_1$，得出

$$|D(t,x_t)|\leqslant\alpha(\delta),\ 当t_0\leqslant t\leqslant t_1,$$

根据引理3，有

$$|x(t)|\leqslant\beta(\delta),\ 当t_0-r\leqslant t\leqslant t_1,$$

又因为

$$F(V(t_1,D(t_1,x_{t_1})))=F(v(K\delta))>v(\beta(\delta))\geqslant V(|x(t)|)$$

$\geqslant V(t, x(t)), \quad t_1 - r \leqslant t \leqslant t_1$.

由条件(ii)，有

$$\dot{V}(t_1, D(t_1, x_{t_1})) \leqslant -W(|D(t_1, x_{t_1})|) < 0.$$

由此导出矛盾，故(10)式成立。从而

$$u(|D(t, x_t)|) \leqslant V(t, D(t, x_t)) \leqslant v(K\delta) \leqslant u(\alpha(\delta)), \quad t$$

$\geqslant t_0$ 根据引理3，当 $\|x_{t_0}\| \leqslant \delta$ 时，有

$$|x(t)| \leqslant \beta(\delta) < \varepsilon, \qquad \text{当} t \geqslant t_0,$$

这便证明了一致稳定性。

下面证明一致渐近稳定性。取 $\delta_0 = \delta(1)$，设 $x(t) = x(t; t_0, \varphi)$，$\|\varphi\| < \delta_0$，要证明：对任意 $\eta > 0$，存在 $T = T(\eta) > 0$，使当 $t \geqslant t_0 + T(\eta)$ 时，$|x(t)| < \eta$。

选取正数 a_1，z，a，N，z_j，η，γ 如下：

a_1：$0 < a_1 < \eta$，$F(v(KR) - a) > V(\beta(R) + a)$，当 $0 < R \leqslant \delta_0$，

z：$\beta(z) \leqslant \eta - a_1$，

a：$a = \min\{a_1, u(\alpha(z))\}$，

N：$u(\alpha(z)) + Na \geqslant v(K\delta_0) > u(\alpha(z)) + (N-1)a$，

z_j：$v(K\delta_0) - ja = v(Kz_j)$，$j = 1, \cdots N$，

η_1：$0 < \eta_1 \leqslant \alpha(z)$，$\eta_1 \leqslant Kz_N$，

γ：$\gamma = \inf\limits_{\eta_1 \leqslant s \leqslant K} w(s) > 0$.

现在证明

$$V(t, D(t, x_t)) \leqslant v(K\delta_0) - ja, \quad \text{当} t \geqslant t_0 + j\left(T + r + \frac{v(K\delta_0)}{\gamma}\right). \tag{11}$$

其中 T 为引理3中相应的常数 $T(\delta_0, \delta_0, a)$。

先证 $j = 1$ 的情形，即

$$V(t, D(t, t_t)) \leqslant v(K\delta_0) - a, \text{当} t \geqslant t_0 + \left(T + r + \frac{v(K\delta)}{\gamma}\right).$$

设当 $t \geqslant T + r + t_0$ 时，有

$$V(t, D(t, x_t)) \geqslant v(K\delta_0) - a,$$

则 $\quad v(K\delta_0)-a\leqslant V(t, D(t, x_t))\leqslant v(K\delta_0),\quad t\geqslant T+r+t_0$。

此时 $\quad u(|D(t, x_t)|)\leqslant V(t, D(t, x_t))\leqslant v(K\delta_0)\leqslant u(\alpha(\delta_0)),$

$$t\geqslant t_0. \tag{12}$$

因而 $$|D(t, x_t)|\leqslant\alpha(\delta_0),\qquad t\geqslant t_0. \tag{13}$$

据引理3，有

$$|x(t)|\leqslant\beta(\delta_0)+a,\qquad t\geqslant t_0+T. \tag{14}$$

从而，

$$F(V(t, D(t, x_t))\geqslant Fv(K\delta_0)-a)$$
$$>v(\beta(\delta_0)+a)\geqslant V(\zeta, x(\zeta)),\quad t-r\leqslant\zeta\leqslant t,\quad t\geqslant T+r+t_0.$$

所以 $\quad \dot V(t, D(t, x_t))\leqslant -w(|D(t, x_t)|), t\geqslant t_0+T+r.$

又由于

$$v(Kz_1)=v(K\delta_0)-a\leqslant V(t, D(t,x_t))\leqslant v(|D(t,x_t)|),$$

有 $\quad |D(t, x_t)|K\geqslant z_1,\qquad t\geqslant T+r+t_0$。

由此即得

$$\dot V(t, D(t, x_t))\leqslant -\gamma,\quad t\geqslant T+r+t_0=\bar t_0.$$
$$V(t, D(t, x_t))\leqslant V(\bar t_0, D(\bar t_0, x_{\bar t_0}))-\gamma(t-\bar t_0)$$
$$\leqslant v(K\delta_0)-\gamma(t-\bar t_0)\leqslant 0.$$

当 $t\geqslant\bar t_0+\dfrac{\nu(K\delta_0)}{\gamma}$ 时，这表明，存在 $t_1\in[T+r+t_0, T+r+t_0+\dfrac{\nu(K\delta_0)}{\gamma}]$，使

$$V(t_1, D(t_1, x_{t_1}))<v(K\delta)-a.$$

这时，可以证明

$$V(t, D(t, x_t))\leqslant v(K\delta_0)-a，当 t\geqslant t_1.$$

假若不然，则存在 $t^*>t_1$，使

$$V(t^*, D(t^*, x_{t^*}))=v(K\delta_0)-a,$$

及序列 $\quad t_n>t^*,\quad t_n\to t^*$，使

$$V(t_n, D(t_n, x_{t_n}))>v(K\delta_0)-a,$$

从而 $\quad \dot V(t^*, D(t^*, x_{t^*}))\geqslant 0,$

另一方面，由于

$$u(|D(t,\ x_t)|)\leqslant V(t,\ D(t,x_t))\leqslant v(K\delta_0)\leqslant u(\alpha(\delta_0)),$$

$t\geqslant t_0$,

有 $\quad |D(t,\ x_t)|\leqslant \alpha(\delta_0),\qquad t\geqslant t_0$。

由引理 3 得

$$|x(t)|\leqslant \beta(\delta_0)+a,\ \text{当}\ t\geqslant t_0+T.$$

又由于$F(V(t^*,\ D(t^*,\ x_{t^*})))=F(\nu(K\delta_0)-a)$

$$\begin{aligned}&>v(\beta(\delta_0)+a)\\&\geqslant v(|x(\zeta)|)\\&\geqslant V(\zeta,\ x(\zeta)),\quad t^*-r\leqslant\zeta\leqslant t^*.\end{aligned}$$

据条件(ii)，有

$$\dot V(t_*,\ D(t^*,\ x_{t^*}))\leqslant -W(|D(t^*,\ x_{t^*})|)<0,$$

导出矛盾，故对$i=1$，(11)成立。

重复上述证明，可证当$i=2$，$\cdots N$时，(11) 式成立，最后得到

$$\begin{aligned}u(|D(t,\ x_t)|)&\leqslant V(t,\ D(t,\ x_t))\\&\leqslant v(K\delta_0)-Na\\&\leqslant u(\alpha(z)),\ \text{当}\ t\geqslant t_0+N\left(\bar t_0+\frac{v(K\delta_0)}{\gamma}\right)\end{aligned}$$

从而 $\quad |D(t,\ x_t)|\leqslant\alpha(z)$。

据引理 3，有

$$|x(t)|\leqslant\beta(z)+a<\eta,\ t\geqslant t_0+N\left(\bar t_0+\frac{v(K\delta_0)}{\gamma}\right)+$$
$$+T(\delta_0,\ \eta,\ a).$$

这便证明了一致渐近稳定性。证毕。

例1 考虑方程

$$\frac{d}{dt}Dx_t=-g(x(t)),\tag{15}$$

$$D\varphi=\varphi(0)-q\varphi(-r),\quad |q|<1.$$

其中g连续，$g(0)=0$。

若$|q|<1/2$，$xg(x)>0$ ($x\neq 0$时)，$\lim\limits_{|x|\to\infty}|g(x)|=\infty$，则方程

(15)的零解一致渐近稳定。

证 作$V(x)=x^2$，$u(s)=v(s)=s^2$，$F(s)=N^2 s$，

其中$N>(1-|q|)^{-1}$，$\alpha(\eta)=(1+|q|)\eta, \beta(\eta)=\dfrac{1+|q|}{1-|q|}\eta$。

若$F(V(D\varphi))\geqslant V(\varphi(\theta))\quad -r\leqslant\theta\leqslant 0$，则$|\varphi(-r)|\leqslant N|D\varphi|$，因而

$$\frac{\varphi(0)}{D\varphi}=1+q\frac{\varphi(-r)}{D\varphi}\geqslant 1-|q|\frac{|\varphi(-r)|}{|D(\varphi)|}\geqslant 1-|q|N>$$

$$>\frac{1-2|q|}{1-|q|}>0。$$

令$\varepsilon=1-|q|N$，则有

$$\varphi(0)/D\varphi\geqslant\varepsilon。$$

令

$$w_1(s)=\begin{cases}\min g(u), & \varepsilon s\leqslant u\leqslant s(1-|q|)^{-1}, s\geqslant 0。\\ -\max g(u), & s(1-|q|)^{-1}\leqslant u\leqslant\varepsilon s, s<0。\end{cases}$$

若$\varphi(0)\geqslant\varepsilon D\varphi$，$D\varphi\geqslant 0$，则$g(\varphi(0))\geqslant w_1(D\varphi)$，

$$\dot V_{(15)}(D\varphi)=-2(D\varphi)g(\varphi(0))\leqslant -2D\varphi w_1(D\varphi),$$

若$\varphi(0)\leqslant\varepsilon D\varphi$，$D\varphi\leqslant 0$，则$g(\varphi(0))\leqslant -w_1(D\varphi)$，

$$\dot V_{(15)}(D\varphi)\leqslant 2D\varphi w_1(D\varphi)。$$

令$w(s)=2\min\{sw_1(s),\ sw_1(-s)\}$，则$s>0$时，$w(s)>0$且当$\varphi(0)/D\varphi\geqslant\varepsilon$时，$\dot V_{(15)}(D\varphi)\leqslant -w(|D\varphi|)$，因而由定理5知(15)的零解一致渐近稳定，证毕。

下面，介绍[118]的结果，其中去掉了f将$\boldsymbol{R}\times(C$中有界集)映为$\boldsymbol{R}^n$中有界集的假设。

定理 6 设D为一致稳定的，若存在连续泛函$V:\boldsymbol{R}^+\times C\to\boldsymbol{R}^+$，连续泛函$z:\boldsymbol{R}^+\times C\to\boldsymbol{R}$和楔函数$W_i(i=1,2,3)$，满足

(i) $W_1(|D(t,\varphi)|)+z(t,\varphi)\leqslant V(t,\varphi)\leqslant W_2(|D(t,\varphi)|)+Z(t,\varphi)$，$(t,\varphi)\in\boldsymbol{R}^+\times C$，且对每个$t_0\in\boldsymbol{R}^+$，对每个有界连续$h\in C([t_0-r,\ \infty),\ \boldsymbol{R}^n)$，存在常数$K>0$，使当$t_0\leqslant t_1<t_2<\infty$时，有

$$z(t_2, h_{t_2}) - z(t_1, h_{t_1}) \leqslant K(t_2 - t_1),$$

(ii) $\dot{V}_{(7)}(t, \varphi) \leqslant -w_3(|D(t, \varphi)|)$,

则系统(7)的每个有界解均趋于零。

证 若存在(7)的某个有界解 $x(t) = x(t; t_0, \varphi)$, $t \geqslant t_0 - r$不趋于零，由(5)知，这时必有$D(t, x_t)$不趋于零。于是存在正数ε_0及序列$\{t'_n\}$, $t'_n \to \infty (n \to \infty)$, 而有$|D(t'_n, x_{t'_n})| \geqslant \varepsilon_0$, $n = 1, 2, \cdots$, 又由$\dot{V} \leqslant 0$, $V \geqslant 0$得

$$\int_{t_0}^{t} w_3(|D(s, x_s)|) ds \leqslant V(t_0, \varphi), \quad t \geqslant t_0.$$

从而 $$\int_{t_0}^{+\infty} w_3(|D(s, x_s)|) ds < +\infty.$$

这时必存在序列 $\{\xi_n\}$, $\xi_n \to \infty (n \to \infty)$, 使 $D(\xi_n, x_{\xi_n}) \to 0$ $(n \to \infty)$。又由$V(t, x_t)$单调下降性得$V(t, x_t) \to L (t \to \infty)$。

令正数$\gamma < \varepsilon_0$, 且$w_2(\gamma) < \frac{1}{4} w_1(\varepsilon_0)$。由$\{t'_n\}$和$\{\xi_n\}$ 的特性可知存在二个序列$\{t_n\}$, $\{T_n\}$, 使当$t_n \leqslant t \leqslant T_n$时

$$\gamma \leqslant |D(t, x_t)| \leqslant \varepsilon_0,$$

且 $|D(t_n, x_{t_n})| = \varepsilon_0$, $|D(T_n, x_{T_n})| = \gamma$, $t_n \to +\infty (n \to +\infty)$。不妨可设$T_n < t_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3 \cdots)$。由(i)得

$$W_1(\varepsilon_0) + z(t_n, x_{t_n}) \leqslant V(t_n, x_{t_n}) \leqslant W_2(\varepsilon_0) + z(t_n, x_{t_n}) \tag{16}$$

和

$$W_1(\gamma) + z(T_n, x_{T_n}) \leqslant V(T_n, x_{T_n}) \leqslant W_2(\gamma) + z(T_n, x_{T_n}). \tag{17}$$

由(16)和$V \to L$知对充分大的n, 有

$$Z(t_n, x_{t_n}) \leqslant L + \frac{1}{4} W_1(\varepsilon_0) - W_1(\varepsilon_0) = L - \frac{3}{4} W_1(\varepsilon_0). \tag{18}$$

又由(17)得

$$Z(T_n, x_{T_n}) \geqslant L - W_2(\gamma) \geqslant L - \frac{1}{4} W_1(\varepsilon_0), \tag{19}$$

所以 $z(T_n, x_{T_n})-z(t_n, x_{t_n})\geqslant\frac{1}{2}W_1(\varepsilon_0)$。

又由假设(i)知存在常数$K>0$，使

$$Z(T_n, x_{T_n})-Z(t_n, x_{t_n})\leqslant K(T_n-t_n),$$

故 $$T_n-t_n\geqslant\frac{W_1(\varepsilon_0)}{2K}, \ n=1, 2, \cdots.$$

因而

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{\infty}W_3(|D(s, x_s)|)ds &\geqslant\sum_{n=1}^{N}\int_{t_n}^{T_n}W_3(|D(s, x_s)|)ds\\ &\geqslant\sum_{n=1}^{N}W_3(\gamma)(T_n-t_n)\\ &\geqslant NW_3(\gamma)\cdot\frac{W_1(\varepsilon_0)}{2K}.\end{aligned}$$

由N的任意性知积分$\int_{t_0}^{\infty}W_3(|D(s, x_s)|)ds$发散，这与$\int_{t_0}^{+\infty}W_3(|D(s, x_s)|)ds<+\infty$矛盾。证毕。

定理 7 设D为一致稳定的。且存在$l>0$，使$|D(t, \varphi)|\leqslant l\|\varphi\|$。若存在连续泛函$V$，$z:\boldsymbol{R}^+\times C\to\boldsymbol{R}^+$和楔函数$W_i(i=1, 2, 3, 4)$，满足

(i) $W_1(|D(t, \varphi)|)+z(t, \varphi)\leqslant V(t,\varphi)\leqslant W_2(|D(t, \varphi)|)+z(t, \varphi)$，$z(t, \varphi)\leqslant W_4(\|\varphi\|)$，且对每个$t_0\in\boldsymbol{R}^+$，对每个$h\in C([t_0-r, \infty), \boldsymbol{R}^n)$，$|h(t)|\leqslant\Gamma$，$\Gamma$为正常数，存在正常数$=K$ $K(\Gamma)$，使当$t_0\leqslant t_1<t_2<\infty$时，有

$$Z(t_2, h_{t_2})-z(t_1, h_{t_1})\leqslant K(t_2-t_1),$$

(ii) $\dot V_{(7)}(t, \varphi)\leqslant-W_3(|D(t, \varphi)|)$，

则系统(7)的零解为一致渐近稳定。

证 先证一致稳定性。对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，$\delta<\frac{\varepsilon}{2b}$，使$W_2(l\delta)+W_4(\delta)<W_1\left(\frac{\varepsilon}{2(c+d)}\right)$，其中$b$，$c$，$d$为(5)中所涉及的正常数。记$x(t)=x(t; t_0,\varphi)$，$t_0\in R^+$，$\|\varphi\|<\delta$，于

是由假设(i)得

$$W_1(|D(t,x_t)|)\leqslant W_1(|D(t,x_t)|)+z(t,x_t)$$
$$\leqslant V(t_0,\varphi)$$
$$\leqslant W_2(|D(t_0,\varphi)|)+W_4(\|\varphi\|)$$
$$\leqslant W_2(l\delta)+W_4(\delta)$$
$$<W_1\left(\frac{\varepsilon}{2(c+d)}\right),\quad t\geqslant t_0.$$

所以，$|D(t,x_t)|<\frac{\varepsilon}{2(c+d)}$，　　$t\geqslant t_0$。

由(5)式，即得

$$\|x_t(t_0,\varphi)\|\leqslant e^{-a(t-t_0)}(b\|\varphi\|+c\sup_{t_0\leqslant u\leqslant t}|D(u,x_u)|)+d\sup_{t_0\leqslant u\leqslant t}|D(u,x_u)|\leqslant b\delta+(c+d)\frac{\varepsilon}{2(c+d)}$$
$$<\varepsilon,\qquad t\geqslant t_0.$$

从而(7)的零解一致稳定。

现取$\delta_0=\delta(1)$。我们将证明，对于任意$\varepsilon>0$，存在$T(\varepsilon)$，当$t_0\geqslant 0$，$\|\varphi\|<\delta_0$，$t\geqslant t_0+T$时，有$\|x_t(t_0,\varphi)\|<\varepsilon$。令$\delta$为一致稳定性中的$\delta(\varepsilon)$，$a$，$b$，$c$，$d$于（5）式给出。令正常数$\alpha$，满足$\alpha\geqslant r$和

$$e^{-a\alpha}(b\delta_0+lC)\leqslant\frac{\delta}{2}. \tag{20}$$

令正整数K_0满足

$$K_0>1+\frac{W_2(l\delta_0)+W_4(\delta_0)}{\lambda}. \tag{21}$$

其中$\lambda=\min\left\{\frac{W_3(\gamma)W_1\left(\frac{\delta}{2d}\right)}{2K},\ W_3(\gamma)\alpha\right\}$，$K=K(1)$，$\gamma$满足$0<\gamma<\frac{\delta}{2d}$，$W_2(\gamma)<\frac{W_1\left(\frac{\delta}{2d}\right)}{4}$。

下面先证不可能成立

$$\|x_{t_k}\|\geqslant\delta,\quad t_k=t_0+2k\alpha,\quad k=1,2\cdots K_0. \tag{22}$$

事实上，若(22)成立，在(5)中 取 $s_k=t_0+(2k-1)\alpha$，$t_k=t_0+2k\alpha$，$k=1, 2, \cdots K_0$，有

$$\delta\leqslant\|x_{t_k}\|\leqslant e^{-a\alpha}[b\|\varphi\|+C\sup_{t_0\leqslant u\leqslant t_k}|D(u, x_u)|]+d\sup_{s_k\leqslant u\leqslant t_k}$$

$$|D(u, x_u)|\leqslant e^{-a\alpha}(b\delta_0+lc)+d\sup_{s_k\leqslant u\leqslant t_k}|D(u, x_u)|,$$

又由(20)知，这时必存在$u_k\in[s_k, t_k]$，使

$$\frac{\delta}{2d}\leqslant|D(u_k, x_{u_k})|, k=1, 2, \cdots K.$$

现考察$|D(t, x_t)|$在区间$[u_i, u_{i+1}](i=1, 2, \cdots, K_0-1)$的数值，或者当$t\in[u_i, u_{i+1}]$时，$|D(t,x_t)|\geqslant\gamma$，或者存在$t_i'\in[u_i, u_{i+1}]$，使$|D(t_i', x_{t_i'})|<\gamma$。今记

$I_1=\{[u_i', u_{i+1}'], i=1, 2, \cdots K_1; \gamma\leqslant|D(t, x_t)|, t\in[u_i', u_{i+1}']\}$,

$I_2=\{[u_i'', u_{i+1}''], i=1, 2, \cdots K_2$; 存在$t_i'\in[u_i'', u_{i+1}'']$, $|D(t_i', x_{t_i'})|<\gamma\}$,

而 $I_1\cup I_2=\{[u_i, u_{i+1}]; i=1, 2\cdots K_0-1\}, K_1+K_2=K_0-1$。

对于I_2中每个区间$[u_i'', u_{i+1}'']$，必存在$[t_i, T_i]\subseteq[u_i'', u_{i+1}'']$，使

$$|D(t_i, x_{t_i})|=\frac{\delta}{2d}, \quad |D(T_i, x_{T_i})|=\gamma,$$

且当$t\in[t_i, T_i]$时有

$$\gamma\leqslant|D(t, x_t)|\leqslant\frac{\delta}{2d}, \quad i=1, 2, \cdots K_2.$$

从而与定理 6 的证明类似可得

$$T_i-t_i\geqslant W_1\left(\frac{\delta}{2d}\right)/2K, i=1, 2, \cdots K_2,$$

其中$K=K(1)$，因这时$|x(t)|<1$。又显然$u_{i+1}-u_i\geqslant\alpha$，所以

$$V(u_{K_1}, x_{u_{K_1}})\leqslant V(t_0, \varphi)-\sum_{k=1}^{K_1}\int_{u_i'}^{u_{i+1}'}W_3(|D(s,x_s)|)ds$$

$$-\sum_{i=1}^{K_1}\int_{t_i}^{T_i}W_3(|D(s,\ x_s)|)ds$$

$$\leqslant V(t_0,\ \varphi)-W_3(\gamma)\sum_{i=1}^{K_1}(u'_{i+1}-u_i)$$

$$-W_3(\gamma)\sum_{i=1}^{K_2}(T_i-t_i)$$

$$\leqslant V(t_0,\ \varphi)-K_1\alpha W_3(\gamma)-K_2\frac{W_3(\gamma)W_1(\delta/2d)}{2K}.$$

又$V(t_0,\ \varphi)\leqslant W_2(l\delta_0)+W_4(\delta_0)$和$\lambda$的定义，得

$$V(u_{K_1},\ x_{u_{K_1}})\leqslant W_2(l\delta_0)+W_4(\delta_0)-\lambda(K_0-1). \quad (23)$$

故由(21)和(23)知，$V(u_{K_0},\ x_{u_{K_0}})<0$，这与$V\geqslant 0$矛盾。

因为(22)不成立，故必有$t_{\bar{k}}=t_0+2\bar{k}\alpha$，使$\|x_{\bar{k}}\|<\delta$，所以，当$t\geqslant t_{\bar{k}}$时，有$\|x_t(t_0,\ \varphi)\|<\varepsilon$。当然$t\geqslant t_0+2K_0\alpha$时，更有$\|x_t(t_0,\ \varphi)\|<\varepsilon$。证毕。

文[119]还从另一角度出发，得到(7)的零解一致渐近稳定性定理而去掉f将$\boldsymbol{R}\times$(C中有界集)映为$\boldsymbol{R}^n$中有界集之限制。这里我们仅叙述其结论，有兴趣的读者可在[119]中找到详细证明。

定理 8 设$D(t,\ \varphi):\boldsymbol{R}\times C\to\boldsymbol{R}^n$为一致稳定，且关于$\varphi$线性，并且存在非减连续函数$u,\ v_i,\ w_i:\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}^+$，$v(0)=u(0)=0(i=1,2)$，且当$s>0$时，$u(s)>0,\ v_i(s)>0,\ w_i(s)>0\ i=1,2$。若存在连续泛函$V:\boldsymbol{R}^+\times C\to\boldsymbol{R}$满足

(i) $u(|D(t,\ \varphi)|)\leqslant V(t,\varphi)\leqslant v_1(|D(t,\varphi)|)+v_2(\|\varphi\|_{L_2})$，

其中，$\|\varphi\|_{L_2}=\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{-r}^{0}\varphi_i^2(\theta)d\theta\right)^{1/2}$，$\varphi_i(\theta)$为$\varphi(\theta)$的第$i$个分量；

(ii) $\dot{V}_{(7)}(t,\ \varphi)\leqslant-[W_1(|D(t,\ \varphi)|)+W_2(|\varphi(0)|)]$，

则系统(7)的零解一致渐近稳定。

文[228]采用[43]，[44]，[48]，[119]等文中的思想方法获得中立型泛函微分方程解的一致渐近稳定性更为广泛的结果。由于篇幅关系，这里不作介绍了，有兴趣的读者请参阅此文。

§2 有界滞量超中立型泛函微分方程的稳定性

前面叙述的研究泛函微分方程稳定性的李雅普诺夫方法，用到Razumikhin条件，因而涉及到P函数的求法，但就一般情形而言，P函数的求法是很困难的。本节介绍用李雅普诺夫函数研究超中立型泛函微分方程稳定性的非Razumikhin方法，这种方法避免了求P函数的困难。

考虑超中立型泛函微分方程

$$\dot{x}(t)=f\left[t,\ x_t,\ \dot{x}(t-r(t)),\ \int_{-r}^{-\tau}A(t,\theta)G(\dot{x}(t+\theta))\cdot d\theta\right].\tag{1}$$

其中$f:\boldsymbol{R}^+\times C_H\times\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$连续，($C_H=\{\varphi\in C;\ \|\varphi\|<H\}$)，$0<\tau\leqslant r(t)\leqslant r$，$A$为$n\times n$阶连续函数矩阵，$G:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$连续，$f(t,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv 0$并满足局部Lipschitz条件：

$$\begin{aligned}&|f(\cdots)|\\ &\leqslant k_1(\|x_t\|)+k_2(|\dot{x}(t-r(t))|)\\ &\quad+k_3\left(\int_{-r}^{-\tau}\|A(t,\ \theta)\|\alpha|\dot{x}(t+\theta)|d\theta\right).\end{aligned}\tag{2}$$

其中$\alpha\geqslant 0$为常数，k_1，k_2，k_3为正值连续不减函数，$k_i(0)=0$ ($i=1,\ 2,\ 3$)，且对任意$\rho>0$，当$\mu\to 0$时

$$k_3\left[\int_{-r}^{-\tau}\|A(t,\ \theta)\|\alpha(\rho+\mu)d\theta\right]-k_3\left[\int_{-r}^{-\tau}\|A(t,\theta)\|\alpha\rho d\theta\right]\to 0$$

关于$t\geqslant 0$一致成立。

方程(1)的初始函数为$\varphi\in C_H$，且当$-r\leqslant\theta\leqslant 0$时，$\dot{\varphi}(\theta)$或者连续或至多有有限个第一类间断点。对任意$t_0\in\boldsymbol{R}$，$\varphi\in C_H$，称$x\in C([t_0-r,\ \infty),\ \boldsymbol{R}^n)$为方程(1)过$(t_0,\ \varphi)$的解，若$x_{t_0}=\varphi$且当$t\geqslant t_0$时，$x(t)$满足(1)，记此解为$x(t;\ t_0,\ \varphi)$。

称方程(1)的零解稳定，若对任意$\varepsilon>0$，$t_0\geqslant 0$存在$\delta=\delta(t_0,\varepsilon)$，使对任意初始函数$\varphi$，当$\|\varphi\|<\delta(t_0,\ \varepsilon)$，$|\dot{\varphi}(\theta)|<\delta(t_0,\ \varepsilon)$，

$\theta\in[-r,\ 0]$时，$|x(t;\ t_0,\ \varphi)|<\varepsilon,\ t\geqslant t_0$。

若上述δ与t_0无关，则称方程(1)的零解一致稳定。

若方程(1)的零解稳定，且对任意$t_0\in\boldsymbol{R}^+$，存在$\delta(t_0)>0$，使当$|\varphi(\theta)|<\delta(t_0)$，$|\dot\varphi(\theta)|<\delta(t_0)$，$\theta\in[-r,\ 0]$时，有$\lim\limits_{t\to\infty}x(t;\ t_0,\ \varphi)=0$，则称方程(1)的零解渐近稳定。

对连续函数V：$\boldsymbol{R}^+\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^+$，定义

$$\dot V_{(1)}(t,\varphi(0))=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}[V(t+h,x(t+h;t,\varphi))-$$

$$-V(t,\ \varphi(0))].$$

本节总设下述条件成立

(I) 存在连续严格单增函数k：$\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}^+,k(0)=0,k(s)\geqslant s$，使当$z\leqslant k_1(\sigma)+k_2(z)+k_3(\int_{-r}^{-t}\|A(t,\ \theta)\|\alpha zd\theta)$时，$z\leqslant k(\sigma)$。

定理 1 设存在连续函数V：$\boldsymbol{R}^+\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ 及楔函数u，v，满足

(i) $u(|x|)\leqslant V(t,\ x)\leqslant v(|x|)$，

(ii) 对$t\geqslant T\geqslant t_0$，及任意连续函数$N$：$\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}^+$，当$V(s,x(s))\leqslant N(t)$，$|\dot x(s)|\leqslant k[u^{-1}(N(t))]$对$T-r\leqslant s\leqslant t$成立时，有

$$\dot V_{(1)}(t,\ x(t))\leqslant F(t,\ V(t),\ N(t)).$$

其中 $\quad F(t,\ V,\ V)\leqslant -W(V)+g(t)G(V).$

$W(s)$连续，当$s>0$时，$W(s)>0$；$g(t)\geqslant 0$，$\int_0^{+\infty}g(t)dt<+\infty$；$G(V)$连续，$\lim\limits_{b\to 0^+}\int_b^a\frac{dV}{G(V)}=+\infty$对$a>0$成立。

则方程(1)的零解一致稳定。

证 作方程

$$\dot y(t)=\bar g(t)G(y),\ \ \bar g(t)=g(t)+\frac{1}{1+t^2}.\tag{3}$$

对任定$\varepsilon>0$，$\varepsilon<\min\{H,\ k^{-1}(H)\}$，选择$\varepsilon_1>0$使$\varepsilon_1<\min\{\varepsilon,\ u(\varepsilon)\}$。由条件(ii)之假设知存在$y_0>0$，$y_0<\varepsilon_1$，使

$$\int_{y_0}^{\varepsilon_1}\frac{dy}{G(y)}=\bar{M}=\int_0^{+\infty}\bar{g}(t)dt.$$

设$y(t)$为(3)之解，$y(t_0)=y_0$，则

$$\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{G(y)}=\int_{t_0}^{t}\bar{g}(t)dt<\int_0^{+\infty}\bar{g}(t)dt=\bar{M}=\int_{y_0}^{\varepsilon_1}\frac{dy}{G(y)},\tag{4}$$

故当$t\geqslant t_0$时，有$0<y_0\leqslant y(t)\leqslant\varepsilon_1$。

取$\delta>0$，使$\delta<\min\{y_0,\ u^{-1}(y_0),\ k^{-1}(\varepsilon_1)\}$及$v(\delta)\leqslant y_0$。下面要证明当$|\varphi(\theta)|<\delta$，$|\dot{\varphi}(\theta)|<\delta$，$\theta\in[-r,\ 0]$时，对方程(1)之解$x(t)=x(t;\ t_0,\ \varphi)$，$V(t)=V(t,\ x(t))$满足

$$V(t)\leqslant y(t),\quad t\geqslant t_0.\tag{5}$$

因为$V(t_0)\leqslant v(|x(t_0)|)=v(|\varphi(0)|)\leqslant v(\delta)\leqslant y(t_0)$，若(5)不成立，则存在 $t_1>t_0$，使$V(t)\leqslant y(t)$，$t_0\leqslant t\leqslant t_1$，$V(t_1)=y(t_1)$及存在足够小的$\gamma>0$和数列$\bar{t}_i\in[t_1,t_1+\gamma]$，使

$$V(\bar{t}_i)>y(\bar{t}_i),\ 且\lim_{i\to\infty}\bar{t}_i=t_1.$$

由上极限概念知

$$\dot{V}(t_1)\geqslant\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_1}=\bar{g}(t_1)G(y(t_1))=\bar{g}(t_1)G(V(t_1)).\tag{6}$$

另一方面，当$t_0-r\leqslant s\leqslant t$时，$V(s)\leqslant V(t_1)$，即

$$|x(s)|\leqslant u^{-1}(V(s))\leqslant u^{-1}(V(t_1)).$$

而当$t_0-r\leqslant\eta\leqslant t_0$时，

$$|\dot{x}(\eta)|\leqslant\delta\leqslant u^{-1}(y_0)\leqslant u^{-1}(y(t_1))\leqslant u^{-1}(V(t_1))\leqslant k[u^{-1}(V(t_1))].$$

由 (2) 式 及 条件(I)即知：当 $t_0-r\leqslant s\leqslant t_1$时，$|\dot{x}(s)|\leqslant k[u^{-1}\cdot(V(t_1))]$。再由(ii)得

$$\dot{V}(t_1)\leqslant g(t_1)G(V(t_1))<\bar{g}(t_1)G(V(t_1)).$$

这与(6)矛盾，故(5)成立，于是当$t\geqslant t_0$时，

$$u(|x(t)|)\leqslant V(t)\leqslant y(t)<\varepsilon_1<u(\varepsilon),$$

故$|x(t)|<\varepsilon$，$t\geqslant t_0$。因$\delta<y_0$与t_0无关，故方程(1)的零解为一

致稳定。证毕。

定理 2　设定理 1 的所有条件满足，$g(t)\equiv 0$且

(iii) 存在常数$h>0$，使

$$|F(t,\ V,\ N_1)-F(t,\ V,\ N_2)|\leqslant h|N_1-N_2|,\quad t\geqslant 0,$$

$V\geqslant 0$，N_1，$N_2\geqslant 0$则(1)的零解渐近稳定

证　由定理1知(1)的零解为一致稳定，故只须证(1)的零解趋近于零。

设$\delta_0>0$于一致稳定性中给定，使当$|\varphi(\theta)|<\delta_0$，$|\dot\varphi(\theta)|<\delta_0$，$\theta\in[-r,\ 0]$时，$|x(t)|=|x(t,\ t_0,\ \varphi)|<1$，$t\geqslant t_0$。

记$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}V(t,\ x(t))=\bar\sigma$，$\underline{\lim\limits_{t\to\infty}}V(t,\ x(t))=\underline{\sigma}$，$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}|\dot x(t)|=\rho$。

对任给$\mu>0$，存在$T>t_0+r$，使当$t\geqslant T-r$时，

$$V(t,\ x(t))\leqslant\bar\sigma+\mu,\quad |\dot x(t)|\leqslant\rho+\mu.$$

又存在$T'>T$，T'可任意大，使$|\dot x(T')|\geqslant\rho-\mu$。因

$$\|x_{T'}\|\leqslant u^{-1}\Big(\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}V(T'+\theta)\Big)\leqslant u^{-1}(\bar\sigma+\mu)$$

从而
$$\rho-\mu\leqslant|\dot x(T')|\leqslant k_1(u^{-1}(\bar\sigma+\mu))+k_2(\rho+\mu)$$
$$+k_3\Big[\int_{-r}^{-\tau}\|A(T',\theta)\|\alpha(\rho+\mu)d\theta\Big],$$

即
$$-\mu\leqslant k_1(u^{-1}(\bar\sigma))+k_2(\rho)+k_3\Big[\int_{-r}^{-\tau}\|A(T',\theta)\|\alpha\rho d\theta\Big]$$
$$-\rho+\psi(\mu),$$

其中
$$\psi(\mu)=k_1[u^{-1}(\bar\sigma+\mu)]-k_1[u^{-1}(\bar\sigma)]+k_2(\rho+\mu)$$
$$-k_2(\rho)+k_3\Big[\int_{-r}^{-\tau}\|A(T',\theta)\|\alpha(\rho+\mu)d\theta\Big]$$
$$-k_3\Big[\int_{-r}^{-\tau}\|A(T',\theta)\|\alpha\rho d\theta\Big]$$
$$\to 0\ （当\mu\to 0时）。$$

故必有
$$0\leqslant k_1[u^{-1}(\bar\sigma)]+k_2(\rho)+k_3\Big[\int_{-r}^{-\tau}\|A(T',\theta)\|\alpha\rho d\theta\Big]-\rho.$$

由条件(I)得

$$\rho\leqslant k[u^{-1}(\bar\sigma)].\tag{7}$$

若$\bar\sigma>\underline{\sigma}$，则$V(t)$有无穷个不减区间，则存在$\gamma>0$及足够大的

$\overline{T}>T$，使$V(\overline{T}-\gamma)>\overline{\sigma}-\mu$且在（$\overline{T}-\gamma$，$\overline{T}$）上，$V(t)$为不减，因而$\dot{V}(t)\geqslant 0$及$V(t)\geqslant\overline{\sigma}-\mu$。因$\mu>0$，故

$$\psi(\overline{\sigma},\mu)\equiv k[u^{-1}(\overline{\sigma}+\mu)]-k[u^{-1}(\overline{\sigma})]>0.$$

令$\overline{\alpha}=\min\{\mu,\ \psi(\overline{\sigma},\mu)\}$，取$\overline{T}$足够大，使

$$|x(s)|\leqslant\rho+\overline{\alpha}\leqslant k[u^{-1}(\overline{\sigma})]+\psi(\overline{\sigma},\mu)=k[u^{-1}(\overline{\sigma}+\mu)], \tag{8}$$

对$s\geqslant\overline{T}-\gamma$成立。由条件(ii)知当$\overline{T}-\gamma\leqslant t\leqslant\overline{T}$时，

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)&\leqslant F(t,V(t),\overline{\sigma}+\mu)\\&\leqslant F(t,V(t),V(t))+[F(t,V(t),\sigma+\mu)\\&\quad-F(t,V(t),V(t))]\\&\leqslant -W(\overline{\sigma})+[W(\sigma)-W(V(t))]+2h\mu.\end{aligned}$$

（因$\overline{\sigma}-\mu\leqslant V(t)\overline{\sigma}+\mu$，及$|F(t,V(t),\overline{\sigma}+\mu)-F(t,V(t),V(t))|\leqslant h|\overline{\sigma}+\mu-V(t)|\leqslant 2h\mu$）。

因W，V均为连续，故当$\mu\to 0$时，$W(V(t))-W(\overline{\sigma})\to 0$。故存在$\mu$足够小，使

$$\dot{V}(t)\leqslant-\frac{1}{2}W(\overline{\sigma})<0,\qquad t\in(\overline{T}-\gamma,\overline{T}).$$

这与$V(t)$不减发生矛盾，故必须$\overline{\sigma}=\underline{\sigma}$。因此，对$\mu>0$，存在$\widetilde{T}>\overline{T}$，使

$$\overline{\sigma}-\mu\leqslant V(t)\leqslant\overline{\sigma}+\mu\quad 对\ t\geqslant\widetilde{T}成立.$$

再仿上面证法，若$\overline{\sigma}\neq 0$，则

$$\dot{V}(t)\leqslant-\frac{1}{2}W(\overline{\sigma})\quad 对 t\geqslant\widetilde{T}成立,$$

所以 $V(t)\leqslant V(\widetilde{T})-\dfrac{1}{2}W(\overline{\sigma})(t-\widetilde{T})\to-\infty$（$t\to\infty$时），

发生矛盾。故必须$\overline{\sigma}=0$。由此即得(1)的零解为渐近稳定，证毕。

定理3 设定理1的所有条件满足，且(iv) 存在绝对可积函数$h(t)$，使

$$|F(t,V,N_1)-F(t,V,N_2)|\leqslant h(t)|N_1-N_2|,\quad t\geqslant 0,$$

$V\geqslant 0$，N_1，$N_2\geqslant 0$。则(1)的零解为渐近稳定。

证 将定理2证明中(7)的前段保留，(7)式以后改写为：

因当$s\geqslant T-\gamma$时，$V(s)\leqslant\bar{\sigma}+\mu$。取$T$足够大，如(8)所证，有

$|\dot{x}(s)|\leqslant\rho+\bar{\alpha}\leqslant k[u^{-1}(\bar{\sigma}+\mu)]$，$s\geqslant T-\gamma$，

由条件(ii)及(iv)得当$t\geqslant T$时，

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)&\leqslant F(t,V(t),\bar{\sigma}+\mu)\\&\leqslant F(t,V(t),V(t))+|F(t,V(t),\bar{\sigma}+\mu)\\&\quad-F(t,V(t),V(t))|\\&\leqslant -W(V(t))+g(t)G(V(t))+h(t)|\bar{\sigma}+\mu-V(t)|,\end{aligned}$$

因(1)的零解稳定，故存在$M>0$，使$G(V(t))\leqslant M$。又可取$\mu<1$，则$|\bar{\sigma}+\mu-V(t)|\leqslant 2(\bar{\sigma}+1)$。

若$\bar{\sigma}>0$，则存在序列$t_n\to\infty$（$n\to\infty$时），使

$$V(t_n)\geqslant\bar{\alpha}\geqslant\frac{9}{10}\bar{\sigma}\quad n=1,2,\cdots,$$

从而 $v(|x(t_n)|)\geqslant V(t_n)\geqslant\bar{\alpha}$，

即 $|x(t_n)|\geqslant v^{-1}(\alpha)$，$n=1,2,\cdots$。

又因为当 $s\geqslant T$ 时，$|\dot{x}(s)|\leqslant k[u^{-1}(\bar{\sigma}+\mu)]\leqslant k[u^{-1}(2\bar{\sigma})]$，

故存在常数$r_0>0$，使在$[t_n,t_n+r_0]$上，$|x(t)|\geqslant\frac{1}{2}v^{-1}(\bar{\alpha})$。

从而当$t\in[t_n,\ t_n+r_0]$时，

$$V(t)\geqslant u(|x(t)|)\geqslant u\left(\frac{1}{2}v^{-1}(\bar{\alpha})\right).$$

又因为$V(t)\leqslant\bar{\sigma}+\mu\leqslant 2\bar{\sigma}$，$t\in[t_n,\ t_n+r_0]$，$n=1,2,\cdots$，从而由$W$之连续性知存在$p>0$，使

$$W(V(t))\geqslant p\quad t\in[t_n,t_n+r_0],\ n=1,2,\cdots.$$

所以，当$t\in[t_n,t_n+r_0]$时，

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)&\leqslant -W(V(t))+g(t)M+2(\bar{\sigma}+1)h(t)\\&\leqslant -p+g(t)M+2(\bar{\sigma}+1)h(t),\end{aligned}$$

则 $$V(t_n+r_0)\leqslant V(t_n)-pr_0+\int_{t_n}^{t_n+r_0}g(t)Mdt$$

$$+2(\bar{\sigma}+1)\int_{t_n}^{t_n+r_0}h(t)dt.$$

又 $\dot{V}(t)\leqslant g(t)M+2(\bar{\sigma}+1)h(t),\quad t\in[t_n+r_0,t_{n+1}],$

从而 $V(t_{n+1})\leqslant V(t_n+r_0)+\int_{t_n+r_0}^{t_{n+1}} g(t)Mdt$

$+2(\bar{\sigma}+1)\int_{t_n+r_0}^{t_{n+1}} h(t)]t,$

所以 $V(t_{n+1})\leqslant V(t_n)-pr_0+\int_{t_n}^{t_{n+1}}Mg(t)dt$

$+2(\bar{\sigma}+1)\int_{t_n}^{t_{n+1}}h(t)dt$

这说明 $V(t_n)\leqslant V(t_1)-npr_0+\int_{t_1}^{t_n}Mg(t)dt$

$+\int_{t_1}^{t_n}2(\bar{\sigma}+1)h(t)dt\to-\infty$ （当$n\to\infty$时）。

这与$V(t)\geqslant 0$矛盾，从而$\bar{\sigma}=0$，故(1)的零解渐近稳定。证毕

例1 考虑线性方程组

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)x(t-r(t))+C(t)\dot{x}(t-r(t)). \tag{9}$$

其中$A(t)$，$B(t)$，$C(t)$ 为于$t\geqslant 0$上的$n\times n$ 阶连续函数矩阵，$0<\tau\leqslant r(t)\leqslant r$，$\tau$，$r$为常数。

令 $A=\sup\limits_{t\geqslant 0}\|A(t)\|$，$B=\sup\limits_{t\geqslant 0}\|B(t)\|$，$C=\sup\limits_{t\geqslant 0}\|C(t)\|$。设$A$，$B$均为正常数，$0<C<1$。

设$k_1(s)=(A+B)s$，$k_2(s)=Cs$，$k(s)=\dfrac{A+B}{1-C}s=ks$，则

$$|A(t)x(t)+B(t)x(t-r(t))+C(t)\dot{x}(t-r(t))|$$
$$\leqslant k_1(\|x_t\|)+k_2(|\dot{x}(t-r(t))|),$$

且当$z\leqslant k_1(\sigma)+k_2(z)$时，$z\leqslant\dfrac{A+B}{1-C}\sigma=k(\sigma)$，故条件(I)成立。

设 $V(x)$：$R^n\to R^+$连续，且满足

$$a|x|^2\leqslant V(x)\leqslant b|x|^2. \tag{10}$$

a，b为正常数，又设$\dfrac{\partial V}{\partial x}$存在且

$$\left|\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T\right| \leqslant \lambda |x|. \tag{11}$$

其中λ为正常数。

则$V(x)$沿(9)的全导数为

$$\left.\frac{dV(x(t))}{dt}\right|_{(9)} = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T [A(t)x(t)$$

$$+B(t)x(t-r(t)) + C(t)\dot{x}(t-r(t))]. \tag{12}$$

又设 $$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T A(t)x \leqslant -lV(x), \tag{13}$$

$l>0$为常数。

设$x(t)$为(9)之解，对任给$N(t)>0$，当

$$V(x(s)) \leqslant N(t), \quad |\dot{x}(s)| \leqslant k\left(\sqrt{\frac{N(t)}{a}}\right) \quad 对 t-r \leqslant s \leqslant t$$

成立时，有

$$\left.\frac{dV(x(t))}{dt}\right|_{(9)} \leqslant -lV(x(t))$$

$$+\lambda\sqrt{\frac{N(t)}{a}}[B|x(t-r(t))| + C|\dot{x}(t-r(t))|]$$

$$\leqslant -lV(x(t)) + \lambda\sqrt{\frac{N(t)}{a}}\left[B\sqrt{\frac{N(t)}{a}} + Ck\sqrt{\frac{N(t)}{a}}\right]$$

$$\equiv F(V,N)$$

假设 $$-l + \frac{\lambda}{a}(B+Ck) < 0, \tag{14}$$

则 $$F(V,V) = \left[-l + \frac{\lambda}{a}(B+kC)\right]V < 0, \quad 当 V>0 时。$$

又 $$|F(V,N_1) - F(V,N_2)|$$

$$\leqslant \frac{\lambda}{a}(B+Ck)|N_1 - N_2|,$$

故定理2之所有条件成立，因而有

定理4 若条件(10)，(11)，(13)，(14)成立，则方程(9)的零解为渐近稳定。

作为上述定理的另一个应用，我们考虑具有时滞控制系统的渐近稳定性问题。

考虑时滞控制系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+bf(\sigma(t-\tau)). \tag{15}$$

其中$\sigma(t)=c^Tx(t)$，$\tau>0$为常数，A为$n\times n$阶常矩阵，其特征根的实部全为负，b，c均为n级常向量，$f(\sigma)$连续，$f(0)=0$且$f(\sigma)\sigma>0$当$\sigma\neq 0$时。

引理1 若$c^Tb\neq 0$，则存在非奇异n阶正方阵K，使

$$b=-kk^Tc. \tag{16}$$

证明请参阅[123]。

记$\bar{A}=k^{-1}Ak$，$\bar{b}=k^{-1}b$，$\bar{c}=k^Tc$，$\bar{c}^T=c^Tk$，

$\bar{b}=K^{-1}b=K^{-1}(-KK^Tc)=-K^Tc=-\bar{c}$.

作变换$x=ky$，则(15)变为

$$\frac{dy}{dt}=\bar{A}y+\bar{b}f(\sigma(t-\tau)) \tag{17}$$

$$\sigma(t-\tau)=c^Tx(t-\tau)=c^TKy(t-\tau)=\bar{c}^Ty(t-\tau).$$

定理5 假设

(i) $c^Tb<0$，$\sigma f(\sigma)\leqslant k\sigma^2$，$k>0$，

(ii) 存在$l>0$，使$y^T(\bar{A}^T+\bar{A})y\leqslant -ly^Ty$，

(iii) $0<\tau<l/2k\|\bar{c}\|^2[\|\bar{A}\|+|\bar{c}^T\bar{b}|k]$.

则方程(15)的零解为渐近稳定。

证 因方程(15)与(17)的稳定性等价，故只须证明方程(17)的零解为渐近稳定。

取$V(y)=y^Ty$，则

$$\left.\frac{dV(y)}{dt}\right|_{(17)}=y^T(\bar{A}^T+\bar{A})y$$

$$+(\bar{b}^Ty+y^T\bar{b})f(\sigma(t-\tau))$$

$$=y^T(\bar{A}^T-\bar{A})y+2\bar{b}^Tyf(\sigma(t-\tau))$$

$$\leqslant -ly^Ty-2\bar{c}^Tyf(\sigma(t-\tau)).$$

因为 $\bar{c}^Ty(t-\tau)=\bar{c}^Ty(t)-\tau\bar{c}^T\dot{y}(\xi)$

$$=\bar{c}^T y(t)-\tau\bar{c}^T[\bar{A}y(\xi)+\bar{b}f(\sigma(\xi-\tau))],\quad t\geqslant t_0.$$

其中$t-\tau\leqslant\xi<t$时，在此我们假定$y(t)=y(t_0-\tau)$，当$t_0-2\tau\leqslant t\leqslant t_0-\tau$时，$\dot{y}(\xi)=0$。

当$\sigma(t-\tau)\neq 0$时，有

$$\begin{aligned}
&-2\bar{c}^T y(t)f(\sigma(t-\tau))\\
&=-2\bar{c}^T y(t)\bar{c}^T y(t-\tau)\frac{f(\sigma(t-\tau))}{\sigma(t-\tau)}\\
&=-2(\bar{c}^T y(t))^2\frac{f(\sigma(t-\tau))}{\sigma(t-\tau)}\\
&\quad+2\tau\bar{c}^T y(t)[\bar{c}^T\bar{A}y(\xi)+\bar{c}^T\bar{b}f(\sigma(\xi-\tau))]\cdot\frac{f(\sigma(t-\tau))}{\sigma(t-\tau)}.
\end{aligned}$$

因$\sigma f(\sigma)\leqslant k\sigma^2$，故$|\sigma f(\sigma)|\leqslant k|\sigma|^2$，$|f(\sigma)|\leqslant k|\sigma|$。

定义 $$\psi(t)=\begin{cases}\dfrac{f(\sigma(t))}{\sigma(t)}, & \text{当}\sigma(t)\neq 0\text{时}, \\ 0\quad, & \text{当}\sigma(t)=0\text{时}。\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&-2\bar{c}^T y(t)f(\sigma(t-\tau))\\
&=-2\bar{c}^T y(t)\bar{c}^T y(t-\tau)\psi(t-\tau)\\
&=-2\bar{c}^T y(t)[\bar{c}^T y(t)\psi(t-\tau)-\tau\bar{c}^T(\bar{A}y(\xi)\\
&\quad+\bar{b}f(\sigma(\xi-\tau)))\psi(t-\tau)]\\
&=-2(\bar{c}^T y(t))^2\psi(t-\tau)+2\tau\bar{c}Ty(t)[\bar{c}^T\bar{A}y(\xi)\\
&\quad+\bar{c}^T\bar{b}f(\sigma(\xi-\tau))]\psi(t-\tau)\\
&\leqslant-2(\bar{c}^T y(t))^2\psi(t-\tau)+2\tau|\bar{c}^T y(t)|[\|\bar{c}^T\|\cdot\|\bar{A}\|\cdot\|y(\xi)\|\\
&\quad+|\bar{c}^T\bar{b}|\cdot|f(\sigma(\xi-\tau))|]\psi(t-\tau)\\
&\leqslant-2(\bar{c}^T y(t))^2\psi(t-\tau)+2\tau\|\bar{c}^T\|\cdot\|y(t)\|[\|\bar{c}^T\|\cdot\|\bar{A}\|\\
&\quad\cdot\|y(\xi)\|+|\bar{c}^T\bar{b}|\cdot k|\sigma(\xi-\tau)|]\psi(t-\tau),
\end{aligned}$$

而 $$|\sigma(\xi-\tau)|\leqslant\|\bar{c}\|\cdot\|y(\xi-\tau)\|,$$

∴ $$\begin{aligned}
&-2\bar{c}^T y(t)f(\sigma(t-\tau))\\
&\leqslant-2(\bar{c}^T y(t))^2\psi(t-\tau)\\
&\quad+2\tau\|\bar{c}\|\cdot\|y(t)\|[\|\bar{c}\|\cdot\|\bar{A}\|\cdot\|y(\xi)\|+|\bar{c}^T\bar{b}|\cdot k\|\bar{c}\|\\
&\quad\cdot\|y(\xi-\tau)\|]\psi(t-\tau)\frac{dV(y(t))}{dt}\Big|_{(17)}
\end{aligned}$$

$$\leqslant -ly^T(t)y(t)-2(\bar{c}^Ty(t))^2\psi(t-\tau)$$
$$+2\tau\|\bar{c}\|\cdot\|y(t)\|[\|\bar{c}\|\cdot\|\bar{A}\|\cdot\|y(\xi)\|+|\bar{c}^T\bar{b}|\cdot k\|\bar{c}\|$$
$$\cdot\|y(\xi-\tau)\|]\psi(t-\tau)_{\circ}$$

故当 $\|y(t-\tau)\|, \|y(\xi-\tau)\|\leqslant\|y(t)\|$时，有

$$\left.\frac{dV(y(t))}{dt}\right|_{(17)}$$
$$\leqslant -ly^T(t)y(t)+2\tau\|\bar{c}\|^2[\|\bar{A}\|\cdot\|y(t)\|^2$$
$$+|\bar{c}^T\bar{b}|k\|y(t)\|^2]\psi(t-\tau)$$
$$\leqslant\|y(t)\|^2[-l+2\tau k\|\bar{c}\|^2(\|\bar{A}\|+|\bar{c}^T\bar{b}|k)]_{\circ}$$

因为 $\tau<\dfrac{l}{2k\|\bar{c}\|^2(\|\bar{A}\|+|\bar{c}^T\bar{b}|k)}$，故由定理 2 知系统的零解渐近稳定。证毕。

文[122]还得到下述结论

定理6 假设$Abc^T=bc^TA, \sigma f(\sigma)\leqslant k\sigma^2$，$k$为正常数，$c^Te^{-A\tau}b<0$，且$\tau\leqslant\dfrac{1}{|c^Te^{-A\tau}b|k}$，则方程(15)的零解渐近稳定。

证明参阅[122]。

§3 无穷延滞中立型泛函微分方程的稳定性

本节将在某类衰退记忆假设下，建立具有无穷滞量超中立型泛函微分方程的稳定性定理。

设 $C=\{\varphi:(-\infty,0]\to\mathbf{R}^n,\ \varphi$ 有界连续$\}$，$C^1=\{\varphi\in C;\ \dot{\varphi}$存在、连续或至多有有限个第一类间断点$\}$。对 $\varphi\in C$，定义 $\|\varphi\|=\sup\limits_{s\leqslant0}|\varphi(s)|$，而对$H\geqslant0$，定义$C_H=\{\varphi\in C;\ \|\varphi\|\leqslant H\}$，$C_H^1=\{\varphi\in C_H\cap C^1;\ |\dot{\varphi}(\theta+0)|\leqslant H,\ |\dot{\varphi}(\theta-0)|\leqslant H,\ \theta\leqslant0\}$。若$x:(-\infty,\sigma)\to\mathbf{R}^n$连续且$\dot{x}$至多有有限个第一类断点，则对$t\in(-\infty,\sigma)$，定义$x_t$，$\dot{x}_t:(-\infty,0]\to\mathbf{R}^n$为$x_t(\theta)=x(t+\theta)$，$\dot{x}_t(\theta)=\dot{x}(t+\theta+0)$，$\theta\leqslant0$。

在C^1上考虑中立型泛函微分方程

$$x(t)=f(t,x_t,\dot{x}_t),\quad t\geqslant t_0. \tag{1}$$

其中$x\in\mathbf{R}^n$，$\dot{x}$表右导数，f为连续映射并保证方程(1)过$(t_0,\varphi)\in \mathbf{R}\times C^1$的解$x(t;t_0,\varphi)$存在、唯一。$f(t,0,0)\equiv 0$。

定义1 称方程(1)的零解稳定，若对任意$t_0\geqslant 0$，$\varepsilon>0$，存在$\delta=\delta(t_0,\varepsilon)>0$，使当$\varphi\in C^1_\delta$，$t\geqslant t_0$时，$|x(t;t_0,\varphi)|<\varepsilon$。

若δ与t_0无关，则称(1)的零解一致稳定。

若(1)的零解稳定，且存在$\delta(t_0)>0$，使当$\varphi\in C^1_{\delta(t_0)}$时，有$\lim\limits_{t\to\infty}x(t;t_0,\varphi)=0$，则称(1)的零解渐近稳定。

本节总假设f满足下述条件

(I) 存在非负连续不减函数k_1，k_2，$k_1(0)=k_2(0)=0$，使
$|f(t,x_t,\dot{x}_t)|\leqslant k_1(\|x_t\|)+k_2(\|\dot{x}_t\|)$

(II) 存在连续严格单增函数$k:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$，$k(s)>0$ ($s>0$时)，满足：若$z\leqslant k_1(\sigma)+k_2(z)$，则$z\leqslant k(\sigma)$。

定理1 假设存在连续函数V：$\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^+$，$W_1:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$及楔函数$u$，$w$，使

(i) $u(|x|)\leqslant V(t,x)\leqslant w(|x|)$，

(ii) 当$V(s,x(s))\leqslant V(t,x(t))$，$|\dot{x}(s)|\leqslant k[u^{-1}(V(t,x(t))]$对$s\leqslant t$成立时，有
$$\dot{V}_{(1)}(t,x(t))\leqslant W_1(t,V(t,x(t)). \tag{2}$$

(iii) 方程
$$\dot{y}(t)=W_1(t,y(t)) \tag{3}$$
的零解一致稳定。

则(1)的零解一致稳定。

证 因方程(3)的零解一致稳定，故对任意$\varepsilon>0$，存在$y_0(\varepsilon)>0$，使对任意$t_0\geqslant 0$，方程(3)过$(t_0,y_0(\varepsilon))$的右行最大解$y(t)=y(t;t_0,y_0(\varepsilon))<u(\varepsilon)$，$t\geqslant t_0$。

取$\delta(\varepsilon)>0$，使$W(\delta)<y_0(\varepsilon)$且$\delta<k[u^{-1}(y_0(\varepsilon))]$。

下面证明当$\varphi\in C^1_\delta$，$t\geqslant t_0$时
$$V(t,x(t;t_0,\varphi))\leqslant y(t),$$
记$x(t)=x(t;t_0,\varphi)$，$V(t)=V(t,x(t))$，$y_m(t)$为下述初始问题

之解

$$\begin{cases} \dot{y}_m(t) = W_1(t, y_m(t)) + \frac{1}{m}, & t \geq t_0. \\ y_m(t_0) = y_0(\varepsilon). \end{cases}$$

则$y(t) = \lim\limits_{m\to\infty} y_m(t)$。故只须证$V(t) \leq y_m(t)$对$t \geq t_0$及$m = 1, 2, \cdots$成立。

如若不然，则存在正整数m及实数 $t_1 > t_0$，使当 $t_0 \leq s < t_1$时，$V(s) \leq y_m(s)$，$V(t_1) = y_m(t_1)$且存在序列$T_k > t_1$，$T_k \to t_1$($k \to \infty$时)，满足

$$V(T_k) > y_m(T_k), \quad k = 1, 2, \cdots.$$

从而

$$\begin{aligned} \dot{V}(t_1) &\geq \dot{y}_m(t_1) \\ &= W_1(t_1, y_m(t_1)) + \frac{1}{m} \\ &= W_1(t_1, V(t_1)) + \frac{1}{m}. \end{aligned} \tag{4}$$

显然，当$s \leq t_0$时，

$$|\dot{x}(s)| \leq \delta < k[u^{-1}(y_0(s))] \leq k[u^{-1}(V(t_1))],$$

$$V(s) \leq W(|x(s)|) \leq W(\|\varphi\|) \leq W(\delta) < y_0(\varepsilon) < y_m(t_1) = V(t_1),$$

而当$t_0 \leq s \leq t_1$时，

$$V(s) \leq y_m(s) \leq y_m(t_1) = V(t_1).$$

若存在$t \in [t_0, t_1]$，使$|\dot{x}(t)| = \sup\limits_{s \leq t} |\dot{x}(s)|$，则由

$$\begin{aligned} |\dot{x}(t)| &\leq k_1(\|x_t\|) + k_2(\|\dot{x}_t\|) \\ &\leq k_1[u^{-1}(V(t_1))] + k_2(|\dot{x}(t)|) \end{aligned}$$

及(II)，得 $|\dot{x}(t)| \leq k[u^{-1}(V(t_1))]$。

总之，当$s \leq t_1$时，$|\dot{x}(s)| \leq k[u^{-1}(V(t_1)]$，从而由(ii)得

$$\dot{V}(t_1) \leq W_1(t_1, y_m(t_1)).$$

这与(4)矛盾。所以$V(t) \leq y_m(t)$，$t \geq t_0$，$m = 1, 2 \cdots$，故当 $t \geq t_0$时，$V(t) \leq y(t) < u(\varepsilon)$，即$|x(t; t_0, \varphi)| < \varepsilon$，所以，(1)的零解一致稳定。证毕。

为讨论(1)零解的渐近稳定性，我们对f作如下衰退记忆假设：

(Ⅲ) 存在函数p：$\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$ 及函数 F：$\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$，满足：

(i) $p(t)\leqslant t$，$\lim\limits_{t\to\infty}p(t)=\infty$，

(ii) 对任意 $M>0$，$\lim\limits_{t\to\infty}F(t,x,y)=0$对$0\leqslant x$，$y\leqslant M$一致成立，

(iii) $$|f(t,x_t,\dot{x}_t)|\leqslant k_1(\sup_{p(t)\leqslant s\leqslant t}|x(s)|)+k_2(\sup_{p(t)\leqslant s\leqslant t}|\dot{x}(s)|)$$
$$+F(t,\|x_t\|,\|\dot{x}_t\|),$$

其中k_1，k_2如(I)所定义。

定理2 设条件 (I)，(II)，(III) 成立，且存在连续函数V：$\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^+$，楔函数$u$，$v$，使

(i) $u(|x|)\leqslant V(t,x)\leqslant V(|x|)$，

(ii) 对任意连续函数N：$R^+\to R^+$，当

$V(s,x(s))\leqslant N(t)$，$|\dot{x}(s)|\leqslant k[u^{-1}(N(t))]$对$s\in[p(t),t]$成立时，有

$$\dot{V}_{(1)}(t,x(t))\leqslant F(t,V(t,x(t)),N(t)).$$

其中F满足：

(a) $F(t,V,V)\leqslant -W_2(V)+g_1(t)G(V)+g_2(t)Q(V)$，$t\geqslant 0$，$V\geqslant 0$，$W_2$连续，$s>0$时，$W_2(s)>0$；$Q(V)$，$G(V)$非负连续；$g_1(t)\geqslant 0$，$\int_0^\infty g_1(t)dt<+\infty$；$g_2(t)\geqslant 0$，$\lim\limits_{t\to\infty}g_2(t)=0$，

(b) $|F(t,V,N_1)-F(t,V,N_2)|\leqslant[h_1(t)+h_2]|N_1-N_2|$，$t$，$V$，$N_1$，$N_2\geqslant 0$，其中$h_1(t)\geqslant 0$，$\int_0^{\infty}h_1(t)dt<+\infty$，$h_2$为非负常数，

(iii) 方程(1)的零解稳定。

则方程(1)的零解渐近稳定。

证 因为 (1) 的零解稳定，存在 $\delta=\delta(t_0)$，使当 $t_0\geqslant 0$，$\varphi\in C^1_{\delta(t_0)}$时，$|x(t)|=|x(t;t_0,\varphi)|\leqslant 1$。从而由(II)知

$$|\dot{x}(t)|\leqslant\max\{\delta,\ k(1)\}.$$

记$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} V(t,x(t))=\bar{\sigma}$，$\underline{\lim\limits_{t\to\infty}} V(t,x(t))=\underline{\sigma}$，$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}|\dot{x}(t)|=\rho$。

对任意$\mu>0$，存在α：$0<\alpha<\mu$，使

$$\alpha+k[u^{-1}(\bar{\sigma})]\leqslant k[u^{-1}(\bar{\sigma}+\mu)]。$$

取$T\geqslant t_0$，使当$t\geqslant T$时，有

$$V(t,x(t))\leqslant\bar{\sigma}+\mu,$$

$$|\dot{x}(t)|\leqslant\rho+\alpha\leqslant\rho+\mu。$$

从而当$t\geqslant T$时，$|x(t)|\leqslant u^{-1}(\bar{\sigma}+\mu)$。

因$\lim\limits_{t\to\infty}p(t)=\infty$，故存在$T_1\geqslant T$，使当 $t\geqslant T_1$时，$p(t)\geqslant T$。从而当$t\geqslant T_1$时，有

$$\sup_{p(t)\leqslant s\leqslant t}|x(s)|\leqslant u^{-1}(\bar{\sigma}+\mu),$$

$$\sup_{p(t)\leqslant s\leqslant t}|\dot{x}(s)|\leqslant\rho+\alpha。$$

又由$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}|\dot{x}(t)|=\rho$知存在序列$T_n\geqslant T_1$，$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\infty$，使

$$|\dot{x}(T_n)|\geqslant\rho-\mu。$$

所以，由(III)得

$$\rho-\mu\leqslant|\dot{x}(T_n)|\leqslant k_1[u^{-1}(\bar{\sigma}+\mu)]+k_2[\rho+\mu]$$
$$+F(T_n,\ \|x_{T_n}\|,\ \|\dot{x}_{T_n}\|)。$$

在上式中令$\mu\to0$，$n\to\infty$，则得

$$\rho\leqslant k_1[u^{-1}(\bar{\sigma})]+k_2(\rho)。$$

从而由(II)得

$$\rho\leqslant k[u^{-1}(\bar{\sigma})]。$$

所以，当$t\geqslant T_1$，$s\geqslant p(t)$时

$$V(s,x(s))\leqslant\bar{\sigma}+\mu,$$

$$|\dot{x}(s)|\leqslant\rho+\alpha\leqslant k[u^{-1}(\bar{\sigma})]+\alpha\leqslant k[u^{-1}(\bar{\sigma}+\mu)]。$$

由(ii)知当$t\geqslant T_1$时，有

$$\dot{V}(t)\leqslant F(t,V(t),\bar{\sigma}+\mu)$$
$$\leqslant F(t,V(t),V(t))+|F(t,V(t),\bar{\sigma}+\mu)$$
$$-F(t,V,V)|$$

$$\leqslant -W_2(V(t))+g_1(t)G(V(t))+g_2(t)Q(V(t))$$
$$+[h_1(t)+h_2]|\bar{\sigma}+\mu-V(t)|.$$

若$\bar{\sigma}>\underline{\sigma}$，则存在$K_n\to\infty$及$V_n\to\infty$，使

$$V(K_n)=\bar{\sigma}-\mu,\ V(K_n+V_n)=\bar{\sigma}-\frac{\mu}{2},$$

$$\bar{\sigma}-\mu\leqslant V(t)\leqslant\bar{\sigma}-\frac{\mu}{2},\ K_n\leqslant t\leqslant K_n+V_n.$$

取μ充分小，n充分大使当$t\in[K_n,K_n+V_n]$时，

$$\inf_{\bar{\sigma}-\mu\leqslant s\leqslant\bar{\sigma}-\mu/2}W_2(s)-2h_2\mu-g_2(t)\sup_{\bar{\sigma}-\mu\leqslant s\leqslant\bar{\sigma}-\mu/2}Q(V)\geqslant 0.$$

从而，当$t\in[K_n,K_n+V_n]$时，有

$$\dot{V}(t)\leqslant g_1(t)G(V(t))+h_1(t)|\bar{\sigma}+\mu-V(t)|$$
$$\leqslant g_1(t)M+2\mu h_1(K).$$

其中$G(V(t))\leqslant\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant V(1)}G(s)=M$。由此即得

$$V(_n+VK_n)\leqslant V(K_n)+M\int_{K_n}^{K_n+V_n}g_1(s)ds$$

$$+2\mu\int_{K_n}^{K_n+V_n}h_1(s)ds,$$

即
$$\frac{\mu}{2}\leqslant M\int_{K_n}^{K_n+V_n}g_1(s)ds+2\mu\int_{K_n}^{K_n+V_n}h_1(s)ds. \tag{5}$$

但g_1，$h_1\in L^1[0,\ \infty)$，故

$$\lim_{n\to\infty}\int_{K_n}^{K_n+V_n}g_1(s)ds=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{K_n}^{K_n+V_n}h_1(s)ds=0.$$

在(5)中令$n\to\infty$，得$\mu\leqslant 0$。矛盾。

从而$\bar{\sigma}=\underline{\sigma}$，记$\sigma=\bar{\sigma}=\underline{\sigma}$.

若$\sigma\neq 0$，则存在$T_2>T_1$，$\mu>0$，使当$t\geqslant T_2$时，

$$0<\sigma-\mu\leqslant V(t)\leqslant\sigma+\mu.$$

$$\inf_{\sigma-\mu\leqslant s\leqslant\sigma+\mu}W_2(s)-[2h_2\mu+g_2(t)\sup_{\sigma-\mu\leqslant V\leqslant\sigma+\mu}Q(V)]$$

$$\geqslant \frac{1}{2} W_2(\sigma).$$

从而，当$t \geqslant T_2$时，有

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) \leqslant & -W_2(V(t)) + g_1(t)G(V(t)) + g_2(t)Q(V(t)) \\ & + (h_1(t) + h_2)|\sigma + \mu - V(t)| \\ \leqslant & -W_2(V(t)) + 2h_2\mu + g_2(t)Q(V(t)) \\ & + g_1(t)G(V(t)) + 2h_1(t)\mu \\ = & -\frac{1}{2}W_2(\sigma) + g_1(t)M + 2\mu h_1(t).\end{aligned}$$

所以对$T_3 \geqslant T_2$，$t \geqslant T_3$，有

$$V(t) \leqslant V(T_3) - \frac{1}{2}W_2(\sigma)(t - T_3)$$

$$+ M\int_{T_3}^{t} g_1(s)ds + 2\mu\int_{T_3}^{t} h_1(s)ds.$$

再次利用g_1，$h_1 \in L^1[0,\infty)$，知当T_3充分大，$t - T_3$充分大时，$V(t) < 0$矛盾。

从而$\sigma = 0$，再由(i)得$\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$，即(1)的零解渐近稳定。证毕。

作为上述定理的应用，我们讨论下述中立型积分微分方程零解的稳定性。

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = & Ax(t) + B_1x(p_1(t)) + B_2\dot{x}(p_2(t)) \\ & + \int_{-\infty}^{t} C_1(t-s)x(s)ds + \int_{-\infty}^{t} C_2(t-s)\dot{x}(s)ds. \qquad (6)\end{aligned}$$

其中A，B_1，B_2为$n \times n$阶常数矩阵。$p(t) \leqslant p_1(t)$，$p_2(t) \leqslant t$，$\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = \infty$，$C_1$，$C_2$为定义于$[0, +\infty)$上的$n \times n$阶连续矩阵，$\int_0^{+\infty} \|C_i(t)\| dt < +\infty \ (i = 1, 2)$。

设A为稳定阵，则存在正定阵B及正常数λ_1，λ_2，使

$$\begin{cases} A^TB + BA = -I, \\ \lambda_1|x|^2 \leqslant x^TBx \leqslant \lambda_2|x|^2. \end{cases}$$

定理3　假设

(i) $\lim\limits_{t\to\infty}[t-p(t)]=+\infty$,

(ii) $\|B_2\|+\int_0^{+\infty}\|C_2(t)\|dt<1$,

(iii) $1-2\|B\|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\Big[\|B_1\|+K\|B_2\|+\int_0^{+\infty}\|C_1(u)\|du$

$+K\int_0^{+\infty}\|C_2(u)\|du\Big]>0$,

其中 $=K\dfrac{\|A\|+\|B_1\|+\int_0^{+\infty}\|C_1(u)\|du}{1-\Big[\|B_2\|+\int_0^{+\infty}\|C_2(u)\|du\Big]}$。

则(6)的零解渐近稳定。

证 令

$$k_1(\sigma)=\Big[\|A\|+\int_0^{+\infty}\|C_1(u)\|du+\|B_1\|\Big]\sigma,$$

$$k_2(\sigma)=\Big[\|B_2\|+\int_0^{+\infty}\|C_2(u)\|du\Big]\sigma,$$

$$k(\sigma)=K\sigma.$$

则
$$\Big|Ax(t)+B_1x(p_1(t))+B_2\dot{x}(p_2(t))$$
$$+\int_{-\infty}^{t}C_1(t-s)x(s)ds+\int_{-\infty}^{t}C_2(t-s)x(s)ds\Big|$$
$$\leqslant k_1(\|x_t\|)+k_2(\|\dot{x}_t\|),$$

故(*I*)成立。

显然，若(ii)成立，$\sigma\leqslant k_1(z)+k_2(\sigma)$，则 $\sigma\leqslant k(z)$，从而(*II*)成立。

记 $q_i(t)=\int_{t-p(t)}^{\infty}\|C_i(u)\|du\quad(i=1,2)$，则 (i)说明 $\lim\limits_{t\to\infty}q_i(t)=0$。$(i=1,2)$。

$$\Big|Ax(t)+B_1x(p_1(t))+B_2\dot{x}(p_2(t))$$
$$+\int_{-\infty}^{t}C_1(t-s)x(s)ds+\int_{-\infty}^{t}C_2(t-s)\dot{x}(s)ds\Big|$$

$$\leqslant\left[\|A\|+\|B_1\|+\int_0^{t-p(t)}\|C_1(u)\|du\right]\sup_{p(t)\leqslant s\leqslant t}|x(s)|$$

$$+\left[\|B_2\|+\int_0^{t-p(t)}\|C_2(u)\|du\right]\sup_{p(t)\leqslant s\leqslant t}|\dot{x}(s)|$$

$$+\int_{t-p(t)}^{\infty}\|C_1(u)\|du\|x_t\|+\int_{t-p(t)}^{\infty}\|C_2(u)\|du\|\dot{x}_t\|$$

$$\leqslant k_1(\sup_{p(t)\leqslant s\leqslant t}|x(s)|)+k_2(\sup_{p(t)\leqslant s\leqslant t}|\dot{x}(s)|)$$

$$+q_1(t)\|x_t\|+q_2(t)\|\dot{x}_t\|.$$

故(III)成立。

作 $V(x)=x^TBx$, $u(|x|)=\lambda_1|x|^2$, $V(|x|)=\lambda_2|x|^2$, 则

$$\dot{V}_{(6)}(x(t))$$

$$=x^T(t)[A^TB+BA]x(t)$$

$$+2x^T(t)B[B_1x(p_1(t))+B_2\dot{x}(p_2(t))$$

$$+\int_{-\infty}^{t}C_1(t-s)x(s)ds+\int_{-\infty}^{t}C_2(t-s)\dot{x}(s)ds\Big]$$

$$\leqslant -x^T(t)x(t)+2\|B\|[|x^T(t)|\|B_1\||x(p_1(t))|$$

$$+|x^T(t)|\|B_2\||\dot{x}(p_2(t))|$$

$$+|x^T(t)|\int_{-\infty}^{t}\|C_1(t-s)\||x(s)|ds$$

$$+|x^T(t)|\int_{-\infty}^{t}\|C_2(t-s)\||\dot{x}(s)|ds\Big].$$

若当 $s\leqslant t$ 时, $V(x(s))\leqslant V(x(t))$, $|\dot{x}(s)|\leqslant K\sqrt{\frac{V(x(t))}{\lambda_1}}$, 则

$$|x(s)|\leqslant\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}|x(t)|,\quad |\dot{x}(s)|\leqslant K\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}|x(t)|.$$

因而 $\dot{V}_{(6)}(t,x)$

$$\leqslant-\Big[1-2\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\|B\|(\|B_1\|+k\|B_2\|+\int_0^{+\infty}\|C_1(u)\|du$$

$$+K\int_0^{+\infty}\|C_2(u)\|du\Big]|x|^2\leqslant 0.$$

故由定理1知(6) 的零解一致稳定。

若当 $p(t)\leqslant s\leqslant t$ 时, $V(x(s))\leqslant N(t)$, $|\dot{x}(s)|\leqslant k\Big(\sqrt{\frac{N(t)}{\lambda_1}}\Big)$

则 $\quad |\dot{x}(s)|\leqslant K\sqrt{\dfrac{N(t)}{\lambda_1}},\quad |x(s)|\leqslant\sqrt{\dfrac{N(t)}{\lambda_1}}$。

从而$\dot{V}_{(6)}(x(t))$

$$\leqslant\frac{-V}{\lambda_2}+\frac{2\|B\|}{\lambda_1}\Big(\|B_1\|N+K\|B_2\|N+\int_0^{+\infty}\|C_1(u)\|duN$$

$$+KN\int_0^{+\infty}\|C_2(u)\|du\Big)$$

$$+2\|B\|\int_{t-\rho(t)}^{+\infty}[\|C_1(u)\|+\|C_2(u)\|]duM.$$

其中由稳定性知存在常数M，使

$$|x(t)|^2\leqslant M,\quad |\dot{x}(t)|^2\leqslant M.$$

设 $\quad F(t,V,N)=\dfrac{-V}{\lambda_2}+\dfrac{2\|B\|N}{\lambda_1}\Big(\|B_1\|+\|B_2\|K$

$$+\int_0^{+\infty}\|C_1(u)\|du+K\int_0^{+\infty}\|C_2(u)\|du\Big)$$

$$+2g_2(t)M\|B\|.$$

其中 $\quad g_2(t)=\displaystyle\int_{t-\rho(t)}^{+\infty}[\|C_1(u)\|+\|C_2(u)\|]du\to 0$ （$\to\infty$时），

则 $\quad F(t,V,V)$

$$=-\Big[\frac{1}{\lambda_2}-\frac{2\|B\|}{\lambda_1}\Big(\|B_1\|+K\|B_2\|+\int_0^{+\infty}\|C_1(u)\|du$$

$$+\int_0^{+\infty}\|C_2(u)\|duK\Big)\Big]V+2g_2(t)M\|B\|,$$

从而 $\quad |F(t,V,N_1)-F(t,V,N_2)|\leqslant h_2|N_1-N_2|$，

其中 $\quad h_2=\dfrac{2\|B\|}{\lambda_1}\Big(\|B_1\|+K\|B_2\|+\displaystyle\int_0^{+\infty}\|C_1(u)\|du$

$$+K\int_0^{+\infty}\|C_2(u)\|du\Big)$$

故由定理 2 知(6) 的零解渐近稳定。

第十章

泛函微分方程解的渐近性质

在这一章中，我们将要介绍泛函微分方程解的渐近性质其中有Lasalle 不变性原理及 *Yoshizawa* 定理在无穷延滞方程中的推广，以及某些类型的泛函微分方程解的渐近性的一些结果。

§1 LaSalle不变性原理在无穷延滞RFDE中的推广

在第六章§4中曾经介绍过 Lasalle 不变性原理在有界滞量的RFDE中的推广，文〔130〕将这种思想推广到C_γ空间上的无穷延滞的RFDE之中并获得Razumikhin型的定理。

设C^γ是由满足下列条件的连续函数所组成的空间：

ϕ：$(-\infty,0]\to R^n$为连续，且$\lim\limits_{s\to-\infty}e^{\gamma s}|\phi(s)|$存在，$\gamma>0$。$C_\gamma$上的范数定义为

$$\|\phi\|=\sup_{s\leq 0}e^{\gamma s}|\phi(s)|.$$

设 $x\in C((-\infty,A],\ R^n)$，$A\geq 0$。对任何 $t\geq 0$，定义x_t为

$$x_t(s)=x(t+s),\quad s\leq 0.$$

考虑无穷延滞的自治方程

$$\dot{x}(t)=f(x_t). \tag{1}$$

其中f：$C_\gamma\to R^n$为全连续。

不难证明下列的引理成立。

引理1 设$x(\phi)(t)$是方程(1) 过$(0,\phi)$在$[0,\infty)$上的解，轨道$\{x_t: t\geq 0\}$在C_γ上有界；$\{t_n\}$是序列，$t_n\to\infty$，则存在子列$\{s_n\}$和在$(-\infty,0]$上连续有界的函数$x\in C_\gamma$，使得

$$\lim_{n\to\infty} x_{s_n}(\tau)=x(\tau)$$

在$(-\infty,0]$中的任何紧区间上一致成立，从而

$$\lim_{n\to\infty} x_{s_n}=x.$$

引理2 若$x(\phi)(t)$如引理1所述，则C_γ中的元素$\psi\in\Omega(\phi)$ $\Longleftrightarrow\psi$在$(-\infty,0]$上连续有界且存在$\{t_n\}$，$t_n\to\infty$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{t_n}(\tau)=\psi(\tau)$在$(-\infty,0]$的任何紧区间上一致成立，其中$\Omega(\phi)$为$x(\phi)(t)$的$\omega$极限集。

引理3 若$x(\phi)(t)$如引理1所述，则$\Omega(\phi)$非空紧、且是不变的，即对任何$\psi\in\Omega(\phi)$，存在具有下列性质的 y: $(-\infty,\infty)\to \mathbf{R}^n$:

(i) $y_t\in\Omega(\phi)$，$t\in(-\infty,\infty)$；

(ii) $y_0=\psi$；

(iii) $y(t)$在$(-\infty,\infty)$上连续可微且满足方程

$$\dot{y}(t)=f(y_t).$$

此外，$\lim\limits_{t\to\infty} d(x_t(\phi),\ \Omega(\phi))=0$。

定义 函数V: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^+$称为Liapunov函数，若$V(\cdot)$连续且满足下面的条件$A$

条件A，对任何 $\phi\in C_\gamma$，$\gamma>0$，有

$$\sup_{s<0} p(s)V[\phi(s)]<\infty,$$

其中$p(s)$为正值连续函数，$p(0)=1$，当 $t\to-\infty$时 $p(t)\to 0$，$p'(t)\geq 0$。此外，又存在正值连续函数$q(t)$，$q(0)=1$，当$t\to-\infty$时$q(t)\to 0$，$q'(0)\geq 0$，使得当 $s\in\mathbf{R}$，$t\in\mathbf{R}^-$时满足$p(s+t)\leq p(s)q(t)$。

现考虑集合

$$E_V(G)\overset{\text{def.}}{=}\{\phi\in G: \sup_{s<0} p(s)V[x_t(\phi)(s)]$$

$$= \sup_{s \le 0} p(s)V[\phi(s)],\quad t \geq 0\}.$$

其中$G \subseteq C_r$。设$M_V(G)$ 表示$E_V(G)$ 的最大不变子集，显然有

设 $M_V(G) = \{\phi \in G_{:}\ \sup\limits_{s \le 0} p(s)V[x_t(\phi)(s)]$

$$= \sup_{s \le 0} p(s)V[\phi(s)],\quad -\infty < t < \infty\}.$$

以下的引理表明了所考虑的函数$V(x)$的一些性质。

引理4 若$x_{t_n}(s)$（当$n \to \infty$时 $t_n \to \infty$）在$(-\infty, 0]$的任一紧区间上一致收敛于 $\psi(s)$，$V[x(t)] \leq M$，$t \geq 0$，且

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{s \le 0} p(s)V[x_{t_n}(s)] = c,$$

则有

$$\sup_{s \le 0} p(s)V[\psi(s)] = c.$$

证 若$C = 0$，则对每个固定的$s \leq 0$，有

$$0 \leq \overline{\lim_{n \to \infty}} p(s)V[x_{t_n}(s)] \leq \lim_{n \to \infty} \sup_{s \le 0} p(s)V[x_{t_n}(s)] = 0,$$

即$\lim\limits_{n \to \infty} V[x_{t_n}(s)] = 0$。故$V[\psi(s)] = 0$。$s \in (-\infty, 0]$。结论成立。

若$c > 0$。则取$r_1 > 0$，使

$$M \cdot p(-r_1) \leq \frac{c}{2},\quad q(t)\sup_{s \le 0} p(s)V[x(s) \leq \frac{c}{2}.$$

$$t \leq -r_1.$$

当$t_n \geq r_1$时，考察

$$\sup_{s \le 0} p(s)V[x_{t_n}(s)] = max\{\sup_{s \le -t_n} p(s)V[x_{t_n}(s)],$$

$$\sup_{-t_n \le s \le -r_1} p(s)V[x_{t_n}(s)],\quad \sup_{-r_1 \le s \le 0} p(s)V[x_{t_n}(s)]\}$$

因为 $\sup\limits_{s \le -t_n} p(s)V[x_{t_n}(s)] = \sup\limits_{\tau \le 0} p(\tau - t_n)V[x(\tau)]$

$$\leq q(-t_n)\sup_{\tau \le 0} p(\tau)V[x(\tau)] \leq \frac{c}{2}.$$

$$\sup_{-t_n \le s \le -r_1} p(s)V[x_{t_n}(s)] \leq p(-r_1)M \leq \frac{c}{2}.$$

故当n足够大时，

$$\sup_{s \le 0} p(s)V[x_{t_n}(s)] = \sup_{-r_1 \le s \le 0} p(s)V[x_{t_n}(s)].$$

从而有 $c=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{s\leqslant 0} p(s)V[x_{t_n}(s)]$

$$=\lim_{n\to\infty}\sup_{-r_1\leqslant s\leqslant 0} p(s)V[x_{t_n}(s)]$$

$$=\sup_{-r_1\leqslant s\leqslant 0} p(s)V[\psi(s)]\leqslant\sup_{s\leqslant 0} p(s)V[\psi(s)].$$

另一方面，对任何$L>0$，$\varepsilon>0$，有 $N(L,\varepsilon)>0$ 使当$t_n\geqslant N(L,\varepsilon)$时，

$$\sup_{-L\leqslant s\leqslant 0} p(s)V[\psi(s)]\leqslant\varepsilon+\sup_{-L\leqslant s\leqslant 0} p(s)V[x_{t_n}(s)]$$

$$\leqslant\varepsilon+\sup_{s\leqslant 0} p(s)V[x_{t_n}(s)].$$

令$n\to\infty$ 即得 $\sup\limits_{-L\leqslant s\leqslant 0} p(s)V[\psi(s)]\leqslant\varepsilon+c$。由$L$及$\varepsilon$的任意性可知 $\sup\limits_{s\leqslant 0} p(s)V[\psi(s)]\leqslant c$。引理得证。

引理5 设 $x(t)$是 $(-\infty,\infty)$ 上的连续函数，且$x_0(\cdot)\in C_r$，则 $g(t)\triangleq\sup\limits_{s\leqslant 0} p(s)V[x_t(s)]$为右连续函数。

证 任给$t_0\geqslant 0$及$\varepsilon>0$，存在$s_0\in(-\infty,0)$使

$$p(s_0)V(x(t_0+s_0))>g(t_0)-\varepsilon.$$

对任何趋于t_0的序列$\{t_n\}$和趋于s_0的序列$\{s_n\}$，我们由V、p及x的连续性可知，当n足够大时

$$p(s_n)V(x(t_n+s_n))\geqslant g(t_0)-\varepsilon.$$

即n足够大时 $g(t_n)\geqslant g(t_0)-\varepsilon$，故 $\varliminf\limits_{t\to t_0} g(t)\geqslant g(t_0)$。

而当 $t_n\geqslant t_0$时，对上述的$\varepsilon>0$取$s_n<0$使

$$p(s_n)V[x(t_n+s_n)]\geqslant g(t_n)-\varepsilon.$$

当存在$\{s_n\}$的一个子列趋于零时，由上式可得

$$g(t_0)\geqslant p(0)V[x(t_0)]\geqslant\varlimsup_{t\to t_0^+} g(t);$$

若不存在这样的子列，则因$t_n-t_0\to 0$（$n\to\infty$时），可设

$$s_n'=s_n+t_n-t_0<0,$$

从而$s_n\leqslant s_n'<0$，$s_n'+t_0=t_n+s_n$，故由p的单调性有

$$p(s_n')V[x(t_0+s_n')]\geqslant p(s_n)V[x(t_n+s_n)]$$

$$\geqslant g(t_n)-\varepsilon.$$

故得 $g(t_0) \geq g(t_*) - \varepsilon$, $g(t_0) \geqslant \overline{\lim\limits_{t \to t_0^+}} g(t)$。

所以 $\quad \overline{\lim\limits_{t \to t_0^+}} g(t) = \underline{\lim\limits_{t \to t_0^+}} g(t)$。

故 $g(t)$ 是右连续函数。证毕

引理6 设 $x(t)$是方程(1) 在$[0,\infty)$ 上的解，则对 $t \geqslant 0$，有

$$D^+\{\sup_{s \leqslant 0} p(s)V[x_t(s)]\} \leqslant \begin{cases} -\dot{q}(0)\sup\limits_{s \leqslant 0} p(s)V[x_t(s)] \quad \text{或} \\ [\dot{p}(0) - \dot{q}(0)][V[x(t)] + \dot{V}_{(1)}[x(t)]. \end{cases}$$

在第二种情形有$V[x(t)] = \sup\limits_{s \leqslant 0} p(s)V[x_t(s)]$。这里

$$D^+\{\sup_{s \leqslant 0} p(s)V[x_t(s)]\}$$

$$= \overline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{1}{h}\{\sup_{s \leqslant 0} p(s)V[x_{t+h}(s)] - \sup_{s \leqslant 0} p(s)V[x_t(s)]\},$$

$$\dot{V}_{(1)}[x_t] = \overline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{1}{h}\{V[x(t+h) - V[x(t)]\}.$$

证 对任意固定的$t \geqslant 0$,

$$\frac{1}{h}\{\sup_{s \leqslant 0} p(s)V[x_{t+h}(s)] - \sup_{s \leqslant 0} p(s)V[x_t(s)]\}$$

$$= \frac{1}{h}\left\{\sup_{\tau \leqslant h} \frac{p(\tau - h)}{p(\tau)} p(\tau)V[x(t+\tau)] - \sup_{s \leqslant 0} p(s)V[x_t(s)]\right\}$$

$$\leqslant \frac{1}{h}\{q(-h)\sup_{s \leqslant h} p(s)V[x(t+s)] - \sup_{s \leqslant 0} p(s)V[x_t(s)]\}$$

若存在某$h_0 > 0$，使

$$\sup_{s \leqslant h_0} p(s)V[x(t+s)] = \sup_{s \leqslant 0} p(s)V[x(t+s)],$$

则对任何$h \in (0, h_0]$，有

$$\sup_{s \leqslant h} p(s)V[x(t+s)] = \sup_{s \leqslant 0} p(s)V[x(t+s)],$$

从而有

$$\frac{1}{h}\{\sup_{s \leqslant 0} p(s)V[x_{t+h}(s)] - \sup_{s \leqslant 0} p(s)V[x_t(s)]\}$$

$$\leqslant \frac{1}{h}\{q(-h)-1\}\sup_{s\leqslant 0} p(s)V[x_t(s)].$$

令$h\to 0^+$，则知

$$D^+\{\sup_{s\leqslant 0} p(s)V[x_t(s)]\}\leqslant -\dot{q}(0)\cdot\sup_{s\leqslant 0} p(s)V[x_t(s)].$$

若上述h_0不存在，则对任何$h>0$，有

$$\sup_{s\leqslant 0} p(s)V[x_t(s)]<\sup_{s\leqslant h} p(s)V[x_t(s)]$$

$$=max\{\sup_{s\leqslant 0} p(s)V[x_t(s)],\ \sup_{0<s\leqslant h} p(s)V[x_t(s)]\}$$

$$=\sup_{0\leqslant s\leqslant h} p(s)V[x_t(s)]$$

$$=p(\xi)V[x(t+\xi)].$$

其中$\xi=\xi(h)\ \in(0,h]$。由此式令$h\to 0^+$就得

$$V[x(t)]=\sup_{s\leqslant 0} p(s)V[x_t(s)].$$

从而有

$$\frac{1}{h}\{\sup_{s\leqslant 0} p(s)V[x_{t+h}(s)]-\sup_{s\leqslant 0} p(s)V[x_t(s)]\}$$

$$\leqslant \frac{1}{h}\{q(-h)p(\xi)V[x(t+\xi)]-V[x(t)]\}$$

$$=\frac{1}{\xi}\{p(\xi)V[x(t+\xi)]-V[x(t)]\}\frac{\xi}{h}q(-h)$$

$$+\frac{1}{h}\{q(-h)-1\}V[x(t)]$$

$$\leqslant \frac{1}{\xi}\{p(\xi)V[x(t+\xi)]-V[x(t)]\}q(-h)$$

$$+\frac{1}{h}\{q(-h)-1\}V[x(t)]$$

当$h\to 0^+$时就有

$$D^+\{\sup_{s\leqslant 0} p(s)V[x_t(s)]\}\leqslant \dot{p}(0)V[x(t)]$$

$$+\dot{V}_{(1.1)}[x_t]-\dot{q}(0)V[x(t)]$$

$$=\{\dot{p}(0)-\dot{q}(0)\}V[x(t)]+\dot{V}_{(1)}[x_t].$$

这就证明了引理

类似于M.Parrott[132]，不难证明下列结果：

引理7 设$x(\cdot)$是(1) 的定义于$[0,\infty)$上的解，

如果 $\lim\limits_{t\to\infty}\sup\limits_{s\leq 0} p(s)V[x(t+s)]=c$, $c<+\infty$。

则存在$\{t_n\}$，$t_n\to\infty$，使

$$\lim_{n\to\infty}V[x(t_n)]=c.$$

下面的定理是文[131]定理2的推广

定理1 设存在 Liupunov $V(x)$ 和关于 (1) 的正不变闭集 $G\subseteq C_r$，且当$\phi\in G$及$V[\phi(0)]=\sup\limits_{s\leq 0}p(s)V[\phi(s)]$时，有

$$\dot V_{(1)}(\phi)\leqslant-\{\dot p(0)-\dot q(0)\}V[\phi(0)],$$

则当$\phi\in G$且使解$x(\phi)$在$[0,\infty)$上有定义和有界时，有

$$\Omega(\phi)\subseteq M_V(G)\subseteq E_V(G).$$

因而当$t\to\infty$时，$x_t(\phi)\to M_V(G)$

证 因为$\{x_t(\phi):\ t\geqslant 0\}$是$C_r$中的有界集，故由引理3,$\Omega(\phi)$非空、紧、不变，且当 $t\to\infty$ 时，$x_t(\phi)\to\Omega(\phi)$，显然

$$\Omega(\phi)\subseteq G.$$

由引理6知，在本定理的条件下，

$$D^+\{\sup_{s\leq 0}p(s)V[x_t(s)]\}\leqslant 0,\quad t\geqslant 0.$$

故$\sup\limits_{s\leq 0}p(s)V[x_t(s)]$是$t$的非增函数，有下界，故

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{s\leq 0}p(s)V[x_t(s)]=c$$

存在，由引理4知，对任何$\psi\in\Omega(\phi)$，

$$\sup_{s\leq 0}p(s)V[\psi(s)]=c.$$

又由$\Omega(\phi)$的不变性，$x_t(\psi)\in\Omega(\phi)$，从而

$$\sup_{s\leq 0}p(s)V[x_t(\psi)(s)]=c,\quad t\geqslant 0.$$

即$\psi\in E_V(G)$，$\Omega(\phi)\subseteq E_V(G)$，$\Omega(\phi)\subseteq M_V(G)\subseteq E_V(G)$。证毕。

推论 设$f(0)=0$，函数$V(x)$除了满足前述的条件A外，还满足下列的条件：

(*i*) $V(0)=0$，当$0\neq|x|<a$时 $V(x)>0$，a为某正常数；

(*ii*) $\dot V_{(1)}(0)=0$，$\dot V_{(1)}(\phi)<min\{0,-[\dot p(0)-\dot q(0)]$

$V[\phi(0)]$，$\phi\in G$，$0\neq\|\phi\|<a$，且

$$V(\phi(0))=\sup_{s\leq 0} p(s)V[\phi(s)]。$$

(iii) 存在连续单调增加函数 a,b：$\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$，$a(0)=b(0)=0$，使得

$$a(\|\phi\|)\leqslant\sup_{s\leq 0} p(s)V[\phi(s)]\leqslant b(\|\phi\|)，\phi\in C_\gamma。$$

则 (1) 的零解）关于G）渐近稳定

证 引理6表明，当$\|\phi\|\neq 0$足够小时，$\sup\limits_{s\leq 0} p(s)V[x_t(\phi)(s)]$递减，从而由条件 (iii) 可知，对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当$\|\phi\|<\delta$，$\phi\in G$时，$\|x_t(\phi)\|<\varepsilon$，$t\geqslant 0$，即零解(关于G）稳定。

由定理i，对足够小的$\|\phi\|$，$\phi\in G$，$\Omega(\phi)$ 非空、紧、不变，且当$t\to\infty$时$x_t(\phi)\to\Omega(\phi)\subseteq E_V(G)$，从而对任何 $\psi\in\Omega(\phi)$，$\sup\limits_{s<0} p(s)Vx_t(\psi)(s)]$恒为常数。

若 $\psi\in\Omega(\phi)$，$\psi(\cdot)\neq 0$，则 $\sup\limits_{s\leq 0} p(s)V[x_t(\psi)(s)]=c>0$，$t\in(-\infty,\infty)$。从而由引理4的证明可知，存在 $r>0$，使当 $t\geqslant r$ 时，

$$c=\sup_{s\leqslant 0} p(s)V[x_t(\psi)(s)] \quad \sup_{-r\leqslant s\leqslant 0} p(s)V[x_t(\psi)(s)]，$$

因此，当t足够大时，$V[x_t(\psi)(0)]$不能总是严格地小于c,即存在t_0使 $V[x_{t_0}(\psi)(0)]=c=\sup\limits_{s\leqslant 0} p(s)V[x_{t_0}(\psi)(s)]$由条件(ii) 即知$\dot V_{(1)}[x_{t_0}(\psi)]<0$，但另一方面，$V[x_t(\psi)(0)]$ 不能大于c，从而$V[x(\psi)(t)]$在$t=t_0$处取极大值，故应有$\dot V_{(1)}[x_{t_0}(\psi)]=0$,矛盾，故对足够小的$\|\phi\|$，$\phi\in G$，有$\Omega(\phi)=\{0\}$，$x_t(\phi)\to 0$，$t\to\infty$，即零解 (关于G) 渐近稳定。

例1 考虑系统

$$\dot x(t)=F(ax(t)+\int_{-\infty}^{0} g(s)x(t+s)ds), \tag{2}$$

其中F：$\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$连续，$g$在$(-\infty,0)$ 上可积且对某$\gamma>0$，

$$\int_{-\infty}^{0}|g(s)|e^{-\gamma s}ds<a。$$

当$x\cdot u>0$ 时 $x\cdot F(u)<0$ (其中“$\cdot$”表示标准欧儿里得内积)

$x, u \in \mathbf{R}^n$。令 $V[x]=\frac{1}{2}x\cdot x$ 并取$p(s)=q(s)=e^{2\gamma s}$，$s\in\mathbf{R}$。则容易看出，条件（iii）被满足且条件"$V[\phi(0)]=\sup\limits_{s\leq 0} e^{2\gamma s} V[\phi(s)]$"等价于"$|\phi(0)|=\|\phi\|_{C\gamma}$"。因为

$$\dot{V}_{(2)}(\phi)=\phi(0)F(a\phi(0)+\int_{-\infty}^{0} g(s)\phi(s)ds),$$

当$\phi\neq 0$且 $V[\phi(0)]=\sup\limits_{s\leq 0} e^{2\gamma s}V[\phi(s)]$时，

$$\left|\phi(0)\int_{-\infty}^{0} g(s)\phi(s)ds\right|\leqslant\left|\phi(0)\right|\int_{-\infty}^{0}|g(s)|\cdot|\phi(s)|ds$$

$$=|\phi(0)|\int_{-\infty}^{0}|g(s)|e^{-\gamma s}\cdot e^{\gamma s}|\phi(s)|ds$$

$$\leqslant|\phi(0)|^2\int_{-\infty}^{0}|g(s)|e^{-\gamma s}ds.$$

从而 $$\phi(0)\cdot\left[a\phi(0)+\int_{-\infty}^{0} g(s)\phi(s)ds\right]$$

$$=a|\phi(0)|^2+\phi(0)\cdot\int_{-\infty}^{0} g(s)\phi(s)ds>0,$$

故对这种ϕ，$\dot{V}_{(2)}[\phi]<0$。由推论即得零解全局渐近稳定。

下面我们来考察在什么条件下方程(1)的解当 $t\to\infty$时能渐近于一个常数。为此，我们转为考察在什么条件下，$V(x)$沿方程(1)的解当$t\to\infty$时趋于一个常数，因为在某些实际例子中，由此即可导出解$x(\cdot)$渐近于常数。

对于满足条件A的函数$V[x]$及非空集$H\subseteq(-\infty,0)$，记$k_V(H)=\{\phi\in C_\gamma: V[\phi(s)]=V[\phi(0)]\quad s\in H\}$。当$H=(-\infty,0)$时，记$k_V=k_V(H)$。

引理8 设存在满足条件A的函数$V(x)$及关于(1)的正不变闭集G使得：对任何$\phi\in G$，当$x(\phi)(\cdot)$的轨道有界时极限

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{s\leq 0} p(s)V[x_t(\phi)(s)]$$

存在，则对G中使解$x(\phi)(\cdot)$具有界轨道且$\Omega(\phi)\subset k_V$的ϕ，有极限式成立：

$$\lim_{t\to\infty}V[x(\phi)(t)]=\lim_{t\to\infty}\sup_{s\leq 0} p(s)V[x_t(\phi)(s)].$$

证 根据引理3，存在$t'_n \to \infty$，使

$$\lim_{n\to\infty} V[x(\phi)(t'_n)] = \lim_{t\to\infty} \sup_{s\leq 0} p(s)V[x(\phi)(s)] \xlongequal{\text{def.}} c.$$

不妨设$c>0$。若结论不成立，则存在$\{t_n\}$，$t_n \to \infty$，使

$$V[x(\phi)(t_n)] \to a \neq c.$$

因$\{x_{t_n}(\phi)\}$为相对紧（见引理1），可设$\psi \in \Omega(\phi)$，$x_{t_n}(\phi) \to \psi$。从而$\psi \in k_V$，$V[\psi(s)] = V[\psi(0)] = a$，$s \in (-\infty, 0]$，亦即

$$\sup_{s\leq 0} p(s)V[\psi(s)] = a.$$

另外，由引理1和4又得。

$$\sup_{s\leq 0} p(s)V[\psi(s)] = C.$$

这就产生了矛盾，证毕。

定理2 设存在前述满足条件A的函数$V(\alpha)$及关于方程(1)的正不变闭集G，使得

(i) $\dot{V}(\phi) \leq -[\dot{p}(0) - \dot{q}(0)]V[\phi(0)]$当$\phi \in G$及$V[\phi(0)] = \sup_{s\leq 0} p(r)V[\phi(s)]$时；

(ii) $\varphi \in K_V(H)$，当$\phi \in G$，$V[\phi(0)] = \sup_{s\leq 0} p(s)\dot{V}[\phi(s)]$及$\dot{V}_{(1)}(\phi) = 0$时。

则对G中任何使解$x(\phi)(\cdot)$具有界轨道的ϕ，有

$$\Omega(\phi) \subseteq K_V(H).$$

从而当$t \to \infty$时$V[x_t(\phi)(0)]$趋于常数。

证 设$\psi \in \Omega(\phi)$，$\phi \in G$，使$x(\phi)(\cdot)$具有界轨道，由定理1，$\psi \in E_V(G)$，即对一切$t \geq 0$，

$$\sup_{s\leq 0} p(s)V[x_t(\psi)(s)] = \sup_{s\leq 0} p(s)V[\psi(s)] \xlongequal{\text{def}} c.$$

若$c = 0$，则$V[\psi(s)] \equiv 0$，$\psi \in K_V(H)$，以下设$c>0$，由引理4的证明可看出，存在$r>0$使当$t \geq r$时，

$$\sup_{-r\leq s\leq 0} p(s)V[x_t(\psi)(s)] = \sup_{s\leq 0} p(s)V[x_t(\psi)(s)] = C.$$

因此可断定，当t足够大时$V[x_t(\psi)(0)]$便不能在长度为r的区间上严格地小于c，也不能在任何一点大于c。亦即当t足够大时，

函数$V[x(\psi)(t)]$必取到极大值c,所以，对某个$t_0>r$,

$$\dot{V}_{(1)}[x_{t_0}(\psi)]=0 \text{ 且 } V[x_{t_0}(\psi)(0)]=c$$
$$=\sup_{s\leqslant 0} p(s)V[x_{t_0}(\psi)(s)].$$

由条件(ii)即得

$$x_{t_0}(\psi)\in K_V(H) \quad \text{或} \quad V[x(\psi)(t_0-s)]\equiv V[x(\psi)(t_0)],$$
$$s\leqslant 0.$$

注意到 $x(\psi)(s)=\psi(s)$, $s\leqslant 0$。这就证明了 $\psi\in K_V(H)$, 由引理7即知，当$t\to\infty$时$V[x_t(\phi)(s)]$趋于常数。

【注】 由引理5可看出，若$q(0)>0$,则对一切 $\psi\in\Omega(\phi)$,均有

$$V[x(\psi)(t)]=\sup_{s\leqslant 0} p(s)V[x_t(\psi)(s)]=\sup_{s\leqslant 0} p(s)V[\psi(s)], \quad t\geqslant 0 。$$

由此可证明对一切$t\in \mathbf{R}$, $V[x(\psi)(t)]$恒为常数,从而$\psi\in K_V(H)$.
此时，去掉定理2之(ii)，结论仍成立。

例2 考虑纯量方程

$$\dot{x}(t)=\{-e^{r^2}x(t)+x(t-r)-x(t)x(t-r)\}\int_{-\infty}^{0}e^{2rs}|x_t(s)-x_t(0)|ds. \qquad (3)$$

容易验证，集 $G\xlongequal{\text{def}}\{\phi\in C_r:\phi(s)\geqslant 0, \ s\leqslant 0\}$是关于方程(3)的正不变闭集。

取$V(x)=\dfrac{1}{2}x^2$, $p(s)=\begin{cases}e^{-2s^2}, & \text{当}s\leqslant 0\text{时};\\ e^{2s^2}, & \text{当}s\geqslant 0\text{时},\end{cases}$ $q(s)=e^{-s^2}$, $S\leqslant 0$

显然$V(x)$满足条件A，又

$$\dot{V}_{(3)}(\phi)=\{-e^{r^2}\phi^2(0)+\phi(0)\phi(-r)-\phi^2(0)\phi(-r)\}\int_{-\infty}^{0}e^{2rs}|\phi(s)-\phi(0)|ds.$$

由于当$\phi\in G$且$\phi(0)=\sup\limits_{s\leqslant 0}e^{-s^2}\phi(s)$时,

$$-e^{r^2}\phi^2(0)+\phi(0)\phi(-r)\leqslant 0.$$

从而 $\dot{V}_{(3)}(\phi)\leqslant 0$, 若此外还有 $\dot{V}_{(3)}(\phi)=0$, 则

$$\{-e^{r^2}\phi^2(0)+\phi(0)\phi(-r)-\phi^2(0)\phi(-r)\}\int_{-\infty}^{0}e^{2rs}\phi(s)$$

$$- \phi(0)|ds = 0.$$

从而或者 $-e^{r\tau}\phi^2(0)+\phi(0)\phi(-r)=\phi^2(0)\ \phi(-r)=0$

或者 $\int_{-\infty}^{0} e^{2r\tau}|\phi(s)-\phi(0)|ds=0.$

当$\phi(0)=0$或者$\phi(-r)=0$时，$\phi(s)\equiv 0$；否则就有$\phi(s)\equiv\phi(0)$，$s\leqslant 0$。总之，$\phi\in K_V$。这就表明定理2的条件得到满足，因此对方程(3)的属于G且轨道有界的解$x_t(\phi)$，有$V[x_t(\phi)(0)]$趋于常数。故$x_t(\phi)(0)$趋于常数。

由于所采用的 $V(x)$ 具有无限大性质，即当 $|x|\to\infty$ 时 $V(x)\to\infty$。再根据定理2的条件(i)，便知方程(3)的解有界。这样，我们实际上证明了方程(3)由G出发的解渐近于常数。

§2 Yoshizawa 定理在泛函微分方程中的推广

T. Yoshizawa 在他的专著[133]中曾经讨论了带干扰项的非自治系统的解的正极限集与某自治系统的半不变集的关系。本节介绍文[134]的结果，它将Yoshizawa 的理论推广到泛函微分方程之中。并且在较广泛的B空间(见第三章)中讨论，故所得的结果对有界滞量RFDE及无穷延滞RFDE两种情形都适用。

1 相空间理论

设I为固定的有限区间$[-r,0]$，或为无穷区间$(-\infty,0]$。令$\hat{B}$是映I到$\mathbf{R}^n$的函数组成的实线性空间，具有半范数$|\cdot|_{\hat{B}}$，且$B=\mathbf{B}/|\cdot|_{\hat{B}}$是一Banach空间。对任何$A>0$，定义

$$F_A=\{\hat{x}: I\cup[0,A]\to\mathbf{R}^n, \hat{x}(t)\text{于}[0,A]\text{上连续，且存在}\ \hat{\phi}\in\hat{B},\ \text{使}\hat{x}_0=\hat{\phi}\}.$$

设$\hat{B}$满足如下公理

(i) 存在常数$K>0$，使$|\varphi(0)|\leqslant K|\varphi|_{\hat{B}}$，对一切$\varphi\in\hat{B}$。

(ii) 对一切$\hat{x}\in F_A$，当$t\in[0,A]$时，有$\hat{x}_t\in\hat{B}$，且$\hat{x}_t$关于t连续。

(iii) 存在定义于$\mathbf{R}^+$上的连续函数$K_1(s)$及局部有界函数

$M_1(s)$，使得当$\hat{x}\in F_A$，$0\leqslant\sigma\leqslant t\leqslant A$时，

$$|\hat{x}_t|_{\hat{B}}\leqslant K_1(t-\sigma)\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant t}|\hat{x}(s)|+M_1(t-\sigma)|\hat{x}_\sigma|_{\hat{B}}.$$

我们用ϕ表示$\hat{\phi}\in B$所在的等价类（模$|\cdot|_{\hat{B}}$），那么由公理(i)，若$\hat{\phi}$，$\hat{\psi}\in\phi$，则$\hat{\phi}(0)=\hat{\psi}(0)$。即在每个等价类中，存在相联系的唯一的$\phi(0)$。

设Ω是$\mathbf{R}\times B$中的开集，$f:\Omega\to\mathbf{R}^n$，连续，称关系式

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t) \tag{1}$$

为一滞后型泛函微分方程，记为RFDE(f,Ω)。

称$x(\sigma,\phi)(t)$是方程(1)过$(\sigma,\phi)\in\Omega$在$[\sigma,A]$上的一个解，若$x_\sigma(\sigma,\phi)=\phi$，且在$[\sigma,A]$上，$x(\sigma,\phi)(t)$满足方程(1)

很明显，RFDE(f)过(σ,ϕ)的任何解满足积分方程

$$x_\sigma=\phi.$$

$$x(t)=\phi(0)+\int_\sigma^t f(s,x_s)ds,\qquad t\geqslant\sigma.$$

反之亦然。

2　正极限集

考虑方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t). \tag{2}$$

其中$f(t,\phi)$在$\mathbf{R}\times Q$上连续，Q是B中的开集。

设$x(\sigma,\phi)(t)$是(2)过(σ,ϕ)的解，且将来存在。令

$$\Gamma^+=\bigcap_{\sigma\leqslant s}Cl\{x_{t_n}:t\geqslant s\}.$$

那么Γ^+是Q中的闭子集，我们称它为$x(\sigma,\phi)(t)$或$x_t(\sigma,\phi)$的正极限集。

显然$\psi\in\Gamma^+$等价于存在数列$t_n\to\infty$，使$x_{t_n}\to\psi$。由此推出，若$x(\sigma,\phi)(t)$，$t\geqslant\sigma$是紧的（即存在紧集$Q^*\subset Q$，使$x_t\in Q^*$），则Γ^+必非空且为紧集。

设Ω是B的子集，$x\in F_{+\infty}$，若对任给的$\varepsilon>0$，总存在$T>0$，当$t\geqslant T$时，$x_t\in N(\Omega,\varepsilon)$我们就称当$t\to\infty$时，$x_t$趋于$\Omega$，记为$x_t\to\Omega$。

很显然，有如下引理：

引理1 设$x(t)$是(2)的对$t\geqslant\sigma$紧致的解，Γ^+是$x(t)$的正极限集。那么当$t\to\infty$时，有$x_t\to\Gamma^+$。并对任意$M\supseteq\Gamma^+$，仍有$x_t\to M$。

引理2 令Ω是空间Q中一闭集。设解$x(t)\to\Omega$，$t\to+\infty$。那么正极限集Γ^+满足$\Gamma^+\subset\Omega$。

3 半不变集

讨论定义在集Q上的方程

$$\dot{x}(t)=H(x_t).\tag{3}$$

设M是Q的子集，如果对于M的每一点ϕ，至少存在(3)的一个解$x(\phi)$，这个解对所有初始时刻以后的时间都停留在M中，那么将M称为方程(3)的半不变集。如果我们假设方程(3)的初始问题的解的唯一性，那么半不变集就叫做方程(3)的不变集。

引理3 考虑方程

$$\dot{x}(t)=H(x_t)+g_K(t).\tag*{$(4)_K$}$$

其中$K=1,2,\cdots$，H：$B\to\mathbf{R}^n$为全连续，g_K：$[0,\lambda]\to\mathbf{R}^n$为连续。

若1) $x^{(K)}(t)$是$(4)_K$过$(0,\varphi^{(K)})$的解，在$I\cup[0,\lambda]$上有定义，且$x_t^{(K)}$一致有界。2) $\varphi^{(K)}\to\varphi^{(0)}\in B$，$\int_0^\lambda|g_K(s)|ds\to0,K\to\infty$。则$\{x_t^{(K)}\}$必有一在$[0,\lambda]$上一致收敛的子序列，极限函数$x(t)$是方程

$$\dot{x}(t)=H(x_t).\tag{5}$$

过$(0,\varphi^{(0)})$定义在$[0,\lambda]$上的解。

证 因为$\{x_t^{(k)}\}$在$[0,\lambda]$上一致有界及公理(i)，那么存在正数N使得对任何自然数k，一切$t\in[0,\lambda]$，

$$|x_t^{(k)}|_B\leqslant N,\quad |x^{(k)}(t)|\leqslant N.$$

即$x^{(k)}(t)$在$[0,\lambda]$上一致有界。又由于

$$x^{(k)}(t)=\varphi^{(k)}(0)+\int_0^t H(x_s^{(k)})ds+\int_0^t g_k(s)ds.\tag{6}$$

而当$|\phi_B|\leqslant N$时，$H(\phi)$有界，所以$x^{(k)}(t)$在$[0,\lambda]$上等度连续。

由Arzela-Ascoli引理，在$[0,\lambda]$上，$\{x^{(k)}(t)\}$存在一致收敛的子序列。不妨记为$\{x^{(k)}(t)\}$。极限函数为$x^*(t)$，作

$$x(t)=\begin{cases}\varphi^{(0)}(t), & t\in I,\\ x^*(t), & 0\leqslant t\leqslant\lambda.\end{cases}$$

根据公理(ii)，(iii)可解$\{x_t^{(k)}\}$在$[0,\lambda]$上一致收敛于x_t。

在(6)式中令$k\to\infty$，得

$$x(t)=\varphi^{(0)}(0)+\int_0^t H(x_s)ds,\quad t\in[0,\lambda].$$

引理得证。

下面，我们还假设相空间B满足如下公理。

公理(iv) 1) $I=[-r,0]$。若$\hat{\phi}_n$是$\hat{B}$中的有界序列，且$\hat{\varphi}_n(\tau)$一致收敛于$\hat{\phi}(\tau)$蕴含$\hat{\phi}\in\hat{B}$，且$|\hat{\phi}_n-\hat{\phi}|_{\hat{B}}\to 0\quad n\to\infty$

2) $I=(-\infty,0]$。设$\hat{x}:(-\infty,+\infty)\to\mathbf{R}^n$，$\hat{x}_\sigma\in\hat{B}$，在区间$[\sigma,+\infty)$上连续，$\{\hat{x}_t;\ t\geqslant\sigma\}$有界。序列$t_n\to+\infty$。那么$\lim\limits_{n\to\infty}\hat{x}_{t_n}(s)=\varphi(s)$，$s\in(-\infty,0]$，且在任何有限区间上一致。蕴含着$\varphi\in\hat{B}$。且$|\hat{x}_{t_n}-\varphi|_{\hat{B}}\to 0$，$n\to\infty$。

可以验证，对任何$r>0$，C_r空间

$$C_r=\{\phi:(-\infty,0]\to\mathbf{R}^n,\ \text{连续}\ \lim_{s\to-\infty}e^{rs}\phi(s)\text{存在}\}$$

满足公理(iv)，其中范数$|\phi|_{C_r}=\sup\limits_{s\leqslant 0}e^{rs}|\phi(s)|$。

考虑泛函微分方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t)+g(t,x_t).\tag{7}$$

其中$f(t,\phi)$，$g(t,\phi)$于$R\times Q$上全连续，Q为B的开集。而且假设若$x:I_\sigma\cup[\sigma,+\infty)\to\mathbf{R}^n$，$x_\sigma\in B$在$[\sigma,+\infty)$上连续，$\{x_t;\ t\geqslant\sigma\}$有界，则

$$\int_\sigma^{+\infty}|g(t,x_t)|dt<\infty.$$

其中

$$I_\sigma=\begin{cases}[\sigma-r,\sigma], & I=[-r,0],\\ (-\infty,\sigma], & I=(-\infty,0].\end{cases}$$

引理4 设$f(t,\phi)$把$\mathbf{R}\times(Q$中的有界集$)$映到有界集。$x(\sigma,\phi)(t)$是方程(7)在$[\sigma,+\infty)$上的解，且轨道有界。又设$\{t_n\}$是一

趋于$+\infty$的序列，那么存在一子序列$\{S_n\}$和一有界连续函数$\psi\in B$。使得$\lim_{n\to\infty}x_{s_n}(s)=\psi(s)$，且对一切$r_1>0$，在区间$[-r_1,0]\cap I$上一致。

进一步，$|x_{s_n}-\psi|_B\to 0$，$n\to\infty$。

证 由$x(\sigma,\phi)(t)$的轨道有界性及公理(i)，存在正数$k>0$，使得对一切$t\geq\sigma$，有

$$|x_t|_B\leqslant k,\quad |x(t)|\leqslant k.$$

令$\Delta_N=[-N,0]\cap I$，$N=1,2,\cdots$。那么$\{x_{t_n}(s)\}$在ΔN上一致有界。又根据

$$x(t)=\phi(0)+\int_\sigma^t f(s,x_s)ds+\int_\sigma^t g(s,x_s)ds$$

可推出$x_{t_n}(s)$在Δ_N上等度连续。

然后利用 Arzela Ascoli 引理及对角线法，可找到一子序列S_n，一函数$\psi(s)$，使$\lim_{n}x_{s_n}(s)=\psi(s)$，$s\in I$，且在任何$[-r_1,0]\cap I$上一致。显然$\psi(s)$在$I$上连续有界。由公理(iv)，$\psi\in B$，且$|x_{s_n}-\psi|_B\to 0$，$n\to\infty$。引理得证。

现在，我们设Ω为Q中的闭集，方程(7)中的$f(t,\phi)$满足下列条件：

(a) $f(t,\phi)$把$R\times$(Q中的有界集)映到有界集。对于$\phi\in\Omega$，当$t\to\infty$时$f(t,\phi)\to H(\phi)$，而且在Ω中的任何紧集上一致。

(b) 对任给的$\varepsilon>0$，$\psi\in\Omega$，存在$\delta(\varepsilon,\psi)>0$和$T(\varepsilon,\psi)>0$，使得若$|\phi-\psi|_B<\delta(\varepsilon,\psi)$，且$t\geqslant T(\varepsilon,\psi)$，有$|f(t,\phi)-f(t,\psi)|<\varepsilon$。

可以证明，假如$f(t,\phi)$满足条件(b)，那么对于属于Ω中的紧集Ω_1的ψ，可取得δ及T与ψ无关，只依赖于Ω_1。

定理1 设$x(\sigma,\phi)(t)$是方程(7)在$[\sigma,\infty)$上的解，轨道有界，且趋于Q中一闭集Ω。如果$f(t,\phi)$在Ω上满足条件(a)，(b)，那么$x(\sigma,\phi)(t)$的正极限集Γ^+为方程

$$\dot{x}(t)=H(x_t) \tag{8}$$

在Ω内的一半不变集。

证 因为$x(t)=x(\sigma,\phi)(t)$轨道有界. 由引理4, $x(t)$紧致. 即存在紧集$Q^*\subset Q$, 使$x_t\in Q^*$根据引理1、引理2, $\Gamma^+\subset\Omega\cap Q^*=\Omega_1$, Ω_1亦是B中的紧集。由条件(a), $H(\phi)$在Ω_1上连续有界。故存在$H^*(\phi)$, 它在整个空间B上连续有界, 且当$\phi\in\Omega_1$时, $H^*(\phi)\equiv H(\phi)$(见[135])

设 $\psi\in\Gamma^+$ 那么 $\psi\in\Omega_1$, 而且有一数列$t_k\to\infty$, 使$x_{t_k}\to\psi$, $k\to\infty$。

考虑方程

$$\dot{x}(t)=H^*(x_t), \tag{9}$$

$$\dot{x}(t)=H^*(x_t)+[f(t+t_k,\ x_t^{(k)})+g(t+t_k,\ x_t^{(k)})-H^*(x_t^{(k)})], \tag{10}$$

其中$x^{(k)}(t)=x(t+t_k)$, $k=1,2,\cdots$

因为$H^*(\phi)$有界, 所以, 对任意$\lambda>0$, 方程(9)的所有解在$0\leqslant t\leqslant\lambda$上有定义。

令 $g_k(t)=f(t+t_k,x_t^{(k)})+g(t+t_k,\ x_t^{(k)})-H^*(x_t^{(k)})$,

可以证明, $\int_0^\lambda|g_k(t)|dt\to0$, $k\to\infty$.

注意$x^{(k)}(t)$是方程(10)的过$(0,\ x_{t_k})$的解。根据引理3, $\{x_t^{(k)}\}$在$[0,\lambda]$上有一致收敛的子序列,它的极限函数$x^*(t)$是方程(9)的过$(0,\psi)$在$[0,\lambda]$上的解。

又因为 $x_t\to\Gamma^+$, Γ^+是紧集。所以 $x_t^*\in\Gamma^+\subset\Omega_1$, 而在 Ω 上, $H^*(\phi)=H(\phi)$, 故$x^*(t)$是方程(8)的过点$(0,\psi)$在$[0,\lambda]$上的解且$x_t^*\in\Gamma^+$。由λ的任意性, 得Γ^+是(8)的半不变集, 定理得证。

4 解的渐近性态

作为定理 1 的应用, 可以得到解的渐近性态的一些结果。

定理2 设$\Omega\subset Q_1\subset Q$, Q_1为开集, Ω为闭集。如果下列条件满足

(i) 在$R\times Q_1$上存在 Liapunov 泛函 $V(t,\phi)$, 即 $V(t,\phi)$连续, $V(t,\phi)\geqslant0$, $\dot{V}_{(7)}(t,\phi)\leqslant0$;

(ii) 对于$\phi\in Q_1$, 有$\lim\limits_{t\to+\infty}V(t,\phi)=V(\phi)$, 且在 Q_1 的任意

紧集上一致；

(iii) $f(t,\phi)$关于Ω满足(a)，(b)；

(iv) $x(\sigma,\varphi)(t)$是方程(7)从$R\times Q_1$出发，且在$[\sigma,\infty)$上存在的解。轨道有界，$x_t\to\Omega$，$(t\to\infty)$。则$E=\{\phi\in Q_1;\dot{V}_{(8)}(\phi)=0\}$非空，并且当$t\to\infty$时，$x_t(\sigma,\varphi)$趋于方程(8)在$E$内的最大半不变集。

证 根据条件(iv)，引理4及引理1可得，当$t\to+\infty$时，$x_t\to\Gamma^+$。由引理2，$\Gamma^+\subset\Omega$。那么根据定理1，Γ^+为方程(8)在Ω内的半不变集。

下面我们证明E非空，且$\Gamma^+\subset E$，从而当$t\to\infty$时，x_t趋于方程(8)在E中的最大半不变集。事实上，由条件(i)，$V(t,x_t)$单调减少有下界，那么存在$C\geqslant 0$，使$\lim\limits_{t\to+\infty}V(t_1,x_t)=C$。任取$\psi\in\Gamma^+$，则存在$t_k\to\infty$，$x_{t_k}\to\psi$。于是$\lim\limits_{k\to\infty}V(t_k,x_{t_k})=C$，从而根据条件(ii)有$V(\psi)=C$。又$\Gamma^+$是方程(8)的半不变集，故$\dot{V}_{(8)}(\psi)=0$。所以$\psi\in E$，即$\Gamma^+\subset E$。证毕。

§3 某些具体泛函微分方程解的渐近性质

近十多年来，不少数学家对具体的时滞或时超微分方程解的渐近性质进行了大量的研究，获得了非常丰富的成果。在这一节及下一节中我们选择一部份介绍给读者。

1 一阶时滞微分方程解的渐近性[157]

考虑纯量方程

$$x'(t)+p(t)x(t-\tau)=0,\quad t\geqslant t_0. \tag{1}$$

其中$\tau\geqslant 0$为常数，$p(t)$为连续函数，且$\lim\limits_{t\to\infty}p(t)=0$。

大家都知道，方程

$$y'(t)+py(t-\tau)=0, \tag{2}$$

当 $$p>0,\quad 0\leqslant p\tau\leqslant\frac{\pi}{2} \tag{3}$$

时，它的每一个解当$t\to\infty$时趋于零。这是因为(3)式使得(2)的特征方程的每一个根具有负实部，若设$y(t_0,\varphi)$表示方程(2)的过(t_0,φ)的解，$\varphi\in C([-\tau,0],\mathbf{R})$，则由第七章知有如下的指数估计式

$$|y(t_0,\varphi)(t)|\leqslant M\|\varphi\|e^{-\gamma(t-t_0)},\quad t\geqslant t_0. \tag{4}$$

其中M和γ为正常数。

如果$z(t_0,0)$表示方程

$$z'(t)+pz(t-\tau)=h(t),\quad t\geqslant t_0 \tag{5}$$

过$(t_0,0)$的解，则有如下的指数估计式

$$|z(t_0,0)(t)|\leqslant\frac{M}{\gamma}e^{(p+\gamma)\tau}\max_{t_0\leqslant s\leqslant t}|h(s)|. \tag{6}$$

引理1 对方程

$$x'(t)+x(t-\sigma(t))=0,\quad t\geqslant t_0, \tag{7}$$

其中$0\leqslant\sigma(t)\leqslant t$为连续，且$\lim\limits_{t\to\infty}\sigma(t)=\tau<\infty$。如果

$$\tau<\frac{\pi}{2}, \tag{8}$$

则方程(7)的每一个解当$t\to\infty$时趋于零。

证 设$x(t)$是(7)的任意解，取$t_1\geqslant t_0+2\tau+2$使得

$$\sigma(t)\leqslant\tau+1,\quad t\geqslant t_1. \tag{9}$$

$$\frac{M}{\gamma}\cdot e^{(1+\gamma)\tau}|\tau-\sigma(t)|\leqslant\frac{1}{2},\quad t\geqslant t_1. \tag{10}$$

其中M和γ是满足(4)式的两个常数，$p=1$。设$y(t)$为方程

$$y'(t)+y(t-\tau)=0,\quad t\geqslant t_1$$

过(t_1,x_{t_1})的解。由(8)，$y(t)$当$t\to\infty$时趋于零。设

$z(t)=x(t)-y(t)$，则$z(t)$满足方程

$$z'(t)+z(t-\tau)=x(t-\tau)-x(t-\sigma(t)),\quad t\geqslant t_1 \tag{11}$$

且为过$(t_1,0)$的解，应用(6)式，其中$p=1$及

$$h(s)=x(s-\tau)-x(s-\sigma(s)),$$

则有
$$|z(t)|\leqslant\frac{M}{\gamma}e^{(1+\gamma)\tau}\max_{t_1\leqslant s\leqslant t}|x(s-\tau)-x(s-\sigma(s))|.$$

$$(12)$$

使用中值定理和方程(7)，得到

$$|x(s-\tau)-x(s-\sigma(s))| = |\sigma(s)-\tau||x'(\xi)|$$
$$= |\sigma(s)-\tau||x(\xi-\sigma(\xi))|.$$

ξ在$s-\tau$和$s-\sigma(s)$之间，则，置

$$B_1 = \max_{t_0 \leqslant s \leqslant t_1} |x(s)|,$$

便有 $$\max_{t_1 \leqslant s \leqslant t} |x(s-\tau)-x(s-\sigma(s))|$$
$$\leqslant \max_{t_1 \leqslant s \leqslant t} |\sigma(s)-\tau| \cdot \max_{t_0 \leqslant s \leqslant t} |x(s)|$$
$$\leqslant \max_{t_1 \leqslant s \leqslant t} |\sigma(s)-\tau| [B_1 + \max_{t_1 \leqslant s \leqslant t} |x(s)|].$$

于是由(12)式得

$$|x(t)| - |y(t)| \leqslant \frac{M}{\gamma} e^{(1+r)\tau} \max_{t_1 \leqslant s \leqslant t} |\sigma(s) - \tau| [B_1 + \max_{t_1 \leqslant s \leqslant t} |x(s)|]. \quad (13)$$

再由(10)式得

$$|x(t)| \leqslant |y(t)| + \frac{1}{2}[B_1 + \max_{t_1 \leqslant s \leqslant t} |x(s)|].$$

因此对每一个$T \geqslant t_1$及$t_1 \leqslant t \leqslant T$时有

$$|x(t)| \leqslant |y(t)| + \frac{1}{2}[B_1 + \max_{t_1 \leqslant s \leqslant T} |x(s)|].$$

对上式两边取极大值并移项得

$$\max_{t_1 \leqslant s \leqslant T} |x(t)| \leqslant 2 \max_{t_1 \leqslant t \leqslant T} |y(t)| + B_1,$$

可见$x(t)$为有界函数，故存在$B \geqslant B_1$使

$$|x(t)| \leqslant B, \quad t \geqslant t_0.$$

所以(13)得

$$|x(t)| \leqslant |y(t)| + 2B\frac{M}{\gamma} e^{(1+r)\tau} \max_{t_1 \leqslant s \leqslant t} |\sigma(s)-\tau|.$$

故得$\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$。证毕。

定理1 对方程(1)，假定$\tau \geqslant 0$，$p(t) > 0$为连续，又设

$$\int_{t_0}^{\infty} p(t)dt = \infty, \tag{14}$$

$\lim\limits_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t} p(s)ds$ 存在并且

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t} p(s)ds < \frac{\pi}{2}. \tag{15}$$

则方程(1)的一切解当$t\to\infty$时趋于零。

证 置 $u = \sigma(t) \equiv \int_{t_0}^{t} p(s)ds, \quad t \geqslant t_0.$

则反函数σ^{-1}存在及$\lim\limits_{t\to\infty}u(t) = \infty$，又

$$\sigma(t-\tau) = \int_{t_0}^{t-\tau} p(s)ds = \int_{t_0}^{t} p(s)ds - \int_{t-\tau}^{t} p(s)ds$$
$$= u - \int_{\sigma^{-1}(u)-\tau}^{\sigma^{-1}(u)} p(s)ds.$$

于是 $t - \tau = \sigma^{-1}\left(u - \int_{\sigma^{-1}(u)-\tau}^{\sigma^{-1}(u)} p(s)ds\right).$

取变换$z(u) = x(\sigma^{-1}(u))$，则(1)变成

$$z'(u) + z\left(u - \int_{\sigma^{-1}(u)-\tau}^{\sigma^{-1}(u)} p(s)ds\right) = 0. \tag{16}$$

由条件(15)，知方程(16) 满足引理 1 的假 设。因此 $\lim\limits_{u\to\infty} z(u) = \lim\limits_{t\to\infty}x(t) = 0$。证毕。

方程(1)的解称为是振动的，如果它的零点无界且非最终零解。

定理2 对方程(1)，假定$\tau > 0$，$p(t) > 0$为连续，又设

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{t-\tau}^{t} p(s)ds < 1, \tag{17}$$

则方程(1)的振动解当$t\to\infty$时趋于零。

证 设$x(t)$为方程(1)的振动解，当$t\to\infty$时不趋于零。则存在一序列 t_n，$n = 1, 2, \cdots$，$t_{n+1} - t_n \geqslant \tau$，使 得 $x(t_n) = 0$，但在(t_n, t_{n+1})上$x(t) \neq 0$。置

$$S_n = \max_{t_n \leqslant t \leqslant t_{n+1}} |x(t)|, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

现只要证明$t\to\infty$时S_n趋于零就行了。设$\xi_n\in(t_n,\ t_{n+1})$使$S_n=|x(\xi_n)|$及$x'(\xi_n)=0$，$n=1,2,\cdots$。则由(1) 有$x(\xi_n-\tau)=0$。令$\tau_n=\max\{t_n,\ \xi_n-\tau\}$，$n=1,2,\cdots$，从$\tau_n$到$\xi_n$积分(1)得

$$x(\xi_n)=-\int_{\tau_n}^{\xi_n}p(s)x(s-\tau)ds. \tag{18}$$

由于$\tau_n\leqslant s\leqslant\xi_n$，故$t_{n-1}\leqslant s-\tau\leqslant t_{n+1}$。再由(18)，有

$$|x(\xi_n)|\leqslant\int_{\tau_n}^{\xi_n}p(s)|x(s-\tau|ds$$

$$\leqslant\left(\max_{t_{n-1}\leqslant t\leqslant t_{n+1}}|x(t)|\right)\int_{\tau_n}^{\tau_n+\tau}p(s)ds,$$

或者 $$s_n\leqslant(\max\{s_n,\ s_{n-1}\})\int_{\tau_n}^{\tau_n+\tau}p(s)ds.$$

由(17)，当n充分大，例如$n\geqslant n_0$时，有

$$s_n\leqslant s_{n-1}\int_{\tau_n}^{\tau_n+\tau}p(s)ds, \tag{19}$$

现取一数μ使

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{t-\tau}^{t}p(s)ds<\mu<1.$$

则当N充分大，且$n\geqslant N\geqslant n_0$时，有

$$\int_{\tau_n}^{\tau_n+\tau}p(s)ds\leqslant\mu<1.$$

再由(19) 式得

$$s_n\leqslant\mu s_{n-1},\quad n\geqslant N.$$

这蕴含了 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=0$。证毕。

如果在定理2的假定中加上$\int_{t_0}^{\infty}p(s)ds=\infty$，则方程(1) 的一切解当$t\to\infty$时都会趋于零。事实上，如果$x(t)$是 (1) 的非振动的解，但$t\to\infty$不趋零，不妨设$t\geqslant t_1\geqslant t_0$时$x(t)>0$。于是当$t\geqslant t_2\geqslant t_1+\tau$时，$x'(t)=-p(t)x(t-\tau)\leqslant0$，故$x(t)$ 当 $t\geqslant t_2$时为非增函数。因此有

$$x(t)-x(t_2)+x(t-\tau)\int_{t_2}^{t}p(s)ds\leqslant x(t)-x(t_2)$$
$$+\int_{t_2}^{t}p(s)x(s-\tau)ds=0.$$

从而令$t\to\infty$时便导出矛盾。

根据以上的分析并结合定理2便有下面的结果。

定理3 对于方程(1)，如果$\tau\geqslant0$，$p(t)>0$为连续，并且

$$\int_{t_0}^{\infty}p(t)dt=\infty,$$
$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{t-\tau}^{t}p(s)ds<1.$$

则方程(1) 的一切解当$t\to\infty$时趋于零。

例1 考察方程

$$x'(t)+a(2+\cos t)x(t-2\pi)=0,\quad t\geqslant0,$$
$$0<a<\frac{1}{8}. \tag{20}$$

令$p(t)=a(2+\cos t)$，则

$$\int_{0}^{\infty}p(t)dt=\infty,\quad \int_{t-2\pi}^{t}ap(s)ds=4a\pi<\frac{\pi}{2}.$$

这满足定理1的条件，故方程(20) 的一切解当$t\to\infty$时趋于零。

例2 考察方程

$$x'(t)+a(2+\cos t)x(t-\pi)=0,\quad t\geqslant0,$$
$$0<a<\frac{1}{2(\pi+1)}, \tag{20)'$$

令$p(t)=a(2+\cos t)$，则

$$\int_{0}^{\infty}p(t)dt=\infty,\quad \int_{t-\pi}^{t}p(s)ds=2a(\pi+\sin t),$$

而
$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{t-\pi}^{t}p(s)ds=2a(\pi+1)<1.$$

这满足了定理3的条件，故方程(20)′的一切解当$t\to\infty$时趋于零。

2 一类二阶时滞微分方程解的渐近性

文[138]、[139]、[140] 曾分别讨论了下列二阶时滞纯量微

分方程的解的渐近性质：

$$(p(t)y'(t))' + q(t)f(y(g(t))) = r(t)$$

$$(r(t)y'(t))' + p(t)y'(t) + q(t)y(t) + a(t)h(y(g(t))) = f(t)$$

$$(r(t)x')' + p(t)x' + q(t)x = f(t,\ x(t),\ x(g(t)))。$$

在这一节中，我们介绍文[141]的结果，它讨论了比上述方程更为广泛的方程。

$$(r(t)x')' + \sum_{i=0}^{n} p_i(t)g_i'(x(t-\tau_i(t)))$$

$$+ \sum_{i=0}^{n} q_i(t)q_i(x(t-\tau_i(t))) = f(t)。 \quad (21)$$

其中$r(t)$、$q_i(t)$、$g_i(t)$、$f(t)$为连续函数，$p_i(t)$为连续可微，当 $x\neq 0$ 时，$xg_i(x)>0$，$g_i(x)$ 关于 x 单调不减，$r(t)\geqslant 0$，$F(u)=\int_{t_1}^{u}|f(s)|ds$有界。

方程(21)的解$x(t)$称为是振动的，如果$x(t)$不是最终平凡解，且存在一列$\{t_n\}$，$\lim_{n\to\infty} t_n=\infty$，使$x(t_n)=0$，否则称$x(t)$是非振动的。

下面我们分别讨论方程（21）的非振动解和振动解的渐近性质。

① 非振动解的渐近性质

定理1 设

(i) 当$t\geqslant T$时$\int^{\infty}\frac{ds}{r(s)}=\infty$，$r(t)\geqslant k>0$；

(ii) 对$i=0,\ 1,\ \cdots,\ n$，$p_i(t)\geqslant 0$，$p_i'(t)-q_i(t)\leqslant 0$；又存在某正整数$k$，$0\leqslant k\leqslant n$，使得对任何互相不交的区间集$\{[t_j,s_j]\}$，(其中$s_j-t_j>\varepsilon_0$，$j=1,\ 2,\ \cdots$，$\varepsilon_0$为正常数，$j\to\infty$ 时，t_j，s_j，$\to\infty$）有

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_{t_j}^{s_j}[p_k'(s)-q_k(s)]ds=-\infty。 \quad (22)$$

(iii) $0\leqslant\tau_i(t)\leqslant M$, $0\leqslant\tau_i'(t)\leqslant 1$, $i=0, 1, \cdots, n$.

则方程(21) 的所有非振动解皆趋于零。

证 设$x(t)$是方程(21)的非振动解，不妨设当 $t>T_0\geqslant T$ 时 $x(t-\tau_i(t))>0$。故此时有$g_i(x(t))>0$, $g_i(x(t-\tau_i(t))>0$。

由于方程(21) 等价于

$$[(r(t)x'(t)]'+\sum_{i=0}^{n}[p_i(t)g_i(x(t-\tau_i(t)))]'$$
$$+\sum_{i=0}^{n}(q_i(t)-p_i'(t))g_i(x(t-\tau_i(t)))$$
$$=f(t). \tag{23}$$

此时必有

$$\lim_{t\to\infty}\int_{T_0}^{t}(q_k(s)-p_k'(s))g_k(x(s-\tau_k(s)))ds<\infty \tag{24}$$

否则，对(23)式从T_0到$t>T_0$积分。则有

$$r(t)x'(t)+\sum_{i=0}^{n}p_i(t)g_i(x(t-\tau_i(t)))$$
$$\leqslant c-\int_{T_0}^{t}(q_k(s)-p_k'(s))g_k(x(s-\tau_k(s)))ds.$$

令$t\to\infty$，由于 $\sum_{i=0}^{n}p_i(t)g_i(x(t-\tau_i(t)))\geqslant 0$，则得 $r(t)x'(t)\to -\infty$。

故有 $T_1>T_0$，当 $t>T_1$ 时，$x'(t)<-\dfrac{1}{r(t)}$ 即 $x(t)-x(T_1)<-\displaystyle\int_{T_1}^{t}\frac{1}{r(s)}ds$。

由(i)，令$t\to\infty$，得$x(t)<0$，矛盾。故必有(24)式成立。

由(24) 式及 (ii)。推得 $\varliminf_{t\to\infty}g_k(x(t-\tau_k(t)))=0$.

则有 $\varliminf_{t\to\infty}x(t)=0$. $\varliminf_{t\to\infty}x(t-\tau_k(t))=0$.

(否则，有T_2，当$t>T_2$时，$x(t)>\varepsilon_0$。由于$g_k(x)$ 关于 x 单调不减，则当$t>T_2+M$ 时，$g_k(x(t-\tau_k(t)))\geqslant g_k(\varepsilon_0)>0$。矛盾)。

此时，若 $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} x(t)\geqslant 2N>0$。令$h(t)=t-\tau_k(t)$，则 $h'(t)=1-\tau_k'(t)\geqslant 0$。故$h(t)$连续，单调不减，且$\lim\limits_{t\to\infty}h(t)=\infty$。故对任意的$t_j$，总可取到$s_j$，使$h(s_j)=t_j$。则有$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\ x(t-\tau_k(t))\geqslant 2N$。

因此，我们可取到$[a_j,\ b_j]$满足

$x(a_j-\tau_k(a_j))=\dfrac{N}{2}$，$x(b_j-\tau_k(b_j))=\dfrac{3}{2}N$。而对$t\in[a_j,\ b_j]$，$x(t-\tau_k(t))\geqslant\dfrac{N}{2}$。且当$j\to\infty$时，$a_j$、$b_j\to\infty$。

由于$F(u)$有界，$p_i'(t)-q_i(t)\leqslant 0$，对(23) 进行积分，得

$$r(t)x'(t)+\sum_{i=0}^{n}p_i(t)g_i(x(t-\tau_i(t)))<k.$$

k为某一常数。

由(i)，且$p_i(t)\geqslant 0$，故得$x'(t)<\dfrac{1}{k}k$.

由于$\tau_k'(t)\geqslant 0$，则

$$x'(t-\tau_k(t))=x'(h)\ \ (1-\tau_k'(t))<\frac{1}{k}k.$$

故必有 $-\varepsilon_0>0$存在，使$b_j-a_j>\varepsilon_0$对所有j都成立。则

$$\int_{T}^{\infty}(q_k(s)-p_k'(s))g_k(x(s-\tau_k(s)))ds$$

$$\geqslant\sum_{i=0}^{\infty}\int_{a_j}^{b_j}(q_k(s)-p_k'(s))g_k(x(s-\tau_k(s)))ds$$

$$\geqslant g_k\left(\frac{N}{2}\right)\sum_{i=0}^{\infty}\int_{a_j}^{b_j}(q_k(s)-p_k'(s))ds=+\infty.$$

这与(24)式矛盾，故必有 $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}x(t)=0$.

对$x(t)\stackrel{\checkmark}{<}0$的情形同样可证，证毕。

定理2 设

(i) $\displaystyle\int^{\infty}\frac{ds}{r(s)}=\infty$，且当$b-a$有界时$\displaystyle\int_a^b\frac{ds}{r(s)}$有界；

(ii) 对$i=0, 1, \cdots, n$，$p_i(t)\geq 0$，$\lim\limits_{t\to\infty}p_i(t)=0$，且 $p_i'(t)-q_i(t)\leq 0$，又当 $b_j-a_j\to\infty$时，$\int_{a_j}^{b_j}(p_i'(s)-q_i(s))ds\to-\infty$；

(iii) 当$|x|$充分大时，$|g_i(x)|\leq m|x|$，m为正常数；

(iv) $0\leq\tau_i(t)\leq M$，

则方程(21) 的所有非振动解皆趋于零。

证 设$x(t)$是方程(21)的一个非振动解，不妨设当 $t>T$ 时 $x(t)>0$，$x(t-\tau_i(t))>0$，则有$g_i(x(t-\tau_i(t)))>0$。

与定理1的证明相同，此时对所有的$k=0, 1, \cdots, n$，都有(24)式成立。由(24)式及(ii)，有$\varliminf\limits_{t\to\infty}x(t)=0$

再证$\varlimsup\limits_{t\to\infty}x(t)=0$，为此，先证$x(t)$有界。

若$x(t)$无界，则可取到a_j，T_j，b_j满足：$a_j<T_j<b_j$，$x(a_j)=x(b_j)=\frac{1}{2}x(T_j)$，当$t\leq b_j$时，$x(t)\leq x(T_j)$，且对$t\in[a_j, b_j]$，有 $x(t)\geq\frac{1}{2}x(T_j)$，而$x'(a_j)\geq 0$，$x'(b_j)\leq 0$，当$j\to\infty$时，$a_j$，$b_j$，$T_j$，$x(T_j)$皆趋于无穷。

此时必有$\{b_j-a_j\}$有界，因为，若有一列$b_j-a_j\to\infty$，则

$$\begin{aligned}&\int_{a_j}^{b_j}(p_k'(s)-q_k(s))g_k(x(s-\tau_k(s)))ds\\ \geq&\int_{a_j+M}^{b_j}(p_k'(s)-q_k(s))g_k(x(s-\tau_k(s)))ds\\ \geq& g_i\left(\frac{1}{2}x(T_j)\right)\int_{a_j+M}^{b}(p_k'(s)-q_k(s))ds\to\infty.\end{aligned}$$

这与(24) 式矛盾。

又由(i)，$A_j=\int_{a_j}^{b_j}\frac{1}{r(s)}ds<A<\infty$。

记$M_j=x(T_j)$，由于

$$M_j=\int_{a_j}^{T_j}x'(s)ds-\int_{T_j}^{b_j}x'(s)ds$$

$$\leqslant \int_{a_j}^{b_j} |x'(s)| ds = \int_{a_j}^{b_j} r(s)^{-\frac{1}{2}} r(s)^{\frac{1}{2}} |x'(s)| ds.$$

利用Cauchy积分不等式，有

$$M_j^2 \leqslant \left(\int_{a_j}^{b_j} |x'(s)| ds \right)^2$$

$$\leqslant \int_{a_j}^{b_j} \frac{1}{r(s)} ds \int_{a_j}^{b_j} r(s) x'(s)^2 ds$$

$$= A_j \int_{a_j}^{b_j} [(r(s)x'(s)x(s))' - x(s)(r(s)x'(s))'] ds$$

$$\leqslant A_j \int_{a_j}^{b_j} x(s) \Big[\sum_{i=0}^{n} p_i(s) g_i'(x(s-\tau_i(s)))$$

$$+ \sum_{i=0}^{n} q_i(s) g_i(x(s-\tau_i(s))) - f(s) \Big] ds$$

$$= A_j \Big[x(b_j) \sum_{i=0}^{n} p_i(b_j) g_i(x(b_j - \tau_i(b_j))) - x(a_j)$$

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(a_j) g_i(x(a_j - \tau_i(a_j)))$$

$$+ \sum_{i=0}^{n} \int_{a_j}^{b_j} (q_i(s) - p_i'(s)) x(s) g_i(x(s-\tau_i(s))) ds$$

$$- \sum_{i=0}^{n} \int_{a_j}^{b_j} p_i(s) g_i(x(s-\tau_i(s))) x'(s) ds$$

$$- \int_{a_j}^{b_j} f(s) x(s) ds \Big]. \tag{25}$$

由(ii)，当t充分大时，可有

$$p_i(t) \leqslant (4(A+1)(n+1)(m+1))^{-1}.$$

由(24) 式，当j充分大时，可使

$$\int_{a_j}^{b_j} (q_i(s) - p_i'(s)) g_i(x(s-\tau_i(s))) ds$$

$$< (8(A+1)(n+1))^{-1}$$

对所有的i成立。

由于$F(u)$有界，故当j充分大，有

$$\int_{a_j}^{b_j}|f(s)|ds<\frac{1}{8(A+1)}.$$

将以上估计代入(25)式，则有

$$\left(\int_{a_j}^{b_j}|x'(s)|ds\right)^2\leqslant A\Big[\frac{M_j}{2}mM_j(n+1)$$

$$\cdot\frac{1}{4(A+1)(n+1)(m+1)}+M_j(n+1)\frac{1}{8(A+1)(n+1)}$$

$$+mM_j(n+1)\frac{1}{4(A+1)(m+1)(n+1)}$$

$$\cdot\int_{a_j}^{b_j}|x'(s)|ds+M_j\frac{1}{8(A+1)}\Big]$$

$$\leqslant\frac{1}{8}M_j^2+\frac{1}{4}M_j+\frac{1}{4}M_j\int_{a_j}^{b_j}|x'(s)|ds.$$

故有 $$\int_{a_j}^{a_j}|x'(s)|ds\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}M_j+\sqrt{\frac{1}{16}M_j^2+\frac{1}{2}M_j^2+M_j}\right).$$

由于 $M_j\leqslant\int_{a_j}^{b_j}|x'(s)|ds$，两边同乘以 $\frac{1}{M_j}$，则有

$$1\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}+\frac{1}{M_j}}\right).$$

只要$M_j>4$，则右边小于$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+1\right)<1$，得到矛盾，故$x(t)$必定有界。设$x(t)<k$。

再证$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}x(t)=0$。

若不然，设$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}x(t)=2\varepsilon_0>0$。与前面同样可取到$a_j$，$T_j$，$b_j$，使$x(a_j)=x(b_j)=\frac{\varepsilon_0}{2}x'(a_j)\geqslant0$，$x'(b_j)\leqslant0$，$x(T_j)=\max\limits_{t\in[a_j,b_j]}x(t)>\varepsilon_0$，且对$t\in[a_j,b_j]$，$x(t)\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2}$，$\{b_j-a_j\}$ 有界。此时同样有$\varepsilon_0\leqslant\int_{a_j}^{b_j}|x'(s)|ds$。故

$$\varepsilon_0^2 \leqslant \left(\int_{a_j}^{b_j} |x'(s)|ds\right)^2 \leqslant \int_{a_j}^{b_j} \frac{1}{r(s)}ds \int_{a_j}^{b_j} r(s)x'(s)^2 ds$$

$$= A_j \int_{a_j}^{b_j} [(r(s)x'(s)x(s))' - x(s)(r(s)x'(s))']ds$$

$$\leqslant A\Big[\sum_{i=0}^{n} x(b_j)p_i(b_j)g_i(x(b_j - \tau_i(b_j)))$$

$$+ \sum_{i=0}^{n} \int_{a_j}^{b_j} (q_i(s) - p_i'(s))x(s)g_i(x(s - \tau_i(s)))ds$$

$$- \sum_{i=0}^{n} \int_{a_j}^{b_j} p_i(s) \cdot g_i(x(s - \tau_i(s)))x'(s)ds$$

$$\int_{a_j}^{b_j} x(s)f(s)ds\Big]$$

当j充分大时，同样可使

$$p_i(t) \leqslant \varepsilon_0(4Ag_i(k)(n+1))^{-1}, \quad t \geqslant a_j;$$

$$\int_{a_j}^{b_j} (q_i(s) - p_i'(s))g_i(x(s - \tau_i(s)))ds$$

$$\leqslant \varepsilon_0^2(32Akn)^{-1}$$

对所有的i成立；

$$\int_{a_j}^{b_j} |f(s)|ds \leqslant \varepsilon_0^2(32Ak)^{-1}.$$

则有 $$\left(\int_{a_j}^{b_j} |x'(s)|ds\right)^2$$

$$\leqslant A\Big[\sum_{i=0}^{n} \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \varepsilon_0(4Ag_i(k)(n+1))^{-1} \cdot g_i(k)$$

$$+ nk\varepsilon_0^2(32Akn)^{-1}$$

$$+ \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_0(4Ag_i(k)(n+1))^{-1} \cdot g_i(k)$$

$$\cdot \int_{a_j}^{b_j} |x'(s)|ds + k\varepsilon_0^2(32Ak)^{-1}\Big]$$

$$\leqslant \frac{1}{8}\varepsilon_0^2 + \frac{1}{32}\varepsilon_0^2 + \frac{1}{32}\varepsilon_0^2 + \frac{1}{4}\varepsilon_0 \cdot \int_{a_j}^{b_j} |x'(s)|ds.$$

即 $$\varepsilon_0 \leqslant \int_{a_j}^{b_j} |x'(s)| ds$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\varepsilon_0 + \sqrt{\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\varepsilon_0^2}\right) < \varepsilon_0.$$

得到矛盾。故有$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} x(t)=0$。

对$x(t)<0$的情形同样可证，证毕。

从定理2的证明中，我们有

推论1 若将定理2中条件(ii) 改为

(ii)′ $p_i(t) \geqslant 0$，$\lim\limits_{t\to\infty} p_i(t)=0$，$p_i'(t)-q_i(t) \leqslant 0$，$i=0, 1, \cdots, n$，且对$i \geqslant 1$，有

$\int_a^b (p_i'(s)-q_i(s))ds \to -\infty$，只要$b-a\to\infty$；而当 $b-a\to\infty$时，

$\int_a^b \left(\frac{1}{2}p_0'(s)-q_0(s)\right)ds \to -\infty$。其余条件不变，则方程(21)的所有非振动解皆趋于0。

这只要注意到

$$\int_{a_j}^{b_j} p_0(s)x'(s)x(s)ds = \frac{1}{2}(p_0(b_j)x(b_j)^2$$
$$-p_0(a_j)x(a_j)^2 - \int_{a_j}^{b_j} p_0'(s)x(s)^2 ds)$$

即可

②振动解的渐近性质

定理3 设

(i) $\int^{\infty} \frac{ds}{r(s)} < \infty$；

(ii) $\int^{\infty} |q_i(s)-p_i'(s)| ds < \infty$，$|p_i(t)| < B$，$i=1,2,\cdots,n$，

B为某常数，$\int^{\infty} |q_0(s)-\frac{1}{2}p_0'(s)| ds < \infty$；

(iii) 当$|x|$充分大时，$|g_i(x)| \leqslant m|x|$，m为正常数，

(iv) $0 \leqslant \tau_i(t) \leqslant t$, $\lim\limits_{t\to\infty}[t-\tau_i(t)] = \infty$.

则方程(21) 的所有振动解趋于零，非振动解的极限存在（指为常数或趋于无穷大）。

证 设$x(t)$是方程(21) 的振动解，先证$x(t)$为有界。用反证法，若$x(t)$无界，则可取到a_j和b_j，$j=1, 2, \cdots$，使得 $x(a_j) = x(b_j) = 0$，对 $t \in (a_j, b_j)$，$x(t)$ 不变号。记$M_j = |x(s_j)| = \max\limits_{a_j<t<b_j} |x(t)|$，可使当$t \leqslant b_j$时，$|x(t)| \leqslant M_j$，且当$j\to\infty$时，

$a_j\to\infty$，$b_j\to\infty$，$M_j\to\infty$。此时，我们有

$$2M_j = \left|\int_{a_j}^{s_j} x'(t)dt - \int_{s_j}^{b_j} x'(t)dt\right| \leqslant \int_{a_j}^{b_j} |x'(s)|ds.$$

利用Cauchy积分不等式得

$$4M_j^2 \leqslant \left(\int_{a_j}^{b_j} |x'(s)|ds\right)^2 \leqslant \int_{a_j}^{b_j} \frac{ds}{r(s)} \int_{a_j}^{b_j} r(s)x'(s)^2 ds.$$

记 $A_j = \int_{a_j}^{b_j} \frac{ds}{r(s)}$，$B_j = \int_{a_j}^{b_j} |x'(s)|ds$

于是有 $$4M_j^2 \leqslant B_j^2 \leqslant A_j \int_{a_j}^{b_j} [(r(s)x(s)x'(s))' - x(s)(r(s)x'(s))']ds$$

$$\leqslant A_j \int_{a_j}^{b_j} x(s)\left[\sum_{i=0}^{n} (p_i(s)g_i'(x(s-\tau_i(s))) + \sum_{i=0}^{n} q_i(s)g_i(x(s-\tau_i(s))) - f(s)\right]ds.$$

由于 $g_0(x(t-\tau_0(t))) = x(t)$，故

$$\int_{a_j}^{b_j} x(s)[p_0(s)g_0'(x(s-\tau_0(s))) + q_0(s)g_0(x(s-\tau_0(s)))]ds$$

$$= \int_{a_j}^{b_j} x(s)^2 (q_0(s) - \frac{1}{2}p_0'(s))ds. \tag{26}$$

因此， $$B_j^2 \leqslant A_j\left\{\int_{a_j}^{b_j}\left[\sum_{i=1}^{n} x(s)(q_i(s) - p_i'(s))g_i(x(s-\tau_i(s)))\right.\right.$$

$$-\sum_{i=1}^{n} x'(s)p_i(s)g_i(x(s-\tau_i(s)))\,|ds$$

$$+\int_{a_j}^{t_j} x^2(s)\Big(q_0(s)-\frac{1}{2}p_0'(s)\Big)ds-\int_{a_j}^{t_j} f(s)x(s)ds\Big\}$$

$$\leqslant A_j\Big\{\sum_{i=1}^{n} M_j m M_j\int_{a_j}^{b_j}|q_i(s)-p_i'(s)|ds$$

$$+nBmM_j\int_{a_j}^{b_j}|x'(s)|ds+M_j^2\int_{a_j}^{b_j}|q_0(s)$$

$$-\frac{1}{2}p_0'(s)|ds+M_j\int_{a_j}^{b_j}|f(s)|ds\Big\}. \qquad (27)$$

由条件（ii）及$f(t)$的绝对可积性，当j充分大时，可使

$$M_j^2 m\sum_{i=1}^{n}\int_{a_j}^{b_j}|q_i(s)-p_i'(s)|ds+M_j^2\int_{a_j}^{b_j}|q_0(s)$$

$$-\frac{1}{2}p_0'(s)|ds+M_j\int_{a_j}^{b_j}|f(s)|ds<cM_j^2. \qquad (28)$$

其中c为某常数。

从而 $\beta_j^2\leqslant A_jcM_j^2+A_jnBmM_j\beta_j^2$,

故有 $2M_j\leqslant\beta_j^2\leqslant\frac{1}{2}(A_jnmM_jB+\sqrt{A_j^2M_j^2c_1^2+4A_jcM_j^2})$.

其中$c_1=nBm$。

于是有 $2\leqslant\frac{1}{2}(A_jc_1+\sqrt{A_j^2c_1^2+4A_jc})$.

由(i)，令$j\to\infty$，则上式右边趋于零，导出了矛盾。故$x(t)$必定有界。设$|x(t)|<k$。

若此时 $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}|x(t)|=\varepsilon_0>0$，则可取到$a_j$、$s_j$、$b_j$使得$x(a_j)$

$=x(b_j)=0$，$|x(s_j)|=\max\limits_{a_j\leqslant t\leqslant b_j}|x(t)|>\frac{\varepsilon_0}{2}$，且当$t\to\infty$时，$a_j$、$b_j$、$s_j\to\infty$。

由于 $\varepsilon_0 \leqslant \left|\int_{a_j}^{t_j} x'(s)ds\right| + \left|\int_{t_j}^{b_j} x'(s)ds\right| \leqslant \int_{a_j}^{b_j} |x'(s)|ds$,

故此时同样有(26) 式成立。因此,

$$\beta_j^2 \leqslant A_j\Big[k\sum_{i=1}^{n}|g_i(k)|\int_{a_j}^{b_j}|q_i(s)-p_i'(s)|ds$$

$$+B\sum_{i=1}^{n}|g_i(k)|\int_{a_j}^{b_j}|x'(s)|ds + k^2\int_{a_j}^{b_j}\Big|q_0(s)$$

$$-\frac{1}{2}p_0'(s)\Big|ds + k\int_{a_j}^{b_j}|f(s)|ds\Big].$$

显然(28) 式同样成立,其中$M_j=k$。

记 $G=\sum_{i=1}^{n}|g_i(k)|$,则有

$$\beta_j^2 \leqslant A_j ck^2 + A_j BGB_j.$$

故
$$\varepsilon_0 \leqslant \beta_j^2 \leqslant \frac{1}{2}(A_jBG+\sqrt{A_j^2B^2G^2+4A_jck^2}.$$

令$j\to\infty$,则$A_j\to 0$,从而导出$\varepsilon_0\leqslant 0$的矛盾。故必有$\overline{\lim_{t\to\infty}}|x(t)|=0$,即证明了方程(21) 的振动解趋于零。

对方程(21) 的非振动解$x(t)$,若$x(t)$ 的极限不存在,则存在p,使$\overline{\lim_{t\to\infty}}x(t)>p>\underline{\lim_{t\to\infty}}x(t)$。令$y(t)=x(t)-p$,则$y(t)$振动。

注意到定理3中实际上并不要求满足条件$xg_i(x)>0$,只 要求$g_i(x)$关于x单调且(iii)成立即可,故若令$\overline{g_i}(y(t)=g_i(y(t)+p)$,则$y(t)$是方程

$$(r(t)y'(t))' + \sum_{i=0}^{n}p_i(t)\overline{g_i}(y(t-\tau_i(t)))$$

$$+\sum_{i=0}^{n}q_i(t)\overline{g_i}(y(t-\tau_i(t)))=f(t)$$

的振动解,且满足定理条件。故由上面的证明,应有 $y(t)\to 0$, 即

$x(t)\to p$，故$x(t)$的极限存在。证毕

〔注〕 若定理3中的条件(ii) 改为

(ii)′ 对 $1\leqslant i\leqslant n$，$|p_i(t)|<B$，$\int^{\infty}|p_i'(s)-q_i(s)|ds<\infty$，又$\frac{1}{2}p_0'(t)\geqslant q_0(t)$，

或 (ii)″ 对$0\leqslant i\leqslant n$，$|p_i(t)|<B$，$\int^{\infty}|q_0(s)|ds<\infty$， 对$1\leqslant i\leqslant n$，$\int^{\infty}|q_i(s)-p_i'(s)|ds<\infty$，

或 (ii)‴ 对$0\leqslant i\leqslant n$，$|p_i(t)|<B$，$\int^{\infty}|q_i(s)-p_i'(s)|ds<\infty$。

则定理3的结论仍然成立。

§4 超（次）线性泛函微分方程解的渐近性质

近十年来，日本数学家T. Kusano，H. Ouose等人对超（次）线性的泛函微分方程解的渐近性和振动性作了深入的研究。得到了很丰富的成果，例如〔152〕、〔153〕、〔154〕、〔155〕等等。但他们所考虑的超（次）线性的泛函微分方程，都是只含一个偏差变元的。文〔156〕，〔142〕则研究了多个偏差变元的二阶超（次）线性泛函微分方程解的渐近性和振动性。

下面介绍文〔156〕的结果。

考虑纯量方程

$$[r(t)x'(t)]'+\sum_{i=1}^{m}f_i(t,x(g_{i1}(t)),\cdots,x(g_{in}(t)))=0。\quad (E)$$

我们假定：

(i) $r(t)$对$t\geqslant a$连续正值；

(ii) $g_{ij}(t)$，$i=1, 2, \cdots, m$，$j=1, 2, \cdots, n$，对$t\geqslant a$连续，且当$t\to\infty$时趋于∞；

(iii) $f_i(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$连续，且当$x_1, x_2, \cdots, x_n$同号时$f_i$与它们同号，$i=1, 2, \cdots, m$；

定义1 若存在$p_i(t)\geqslant 0$，$i=1, 2, \cdots, n$，$\sum_{i=1}^{n} p_i(t)>0$，使得当$x_i\geqslant y_i>0$或$x_i\leqslant y_i<0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$时，有

$$\frac{f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(t)x_i}\geqslant\frac{f(t, y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(t)y_i} \tag{2}$$

则称f是超线性的。如果不等式(2) 反号，则称f是次线性的。

下面采用如下的记号

$$R(t)=\int_a^t \frac{ds}{r(s)}, \quad R(t, t_1)=\int_{t_1}^{t} \frac{ds}{r(s)},$$

$$\rho(t)=\int_t^{\infty}\frac{ds}{r(s)}.$$

$\sum_{i=1}^{m} f_i(t, x(g_{i1}(t)), \cdots, x(g_{in}(t)))$简记为$f(t, x(g(t)))$。

引理1 设$\int^{+\infty}\frac{dt}{r(t)}=+\infty$。若$x(t)$是(E)的最终正解。则存在正数$T$，$c_1$，$c_2$使

$$x'(t)>0, \qquad t\geqslant T$$
$$c_1\leqslant x(t)\leqslant c_2R(t).$$

证 设$t\geqslant t_0$，$x(g_{ij}(t))>0$，$(i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n)$

反证法。若存在$t_1>t_0$，使$x'(t_1)\leqslant 0$。

把(E)从t_1到t积分得

$$r(t)x'(t)-r(t_1)x'(t_1)+\int_{t_1}^{t} f(s, x(g(s)))ds=0.$$

两边同除$r(t)$，再从$t_2(>t_1)$到t积分得

$$x(t)-x(t_2)-r(t_1)x'(t_1)\int_{t_2}^{t}\frac{ds}{r(s)}+\int_{t_2}^{t}\Big[\frac{1}{r(s)}\int_{t_1}^{s} f(\theta,$$

$x(g(\theta)))d\theta\Big]ds=0$。

令$t\to+\infty$，得$x(t)\to-\infty$，与假设矛盾。

故$x'(t)>0$。所以，存在$c_1>0$，使$x(t)\geqslant c_1$，又由上式。存在$c_2>0$,使$x(t)\leqslant c_2R(t)$。

引理证毕。

引理2 设$\int^{+\infty}\frac{dt}{r(t)}<+\infty$。若$x(t)$是$(E)$的最终正解。则存在正数$T$，$c_1$，$c_2$使当$t\geqslant T$时，

$x(t)\geqslant-r(t)x'(t)\rho(t)$，$c_1\rho(t)\leqslant x(t)\leqslant c_2$。

证 设$t\geqslant t_0$，$x(g_{ij}(t))>0$，$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，

分四步证明。

1° 证明$\int_{t_0}^{+\infty}\rho(s)f(s,\ x(g(s))ds<+\infty$。

若不然，设$\int_{t_0}^{+\infty}\rho(s)f(s,\ x(g(s)))ds=+\infty$。把(E)两边同乘以$\rho(t)$，再从$t_0$到$t$积分得：

$$\rho(t)r(t)x'(t)-\rho(t_0)r(t_0)x'(t_0)+x(t)-x(t_0)$$
$$+\int_{t_0}^{t}\rho(s)f(s,\ x(g(s)))ds=0。\qquad(3)$$

即得$\lim\limits_{t\to\infty}\rho(t)r(t)x'(t)=-\infty$。从而，存在$t_1\geqslant t_0$，$M>0$，使得，当$t\geqslant t_1$时，$\rho(t)r(t)x'(t)\leqslant-M$。

两边除以$\rho(t)r(t)$，再从t_1到t积分得

$$x(t)-x(t_1)\leqslant M\ \ln\left[\frac{\rho(t)}{\rho(t_1)}\right].$$

因为$\rho(t)\to0$，所以$x(t)\to-\infty$，与假设矛盾。于是1)成立。

2° 证明$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=+\infty$是不可能的。

若不然，设$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=+\infty$。把(E)从$t_0$到$t$积分得

$$r(t)x'(t)-r(t_0)x'(t_0)+\int_{t_0}^{t} f(s,\ x(g(s)))ds=0.$$

两边同除$r(t)$，再从t_0到t积分得

$$x(t)=x(t_0)+\rho(t_0)r(t_0)x'(t_0)-\rho(t)r(t_0)x'(t_0)$$
$$+\int_{t_0}^{t}\left[\frac{1}{r(s)}\int_{t_0}^{s} f(\theta,\ x(g(\theta)))d\theta\right]ds. \tag{4}$$

由此推出，$\rho(t)\to\infty(t\to+\infty)$，与$\rho(t)\to 0$矛盾。

3° 证明引理的第一部分。

(a) 首先证明$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)$存在且有限。

有限性，2° 已证。下面证明存在性。若不然，存在ξ，η使

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}x(t)<\xi<\eta<\overline{\lim_{t\to+\infty}}x(t)$$

那么存在序列$\{t_n\}$，$t_n\to+\infty$，满足

$x'(t_n)=0$，$x(t_{2n-1})<\xi<\eta<x(t_{2n})$，

于是，$\rho(t_n)r(t_n)x'(t_n)+x(t_n)=x(t_n)$。

由(3)及1°，$\lim\limits_{t\to+\infty}[\rho(t)r(t)x'(t)+x(t)]$存在且为有限，故$\lim\limits_{n\to+\infty}[\rho(t_n)r(t_n)x'(t_n)+x(t_n)]$存在。由此推出，$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t_n)$存在，与$x(t_n)$的取法矛盾。

(b) 证明3°。由(4) 得到

$$x(t_0)+\rho(t_0)r(t_0)x'(t_0)-\int_{t_0}^{t}\left[\frac{1}{r(s)}\int_{t_0}^{s} f(\theta,x(g\theta)))d\theta\right]ds$$
$$=x(t)+\rho(t)r(t_0)x'(t_0).$$

改变一下记号，$t_0\to t$，$t\to T$。令$T\to+\infty$得

$$x(t)+\rho(t)r(t)x'(t)-\int_{t}^{+\infty}\rho(s)f(s,\ x(g(s)))ds=\lim_{T\to+\infty}x(T)$$

所以 $x(t)+\rho(t)r(t)x'(t)-\int_{t}^{+\infty}\rho(s)f(s,\ x(g(s)))ds\geqslant 0$,

$$t\geqslant t_0. \tag{5}$$

即 $x(t)+\rho(t)r(t)x'(t)\geqslant 0$，$t\geqslant t_0$。

4° 证明引理第二部分。

取t_1充分大，于是当$t\geqslant t_1$时，仿(4)有

$$x(t)=x(t_1)+\rho(t_1)r(t_1)x'(t_1)-\rho(t)r(t_1)x'(t_1)$$

$$-\int_{t_1}^{t}\left[\frac{1}{r(s)}\int_{t_1}^{s}f(\theta,x(g(\theta)))d\theta\right]ds$$

$$\leqslant x(t_1)+2\rho(t_1)r(t_1)|x'(t_1)|\overset{\Delta}{=}a_2.$$

又因(5)式，$x(t_1)+\rho(t_1)r(t_1)x'(t_1)-\int_{t_1}^{t}\left[\frac{1}{r(s)}\int_{t_1}^{s}f(\theta,\right.$

$$\left.x(g(\theta)))d\theta\right]ds\geqslant 0.$$

故，若$x'(t_1)<0$，那么 $x(t)\geqslant\rho(t)|r(t_1)x'(t_1)|\overset{\Delta}{=}a_1\rho(t)$。若$x'(t_1)\geqslant 0$，不妨设$t\geqslant t_1$，总有$x'(t)\geqslant 0$（不然归于前一情形），即$x(t)$非减，$t\geqslant t_1$，于是

$$x(t)\geqslant x(t_1)=\frac{x(t_1)}{\rho(t_1)}\rho(t_1)\geqslant\frac{x(t_1)}{\rho(t_1)}\rho(t)\overset{\Delta}{=}a_1\rho(t).$$

引理证毕。

〔注〕：若$x(t)$是(E)的最终负解，我们有类似引理1，引理2的结果，只要把c_1、c_2改成负数，不等式反号。

定理1 设$\int^{+\infty}\frac{dt}{r(t)}=+\infty$。方程$(E)$的非振动解的渐近性质有且仅有以下三种类型：

A_c^0型 $x(t)\to c\neq 0$，$r(t)x'(t)\to 0$ $(t\to+\infty)$。

A_∞^c型 $x(t)\to\infty$，$r(t)x'(t)\to c\neq 0$ $(t\to+\infty)$。

A_∞^0型 $x(t)\to\infty$，$r(t)x'(t)\to 0$ $(t\to+\infty)$。

证 由引理1及注，$x(t)$与$x'(t)$同号，所以$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)$存在且不为零，故只有

$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=c\neq 0$，或$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=\infty$。

1) 若$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=c$，不妨设$c>0$，那么最终有$x(t)>0$，$r(t)x'(t)>0$。由方程$(E)$，$[r(t)x'(t)]'\leqslant 0$，即$r(t)x'(t)$非

增，所以$\lim\limits_{t\to+\infty} r(t)x'(t)$存在。可以证明，必有$\lim\limits_{t\to+\infty} r(t)x'(t)=0$。若不然，设$\lim\limits_{t\to+\infty} r(t)x'(t)=\tilde{c}>0$，那么 $r(t)x'(t)\geqslant\tilde{c}$。于是，$x'(t)\geqslant\dfrac{\tilde{c}}{r(t)}$。两边积分得

$x(t)\to+\infty(t\to+\infty)$，与假设矛盾。

2）若$\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=\infty$，不妨设$x(t)\to+\infty$。因$\lim\limits_{t\to+\infty} r(t)x'(t)$存在。根据罗必塔法则，$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x(t)}{R(t)}=\lim\limits_{t\to+\infty} r(t)x'(t)$。

由引理1，$0\leqslant\dfrac{x(t)}{R(t)}\leqslant c_2$，故只有

$\lim\limits_{t\to+\infty} r(t)x'(t)=c\neq0$，或$\lim\limits_{t\to+\infty} r(t)x'(t)=0$。

定理得证。

定理2 设$\int^{+\infty}\dfrac{ds}{r(s)}<+\infty$。方程$(E)$的非振动解的渐近性质有且仅有以下三种类型：

A_c型 $x(t)\to c\neq0$ $(t\to+\infty)$。

A_0^c型 $x(t)\to0$，$r(t)x'(t)\to c\neq0$ $(t\to+\infty)$。

A_0^∞型 $x(t)\to0$，$r(t)x'(t)\to\infty$ $(t\to+\infty)$。

证 从引理2的证明中得出$\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$存在且只有$\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=0$，或$\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=c\neq0$。又根据$(E)$的性质，$\lim\limits_{t\to+\infty} r(t)x'(t)$存在或为无穷大。当$\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=0$且$\lim\limits_{t\to+\infty} r(t)x'(t)$存在时，由罗必塔法则得

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{x(t)}{\rho(t)}=-\lim_{t\to+\infty} r(t)x'(t)。$$

根据引理2，只有

$\lim\limits_{t\to+\infty} r(t)x'(t)=c\neq0$，或$\lim\limits_{t\to+\infty} r(t)x'(t)=\infty$，

定理得证。

定理3 设$\int^{+\infty}\dfrac{dt}{r(t)}=+\infty$，$f_i(i=1, 2, \cdots, n)$均为超线

性，或次线性，那么(E)有A_c^0型非振动解的充要条件是

$$\int^{+\infty} R(t)\left|\sum_{1}^{m} f_i(t,\ c,\ c,\ \cdots,\ c)\right| dt<\infty,\ \text{对某一} c\neq 0, \tag{6}$$

证 必要性。设$x(t)$是A_c^0型非振动解。可以假设$x(t)>0$。根据引理1，存在正数t_1，c_1，c_2使得当$t\geqslant t_1$时

$$x'(t)>0,$$

$$c_1\leqslant x(g_{ij}(t))\leqslant c_2,\ (i=1,2,\cdots,\ m;\ j=1,2,\cdots,\ n).$$

用$R(t)$乘以方程(E)，再从t_1到t积分得

$$R(t)r(t)x'(t)-R(t_1)r(t_1)x'(t_1)-x(t)+x(t_1)$$

$$+\int_{t_1}^{t} R(s)f(s,\ x(g(s)))ds=0,$$

$$\therefore \qquad \int_{t_1}^{+\infty} R(s)f(s,\ x(g(s)))ds<+\infty.$$

故 f超线性时 $\int_{t_1}^{+\infty} R(t)\sum_{1}^{m} f_i(t,\ c_1,\ c_1,\ \cdots,\ c_1)dt<+\infty,$

f次线性时 $\int_{t_1}^{+\infty} R(t)\sum_{1}^{m} f_i(t,\ c_2,\ c_2\cdots,\ c_2)dt<+\infty.$

充分性。设(6)中$c>0$。若f超线性，令 $a=\frac{c}{2}$，若f次线，令$a=c$。

选取$T>a$，充分大，使

$$\int_{T}^{+\infty} R(t)f(t,\ c)dt<\frac{a}{2}.$$

考虑积分方程

$$x(t)=a+\int_{T}^{t} R(s)f(s,\ x(g(s)))ds$$

$$+R(t)\int_{t}^{+\infty} f(s,\ x(g(s)))ds. \tag{7}$$

显然(7)的解是(E)的解。

作Banach空间$CB[T,\infty)$：所有有界连续函数$x(t)$：$[T,\ \infty)$

$\to R$,　范数 $\|x\| = \sup\limits_{t\geq T}|x(t)|$。

令$X = \{x\in CB[T, \infty);\ a\leqslant x(t)\leqslant 2a,\ t\geqslant T\}$

那么X是$CB[T, \infty)$中的有界凸闭集。

作算子ϕ：$X\to CB[T, \infty)$

$$(\phi x)(t) = a + \int_T^t R(s)f(s, x(g(s)))ds + R(t)\int_t^{+\infty} f(s,$$

$x(g(s)))ds$。

其中当$t\in[T, \infty)$，$g_{ij}(t)\leqslant T$时，令$x(g_{ij}(t)) = x(T)$。

我们采用schauder不动点原理来证明ϕ在X中有不动点。

(i) $\phi X\subseteq X$。设$x\in X$，那么当$t\geqslant T$时，

$$a\leqslant(\phi x)(t)\leqslant a + \int_T^{+\infty} R(s)f(s, x(g(s)))ds$$

$$\leqslant a + 2\int_T^{+\infty} R(s)f(s, c)ds\leqslant 2a.$$

(ii) ϕ连续。设$\|x_n - x\|\to 0(n\to\infty)$，$x_n\in X$，因$X$是闭集，所以$x\in X$。于是

$$|(\phi x_n)(t) - (\phi x)(t)|\leqslant\int_T^{+\infty} R(s)|f(s, x_n(g(s))) - f(s,$$

$x(g(s)))|ds$。

由勒贝格控制收敛定理，$\lim\limits_{n\to+\infty}\|\phi x_n - \phi x\| = 0$。

(iii) ϕX相对紧。即要证明$\{\phi x;\ x\in X\}$一致有界，等度连续。一致有界性很显然，只要证明等度连续性。

设$x\in X$。$t_2 > t_1\geqslant T$

$$(\phi x)(t_2) - (\phi x)(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} R(s)f(s, x(g(s)))ds$$

$$+ R(t_2)\int_{t_2}^{+\infty} f(s, x(g(s)))ds - R(t_1)\int_{t_1}^{+\infty} f(s,$$

$$x(g(s)))ds = \int_{t_1}^{t_2} R(s)f(s, x(g(s)))ds + [R(t_2)$$

$$- R(t_1)]\int_{t_2}^{+\infty} f(s, x(g(s)))ds$$

$$-R(t_2)\int_{t_1}^{t_2} f(s,\ x(g(s)))ds.$$

$\forall \varepsilon>0$，选$T^*>T$，使$\int_{T^*}^{+\infty} R(s)f(s,\ c)ds<\frac{\varepsilon}{6}$.

所以，当$t_2>t_1\geqslant T^*$时，由第一个等式得

$$|(\phi x)(t_2)-(\phi x)(t_1)|\leqslant 3\int_{t_1}^{+\infty} R(s)f(s,\ x(g(s)))ds$$

$$\leqslant 6\int_{t_1}^{+\infty} R(s)f(s,\ c)ds<\varepsilon.$$

当$T\leqslant t_1<t_2\leqslant T^*+1$时，由第二个等式得

$$|(\phi x)(t_2)-(\phi x)(t_1)|\leqslant\int_{t_1}^{t_2} R(s)f(s,\ x(g(s)))ds$$

$$+[R(t_2)-R(t_1)]\int_{t_1}^{+\infty} f(s,\ x(g(s)))ds$$

$$+R(t_2)\int_{t_1}^{t_2} f(s,\ x(g(s)))ds\leqslant aR^{-1}(T)|R(t_2)-R(t_1)|$$

$$+4R(T^*+1)\int_{t_1}^{t_2} f(s,\ c)ds.$$

这表明存在$\delta>0$，使对任意$x\in X$，当$|t_2-t_1|<\delta$时，

$$|(\phi x)(t_2)-(\phi x)(t_1)|<\varepsilon.$$

根据schauder不动点原理，X中有x^*使$\phi x^*=x^*$，注意到$x^*(t)$最终是(E)的解，所以(E)存在A_c^0型非振动解。定理得证。

定理4 设$\int^{+\infty}\frac{dt}{r(t)}=+\infty$. f_i，$i=1, 2, \cdots, m$均为超线性，或次线性，那么(E)有A_∞^c型非振动解的充要条件为

$$\int^{+\infty}\left|\sum_{i=1}^{m} f_i(t,\ cR(g_{i1}(t)),\ cR(g_{i2}(t)),\cdots,cR(g_{in}(t)))\right|dt$$

$<\infty$，对某一$c\neq 0$　　　　(8)

证 必要性。设$x(t)$是(E)的A_∞^c型非振动解，不妨设$x(t)>0$。根据引理1及$r(t)x'(t)\to c$，存在t_1及两个正数c_1，c_2使得当$t\geqslant t_1$时，

$$x'(t)>0.$$

$$c_1R(g_{ij}(t))\leqslant x(g_{ij}(t))\leqslant c_2R(g_{ij}(t)) \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;$$
$j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$,

把(E)从t_1到t积分得

$$r(t)x'(t)-r(t_1)x'(t_1)+\int_{t_1}^{t}f(s,\ x(g(s)))ds=0,$$

$$\therefore\quad \int_{t_1}^{+\infty}f(s,\ x(g(s)))ds<\infty.$$

故　当f超线性时，$\int_{t_1}^{+\infty}f(t,\ c_1R(g(t)))dt<+\infty$。

当f次线性时，$\int_{t_1}^{+\infty}f(t,\ c_2R(g(t)))dt<+\infty$。

充分性。设（8）中的$c>0$。当f超线性时，令$a=\frac{c}{2}$；当f次线性时，令$a=c$。

选取$T>a$，充分大，使$\int_{T}^{+\infty}f(t,\ cR(g(t)))dt<\frac{a}{2}$，

考虑积分方程

$$x(t)=aR(t)+\int_{T}^{t}R(s)f(s,\ x(g(s)))ds+R(t)\int_{t}^{+\infty}f(s,\ x(g(s)))ds. \tag{9}$$

显然(9)的解是(E)的解。

作Banach空间$c_R[T,\ \infty)$：所有连续函数$x(t):[T,\infty)\to R$，且$\sup\limits_{t\geqslant T}\frac{|x(t)|}{R(t)}<+\infty$，范数$\|x\|_R=\sup\limits_{t\geqslant T}\frac{|x(t)|}{R(t)}$。

令$X=\{x\in c_R[T,\ \infty);\ aR(t)\leqslant x(t)\leqslant 2aR(t),\ t\geqslant T\}$ 那么X是$c_R[T,\ \infty)$中的有界凸闭集。

因为$g_{ij}(t)\to+\infty$，所以存在$T_0>a$，当$t\geqslant T$时$g_{ij}(t)\geqslant T_0$
$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。

在$[T_0,\ T]$上，对于$x\in X$，进行连续延拓（取定一种）使$aR(t)\leqslant x(t)\leqslant 2aR(t)$。

定义算子ϕ：$X\to c_R[T,\ \infty)$。

$$(\phi x)(t)=aR(t)+\int_{T}^{t}R(s)f(s,x(g(s)))ds+R(t)\int_{t}^{+\infty}f(s,$$

$x(g(s)))ds$

我们仍采用schauder不动点原理来证明ϕ在X中有不动点。

(i) $\phi X\subseteq X$。设$x\in X$。当$t\geqslant T$时

$$aR(t)\leqslant(\phi x)(t)\leqslant aR(t)+R(t)\int_T^{+\infty}f(s,\ x(g(s)))ds$$

$$\leqslant R(t)[a+\int_T^{+\infty}f(s,\ x(g(s)))ds]\leqslant 2aR(t).$$

(ii) ϕ连续。设$\|x_n-x\|_R\to 0$，$x_n\in X$，因X是闭集，则$x\in X$。于是

$$|(\phi x_n)(t)-(\phi x)(t)|\leqslant R(t)\int_T^{+\infty}|f(s,\ x_n(g(s)))-f(s,$$

$x(g(s)))|ds$，由勒贝格控制收敛定理得，$\|\phi x_n-\phi x\|_R\to 0$。

(iii) ϕX相对紧。即要证明$\{R^{-1}\phi x;\ x\in X\}$一致有界，等度连续。一致有界性很显然，只要证等度连续性。

取$T^*>T$，充分大，分$t_2>t_1\geqslant T^*$与$T\leqslant t<t_2\leqslant T^*+1$两种情况。

a. $t_2>t_1\geqslant T^*$，我们置

$$(R^{-1}\phi x)(t_2)-(R^{-1}\phi x)(t_1)=\frac{1}{R(t_2)}\int_T^{t_2}R(s)f(s,$$

$$x(g(s)))ds-\frac{1}{R(t_1)}\int_T^{t_1}R(s)f(s,\ x(g(s)))ds$$

$$+\int_{t_2}^{\infty}f(s,\ x(g(s)))ds-\int_{t_1}^{+\infty}f(s,\ x(g(s)))ds$$

$$=\left[\frac{1}{R(t_2)}-\frac{1}{R(t_1)}\right]\int_T^{T^*}R(s)f(s,\ x(g(s)))ds$$

$$+\int_{T^*}^{t_2}\frac{R(s)}{R(t_2)}f(s,\ x(g(s)))ds-\int_{T^*}^{t_1}\frac{R(s)}{R(t_1)}f(s,$$

$$x(g(s))ds$$

$$+\int_{t_2}^{\infty}f(s,\ x(g(s)))ds-\int_{t_1}^{+\infty}f(s,\ x(g(s)))ds.$$

b. $T\leqslant t_1<t_2\leqslant T^*+1$，我们置

$$(R^{-1}\phi x)(t_2)-(R^{-1}\phi x)(t_1)$$

$$=\left[\frac{1}{R(t_2)}-\frac{1}{R(t_1)}\right]\int_T^{t_1}R(s)f(s,\ x(g(s)))ds$$

$$+\frac{1}{R(t_2)}\int_{t_1}^{t_2}R(s)f(s,\ x(g(s)))ds$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}f(s,\ x(g(s)))ds.$$

这样，我们就可以证明$\forall\varepsilon>0$，存在$\delta(\varepsilon)>0$，对一切$x\in X$，当$|t_2-t_1|<\delta$时

$$|(R^{-1}\phi x)(t_2)-(R^{-1}\phi x)(t^1)|<\varepsilon.$$

即ϕX相对紧。由schauder不动点原理，ϕ在X中有不动点。于是(E)有A_∞^c型非振动解。证毕。

定理5 设$\int^{+\infty}\frac{dt}{r(t)}<+\infty$，$f_i$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$，均为超线性，或次线性，那么方程$(E)$有$A_c$型非振动解的充要条件是

$$\int^{+\infty}\rho(t)\left|\sum_1^m f_i(t,\ c,\ c,\ \cdots,\ c)\right|dt<+\infty,\text{ 对某一}c\neq0. \tag{10}$$

证 必要性。设$x(t)$是(E)的A_c型非振动解。不妨假定$x(t)>0$。根据引理2的1°

$$\int_{t_0}^{+\infty}\rho(t)f(t,\ x(g(t)))dt<+\infty.$$

又根据条件，存在正数t_1、c_1、c_2，使得当$t\geqslant t_1\geqslant t_0$时，$c_1\leqslant x(g_{ij}(t))\leqslant c_2$ ($i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$; $j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$)，那么，

当f超线性时，$\int_{t_1}^{+\infty}\rho(t)f(t,\ c_1)dt<+\infty$;

当f次线性时，$\int_{t_1}^{+\infty}\rho(t)f(t,\ c_2)dt<+\infty$.

充分性。设(10)中的$c>0$。当f超线性时，取$a=\frac{c}{2}$，当f次线性时，取$a=c$。

选取$T>a$充分大，使 $\int_{T}^{+\infty}\rho(t)f(t,\ c)\,dt<\frac{a}{2}$。

考虑积分方程：

$$x(t)=a+\rho(t)\int_{T}^{t}f(s,\ x(g(s)))ds+\int_{t}^{+\infty}\rho(s)f(s,\ x(g(s)))ds. \tag{11}$$

很明显(11)的解是(E)的解。

作Banach空间$CB[T,\ \infty)$：一切有界连续函数$x(t)$：$[T,\infty)\to R$，范数$\|x\|=\sup_{t\geq T}|x(t)|$。

令$X=\{x\in CB[T,\ +\infty);\ a\leqslant x(t)\leqslant 2a,\ t\geqslant T\}$

那么X是$CB[T,\ \infty)$中的有界凸闭集。

作算子ϕ：$X\to CB[T,\ \infty)$。

$$(\phi x)(t)=a+\rho(t)\int_{T}^{t}f(s,\ x(g(s)))ds+\int_{t}^{+\infty}\rho(s)f(s,\ x(g(s)))ds$$

其中，当$t\in[T,\ \infty)$，$g_{ij}(t)\leqslant T$时，令$x(g_{ij}(t))=x(T)$。

与定理3类似证明。ϕ在中X有不动点。即 (E)存在A_c型非振动解。定理证毕。

定理 6 设$\int^{+\infty}\frac{dt}{r(t)}<+\infty$，$f_i$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$均为超线性、或次线性，那么$(E)$有$A_c^*$型非振动解的充要条件是

$$\int^{+\infty}\left|\sum_{1}^{m}f_i(t,c\rho(g_{i1}(t)),\cdots c\rho(g_{in}(t)))\right|dt<+\infty,\ \text{对某一}\ c\neq 0. \tag{12}$$

证 必要性。设$x(t)$是(E)的A_c^*型非振动解。即有$x(t)\to 0$，$\frac{x(t)}{\rho(t)}\to c\neq 0$，$(t\to+\infty)$，不妨设$c>0$。那么存在正数$t_1$，$c_1$、$c_2$，使得当$t\geqslant t_1$时

$$c_1\rho(g_{ij}(t))\leqslant x(g_{ij}(t))\leqslant c_2\rho(g_{ij}(t)),$$
$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

又根据引理2，我们设$x(t)\geqslant -r(t)x'(t)\rho(t)$，$t\geqslant t_1$，

$\therefore \qquad -r(t)x'(t) \leqslant c_2, \qquad t \geqslant t_1.$

又 $\int_{t_1}^{t} f(s, \ x(g(s)))ds = r(t_1)x'(t_1) - r(t)x'(t)$

$$\leqslant |r(t_1)x'(t_1)| + c_2,$$

$\therefore \quad \int_{t_1}^{+\infty} f(s, \ x(g(s)))ds < +\infty.$

故　当f超线性时，$\int_{t_1}^{+\infty} f(s, \ c_1\rho(g(s)))ds < +\infty$；

当f次线性时，$\int_{t_1}^{+\infty} f(s, \ c_2\rho(g(s)))ds < +\infty$。

充分性。设(12)中的$c>0$。若f超线性，令$a=\frac{c}{2}$，若f次线性，令$a=c$。

选取充分大的T，使 $\int_{T}^{+\infty} f(t, \ c\rho(g(t)))dt < \frac{a}{2}$。

考虑积分方程：

$$x(t) = a\rho(t) + \rho(t)\int_{T}^{t} f(s, x(g(s)))ds + \int_{t}^{+\infty} \rho(s)f(s, x(g(s)))ds. \tag{13}$$

作Banach空间$c_\rho[T, \ \infty)$：所有连续函数$x(t)$：$[T, \infty) \to R$，使得$\sup\limits_{t \geqslant T} \frac{|x(t)|}{\rho(t)} < \infty$，范数$\|x\|_\rho = \sup\limits_{t \geqslant T} \frac{|x(t)|}{\rho(t)}$。

令$X = \{x \in c_\rho[T, \ \infty), \ a\rho(t) \leqslant x(t) \leqslant 2a\rho(t), \ t \geqslant T\}$，于是X为$c_\rho[T, \ \infty)$中的有界凸闭集。

因为$g_{ij}(t) \to +\infty$，所以存在$T_0 > a$，当$t \geqslant T$时$g_{ij}(t) \geqslant T_0$，($i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$)。

对于$x \in X$，在$[T_0, T]$上作连续延拓（取定一种）使$a\rho(t) \leqslant x(t) \leqslant 2a\rho(t)$。

作算子ϕ：$X \to c_\rho[T, \ \infty)$。

$$(\phi x)(t) = a\rho(t) + \rho(t)\int_{T}^{t} f(s, \ x(g(s)))ds + \int_{t}^{+\infty} \rho(s)f(s, x(g(s)))ds.$$

那么与定理4类似可证，ϕ在X中有不动点。即(E)存在A_0^c型非振动解。定理证毕。

文[142]考虑了更为广泛的二阶泛函微分方程

$$[r(t)g(y'(t))]'+f(t,y(h_1(t)),y(h_2(t)),\cdots,$$
$$y(h_n(t)))=0。\qquad (14)$$

它的广泛性的实质表现在将方程(1)中第一项的$r(t)y'(t)$改为非线性形式$r(t)g(y'(t))$，我们总假定

(i) 函数$r(t)$当$t\geqslant a_0>0$时为连续正值；

(ii) 函数$h_i(t)$当$t\geqslant a_0$时连续，当$t\to+\infty$时$h_i(t)\to+\infty$，$i=1,2,\cdots,n$；

(iii) 函数$g(u)$为连续且严格单调增加，$g(0)=0$，当$u\to\pm\infty$时$g(u)\to\pm\infty$。

(iv) 存在正数k和β，使得对任意的正数u和v，都有$g^{-1}(-u)=-kg^{-1}(u)$及$g^{-1}(uv)\leqslant\beta g^{-1}(u)g^{-1}(v)$；

(v) 函数$f(t,y_1,y_2,\cdots,y_n)$关于它的变元为连续，且当$y_1,y_2,\cdots,y_n$同号时f与它们同号。

[α—条件] 如果存在一正数α，使得对任何实数u和v都有$g^{-1}(uv)=\alpha g^{-1}(u)g^{-1}(v)$，则称$g^{-1}(u)$满足$\alpha$—条件。

下面介绍方程(14)的解的渐近性质，由于证明占篇幅较多，故只介绍结果，不予证明，有兴趣的读者可参看[142]。

(1) $\int^{\infty}g^{-1}\left(\frac{1}{r(t)}\right)gt<+\infty$的情形

设$\rho(t)=\int_t^{+\infty}g^{-1}\left(\frac{1}{r(s)}\right)ds$。

引理3 若$y(t)$是方程(14)的非振动解，则$y'(t)$必是最终为正或最终为负。

引理4 若$y(t)$是方程(14)的非振动解，则$\lim\limits_{t\to\infty}y(t)$必定存在而且有限。

引理5 若$y(t)$为方程(14)的最终正解(最终负解)，且$g^{-1}(u)$满足α—条件，则必存在正数a_1，a_2及$t_0\geqslant a_0$，使得当$t\geqslant t_0$时，有

$a_1\rho(t)\leqslant y(t)\leqslant a_2$，$(-a_2\leqslant y(t)\leqslant -a_1\rho(t))$。

引理6 $y(t)$为方程(14)的非振动解的必要条件为

$$\int_{t_1}^{+\infty} g^{-1}\left[\frac{1}{r(t)}\int_{t_0}^{t}|f(s,y(h_1(s)),\cdots,y(h_n(s)))|ds\right]dt$$

$$<+\infty.$$

对充分大的$t_0\geqslant a_0$和$t_1>t_0$成立。

定理6 方程(14)的非振动解的渐近性质有且仅有以下四种类型，当$t\to\infty$时，

A_c^k型：$y(t)\to c$(常数)$\neq 0$，$r(t)g(y'(t))\to k$(常数)；

A_c^∞型：$y(t)\to c\neq 0$，$r(t)g(y'(t))\to\infty$；

A_0^k型：$y(t)\to 0$，$r(t)g(y'(t))\to k$；

A_0^∞型：$y(t)\to 0$，$r(t)g(y'(t))\to\infty$。

若$g^{-1}(u)$满足α—条件，则A_0^k型中的$k\neq 0$，写为A_0^c型。

定理7 若f为超线性或次线性，则方程(14)存在A_c^k型非振动解的充要条件为

$$\int^{+\infty}|f(t,c,c,\cdots,c)|dt<+\infty$$

对某一个$c\neq 0$成立。

定理8 若f为超线性或次线性，则方程(14)存在A_c^∞型非振动解的充要条件为

$$\int^{+\infty}|f(t,c,c,\cdots,c)|dt=+\infty \text{对某一个} c\neq 0 \text{成立，}$$

及 $$\int^{+\infty} g^{-1}\left[\frac{1}{r(t)}\int_{t_0}^{t}|f(s,k,k,\cdots,k)|ds\right]dt<+\infty \text{对某一}$$

个$k\neq 0$成立。

定理9 若f为超线性或次线性，且$g^{-1}(u)$有连续导数及满足α—条件，则方程(14)有A_0^c型非振动解的充要条件为

$$\int^{+\infty}|f(t,c\rho(h_1(t)),\cdots,c\rho(h_n(t)))|dt<+\infty$$

对某一个$c\neq 0$成立。

此外，如果我们只考虑方程(14)的解$y(t)$趋于非零常数的情

形，我们有下面的结果。

定理10　若f为超线性或次线性，则方程(14)存在A_C型（即$\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=c\neq 0$）非振动解$y(t)$的充要条件为

$$\int^{+\infty}g^{-1}\left[\frac{1}{r(t)}\int_{t_0}^{t}|f(s,c,c,\cdots,c)|ds\right]dt<+\infty$$

对某一个$c\neq 0$成立。

(2) $\int^{+\infty}g^{-1}\left(\frac{1}{r(t)}\right)dt=+\infty$的情形

设 $G(t)=\int_{a_1}^{t}g^{-1}\left(\frac{1}{r(s)}\right)ds$

引理7　设$g^{-1}(u)$满足α—条件，若$y(t)$是方程(14)的最终正解（最终负解），则存在正数c_1, c_2及$T\geqslant a_0$，使得当$t\geqslant T$时，有

$$y'(t)>0\quad(y'(t)<0)$$

及　　$$c_1\leqslant y(t)\leqslant c_2G(t)\quad(-c_2G(t)\leqslant y(t)\leqslant -c_1).$$

定理11　设$g^{-1}(u)$满足α—条件，则方程(14)的非振动解的渐近状态有且仅有下列三种类型：当$t\to\infty$时

A_C^0型：$y(t)\to c$（常数）$\neq 0$，$r(t)g(y'(t))\to 0$。

A_∞^C型：$y(t)\to\infty$，$r(t)g(y'(t))\to c\neq 0$。

A_∞^0型：$y(t)\to\infty$，$r(t)g(y'(t))\to 0$。

定理12　若f为超线性或次线性，则方程(14)有A_C^0型非振动解的充要条件为

$$\int^{+\infty}g^{-1}\left[\frac{1}{r(t)}\int_{t}^{+\infty}|f(s,c,c,\cdots,c)|ds\right]dt<+\infty$$

对某一个$c\neq 0$成立。

定理13　设$g^{-1}(u)$有连续导数且满足α—条件，若f为超线性或次线性，则方程(14)有A_∞^C型非振动解的充要条件为

$$\int^{+\infty}|f(t,cG(h_1(t)),\cdots,cG(h_n(t)))|dt<+\infty$$

对某一个$c\neq 0$成立。

第十一章

泛函微分方程的振动理论

关于泛函微分方程解的振动理论，近十多年来发展相当迅速，从线性到超（次）线性、非线性，从一阶到高阶，从滞量的分散分布到连续分布，都有非常丰富的成果，在这里我们只能选取其中少数的一部份向读者介绍。

首先我们介绍泛函微分方程解的振动定义。

定义1 设$x(t)$是某一泛函微分方程的解，如果$x(t)$不是最终零解，且存在一序列$\{t_i\}$，$\lim\limits_{i\to\infty} t_i=\infty$，使得$x(t_i)=0$，则称$x(t)$是此方程的一个振动解，或称解$x(t)$是振动的，否则，则称$x(t)$是此方程的非振动解，或称解$x(t)$是非振动的。

定义2 如果一个泛函微分方程的所有非最终零解都是振动的，则称此方程为振动。

§1 一阶泛函微分方程解的振动性

考虑如下的纯量时滞微分方程及时滞微分不等式：

$$y'(t)+a(t)y(t)+p(t)y(t-\tau)\leqslant 0, \tag{1}$$

$$y'(t)+a(t)y(t)+p(t)y(t-\tau)\geqslant 0, \tag{2}$$

$$y'(t)+a(t)y(t)+p(t)y(t-\tau)=0. \tag{3}$$

其中$\tau>0$为常数，当$t\geqslant 0$时$a(t)\geqslant 0$，$p(t)>0$为连续。

引理1 如果

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t} p(s)ds > \frac{1}{e}\ exp\left(-\lim_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t} a(s)ds\right) \tag{4}$$

及
$$\lim_{t\to\infty}\int_{t-\tau/2}^{t} p(s)ds > 0, \tag{5}$$

则(1)没有最终正解

证 用反证，若(1)存在最终正解$y(t)$，设当$t>t_0$时$y(t)>0$，t_0为充分大的数，于是当$t>t_0+\tau$时，有$y(t-\tau)>0$，由(1)，知当$t>t_0+\tau$时$y'(t)<0$，因此当$t>t_0+2\tau$时 $y(t)<y(t-\tau)$

置

$$W(t)=\frac{y(t-\tau)}{y(t)},\ t>t_0+2\tau, \tag{6}$$

则$W(t)>1$，当$t<t_0+2\tau$时，用$y(t)$除(1)式两边，则

$$\frac{y'(t)}{y(t)}+a(t)+p(t)W(t)\leqslant 0,\ t>t_0+2\tau. \tag{7}$$

从$t-\tau$到t积分(7)的两边得

$$\log y(t)-\log y(t-\tau)+\int_{t-\tau}^{t} a(s)ds$$
$$+\int_{t-\tau}^{t} p(s)W(s)ds\leqslant 0,\ t>t_0+3\tau.$$

由(6)，有 $\log W(t)\geqslant\int_{t-\tau}^{t} a(s)ds+\int_{t-\tau}^{t} p(s)W(s)ds,$

$$t>t_0+3\tau. \tag{8}$$

现由$t-\tau/2$到t对(1)积分并注意到$y(t)$的递减性，便得

$$y(t)-y\left(t-\frac{\tau}{2}\right)+y(t)\int_{t-\tau/2}^{t} a(s)ds$$
$$+y(t-\tau)\int_{t-\tau/2}^{t} p(s)ds\leqslant 0,\ t>t_0+\frac{\tau}{2}.$$

将上式分别除以$y(t)$和$y(t-\tau/2)$，则有

$$1-\frac{y(t-\tau/2)}{y(t)}+\int_{t-\tau/2}^{t} a(s)ds$$
$$+\frac{y(t-\tau)}{y(t)}\int_{t-\tau/2}^{t} p(s)ds\leqslant 0 \tag{9}$$

及 $$\frac{y(t)}{y(t-\tau/2)}-1+\frac{y(t)}{y(t-\tau/2)}\int_{t-\tau/2}^{t}a(s)ds$$
$$+\frac{y(t-\tau)}{y(t-\tau/2)}\int_{t-\tau/2}^{t}p(s)ds\leqslant 0. \tag{10}$$

令 $$\varliminf_{t\to\infty}(t)=\lambda.$$

则$\lambda\geqslant 1$，可能为有限或无限，现分两种情形进行讨论：

情形1 λ为有限，对(8)式两边取下极限得

$$\log\lambda\geqslant\varliminf_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}a(s)ds+(\lambda-\varepsilon)\varliminf_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}p(s)ds.$$

其中ε充分地小，因此

$$\log\lambda-\lambda\varliminf_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}p(s)ds\geqslant\varliminf_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}a(s)ds.$$

由于 $$\max_{\lambda\geqslant 1}\left\{\log\lambda-\lambda\varliminf_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}p(s)ds\right\}$$
$$=-\log\left(\varliminf_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}p(s)ds\right)-1.$$

所以 $$\log\left(\varliminf_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}p(s)ds\right)\leqslant -1-\varliminf_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}a(s)ds$$

或

$$\varliminf_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}p(s)ds\leqslant\frac{1}{e}\,exp\left(-\varliminf_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}a(s)ds\right).$$

这与条件(4)矛盾

情形2，λ为无限，即

$$\lim_{t\to\infty}\frac{y(t-\tau)}{y(t)}=\infty.$$

由条件(5)及$a(t)\geqslant 0$，不等式(9)蕴含了

$$\lim_{t\to\infty}\frac{y(t-\tau/2)}{y(t)}=\infty.$$

因此 $$\lim_{t\to\infty}\frac{y(t-\tau)}{y(t-\tau/2)}=\infty.$$

这与(10)矛盾

由于两种情形皆导出矛盾，故引理的结论成立。

引理2 如果满足引理1的条件，则(2)没有最终负解

证 如果$y(t)$是(2)的解，则$-y(t)$便是(1)的解，由引理1知$y(t)$不是最终负解

根据引理1和2，如果方程(3)没有最终正解和最终负解，则必然导出如下的结果：

定理1 如果满足引理1的条件，则方程(3)为振动

下面我们考察(1)、(2)、(3)的特殊情形，即$a(t)$和$p(t)$分别等于常数a和p，$a\geqslant 0$，$p>0$。

$$y'(t)+ay(t)+py(t-\tau)\leqslant 0, \tag{1)'$$

$$y'(t)+ay(t)+py(t-\tau)\geqslant 0, \tag{2)'$$

$$y'(t)+ay(t)+py(t-\tau)=0. \tag{3)'$$

此时条件(4)和(5)退化为

$$p\tau>\frac{1}{e}e^{-a\tau},\quad a\geqslant 0. \tag{11}$$

定理2 假定

$$p\tau\leqslant\frac{1}{e}e^{-a\tau},\quad a\geqslant 0. \tag{12}$$

则 (1)′有最终正解；

(2)′有最终负解；

(3)′有非振动解.

证 首先证(1)′有最终正解.现考察(1)′的具有$y(t)=e^{\lambda t}$形式的解，则有

$$F(\lambda)\equiv\lambda+a+pe^{-\lambda\tau}\leqslant 0.$$

由(12)，则

$$F\left(-\frac{1}{\tau}-a\right)=-\frac{1}{\tau}-a+a+pe^{(1/\tau+a)\tau}\leqslant-\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau}=0.$$

因此(1)′存在正解$e^{-(1/\tau+a)t}$.

同理，(2)′存在负解$-e^{-(1/\tau+a)t}$.

最后，由于$F(0)>0$，$F\left(-\frac{1}{\tau}-a\right)\leqslant 0$，故存在一个$\lambda$在区间

$\left[-\frac{1}{\tau}-a,\ 0\right]$上使得$e^{\lambda t}$为(3)′的一个非振动解，证毕。

通过上述的结果，我们便立即得到下面的结论

定理3 使得

(1)′没有最终正解；

(2)′没有最终负解；

(3)′为振动

的充分必要条件为

$$p\tau>\frac{1}{e}e^{-a\tau},\quad a\geqslant 0.$$

例1 方程

$$y'(t)+y\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

显然有振动解$y_1(t)=\sin t$和$y_2(t)=\cos t$，我们进一步考察，可看出条件(11)是得到满足的，故此方程的所有解均为振动。

以上的结果引自文[144]。

§2 二阶泛函微分方程解的振动性

关于泛函微分方程解的振动性的研究，以二阶方程最受人们的注意，因此也被研究得比较深入和广泛，我们在此只能介绍少数的一些结果，但它们是比较新的。

首先考虑时滞微分方程

$$y''(t)-a(t)y(t)-[p^2+q(t)]y(t-2\tau)=0. \tag{1}$$

定理1 假定$a(t)\geqslant 0$，$q(t)\geqslant 0$为连续，$t\in R^+$，p、τ为正常数，且

$$p\tau e>1 \tag{2}$$

则方程(1)的一切非最终为零的有界解为振动。

证 若结论不真，则(1)存在有界解$y(t)$，使得当t_0充分大时有$y(t)>0$，$t>t_0$，于是当$t>t_0+2\tau$时$y(t-2\tau)>0$，由(1)，当$t>t_0+2\tau$时$y''(t)>0$，因为$y(t)$有界，故$y'(t)\leqslant 0$。

置　$x(t)=y'(t)-py(t-\tau)$。　　(3)

则$x(t)$当t充分大时为负，对(3)两边求导，得

$$x'(t)=y''(t)-py'(t-\tau)。$$

于是有

$$x'(t)+px(t-\tau)=y''(t)-py'(t-\tau)+py'(t-\tau)-p^2y(t-2\tau)=a(t)y(t)+q(t)y(t-2\tau)\geqslant 0。$$

即　$x'(t)+px(t-\tau)\geqslant 0$。　　(4)

由条件$p\tau e>1$及§1的定理3，知(4)没有最终负解，这与(3)式矛盾，故定理的结论成立，证毕。

下面考察方程

$$y''(t)-a(t)y(t)-p^2(t)y(t-2\tau)=0。\tag{5}$$

定理2　假设(5)中的$a(t)\geqslant 0$，$p(t)>0$为连续，$t\in \mathbf{R}^+$，τ为正常数，如果§1的引理1的条件(4)、(5)成立，且

$$p(t)[p(t)-p(t-\tau)]\geqslant p'(t)\geqslant 0,\tag{6}$$

则方程(5)的一切非最终为零的有界解为振动

证　若结论不真，则存在(5)的一个有界解$y(t)$，使得对充分大的t_0有$y(t)>0$，$t>t_0$，故当t充分大时$y'(t)<0$，置

$$x(t)=y'(t)-p(t)y(t-\tau)。\tag{7}$$

则$x(t)$当t充分大时为负，对(7)取导数得

$$x'(t)=y''(t)-p'(t)y(t-\tau)-p(t)y'(t-\tau)。$$

我们有

$$\begin{aligned}x'(t)+p(t)x(t-\tau)&=y''(t)-p'(t)y(t-\tau)\\&\quad-p(t)y'(t-\tau)+p(t)y'(t-\tau)\\&\quad-p(t)p(t-\tau)y(t-2\tau)\\&=a(t)y(t)+p^2(t)y(t-2\tau)\\&\quad-p'(t)y(t-\tau)\\&\quad-p(t)p(t-\tau)y(t-2\tau)\\&=a(t)y(t)+p(t)[p(t)-p(t\\&\quad-\tau)]y(t-2\tau)-p'(t)y(t-\tau)\end{aligned}$$

$$\geqslant p(t)[p(t)-p(t-\tau)]y(t-2\tau)$$
$$-p'(t)y(t-\tau).$$

由于$y(t)>0$，$y'(t)<0$，当t充分大时，故有

$$0<y(t-\tau)<y(t-2\tau),$$

又由(6)，得

$$p(t)[p(t)-p(t-\tau)]y(t-2\tau)\geqslant p'(t)y(t-\tau)$$

因此 $x'(t)+p(t)x(t-\tau)\geqslant 0.$

根据§1中的引理2，知上面的不等式没有最终负解，这与(7)式矛盾，从而定理得证

以上的结果引自文[144]。

下面我们考虑更广泛的二阶泛函微分方程。其中定理3、4、5、6引自文[143]及[146]

下面考虑二阶纯量泛函微分方程

$$g''(t,y(t))+f(t,y(t),y(p(t)),y'(t),y'(q(t)))=0. \tag{8}$$

其中$g(t,y)$具有连续的一阶偏导数，$p(t)$及$q(t)$为连续函数，当$t\to\infty$时$p(t)\to\infty$，f关于其变元为连续。

方程(8)是一种比较广泛的二阶泛函微分方程，通常遇到的方程

$$y''(t)+f(t,y(t),y(p(t)),y'(t),y'(q(t)))=0 \tag{9}$$

是它的一种特殊情形

我们以后说方程(8)的解，都是指那些在某区间$[\alpha,\infty)$上存在，而且具有二阶连续导数的那些解，其他的解一律不在考虑之列。

为简便起见，记

$$f(t,y(t),y(p(t)),y'(t),y'(q(t)))=F(t). \tag{10}$$

下面的定理3至定理6引自文[143]

定理3 如果满足下列的条件：

(i) 当u，v同号时，$f(t,u,v,w,x)$与u,v同号；

(ii) $yg(t,y)>0$；

(iii) 当t足够大时，$g_t'(t,y)>0$，又当$y>0$时，$g_t'(t,y)\leqslant 0$，当$y<0$时，$g_t'(t,y)\geqslant 0$；

(iv) 对正的单调不减（或负的单调不增）可微函数$y(t)$，当$t\to\infty$时

$$\frac{1}{t}\int_T^t\int_T^\tau F(\alpha)d\alpha d\tau\to\infty\ (\text{或}-\infty).$$

则方程(8)为振动

证 用反证法，设结论不成立，则存在非振动解$y(t)$，不妨设存在$t_1>0$，使当$t\geqslant t_1$时，$y(t)>0$，由于$t\to\infty$时$p(t)\to\infty$，故存在$T>t_1$，使得当$t\geqslant T$时，$y(p(t))>0$，且条件(iii)成立。

由条件(i)，知$t\geqslant T$时，$F(t)>0$，从而$g''(t,y(t))<0$，此时$g'(t,y(t))$为单调减少，现分两种情形讨论：

(a) 若$t\geqslant T$时$g'(t,y(t))\geqslant 0$

则$g_t'(t,y(t))+g_y'(t,y(t))y'(t)\geqslant 0$，由条件(iii)得

$$y'(t)\geqslant -\frac{g_t'(t,y(t))}{g_y'(t,y(t))}\geqslant 0$$

可见$y(t)$当$t\geqslant T$时为正的单调不减函数

现对(1)从T到$t>T$积分两次得

$$g(t,y(t))=g(T,y(T))+g'(T,y(T))(t-T)-\int_T^t\int_T^\tau F(\alpha)d\alpha d\tau.$$

由条件(iv)知，当$t\to\infty$时上式右边第三项是比第二项高阶的无穷大，故t足够大时$g(t,y(t))<0$，由条件(ii)知$y(t)<0$，这与假设$y(t)>0$矛盾

(b)若$t\geqslant T_1\geqslant T$时$g'(t,y(t))<0$

由于$g'(t,y(t))$当$t\geqslant T$时为单调减少，故当$t\geqslant T_1$时有

$$g'(t,y(t))\leqslant g'(T_1,y(T_1))<0$$

从T_1到$t>T_1$积分得

$$g(t,y(t))\leqslant g(T_1,y(T_1))+g'(T_1,y(T_1))(t-T_1).$$

当 $t\to\infty$ 时，上式右边第二项趋于负无穷大，故 t 足够大时

$g(t,y(t))<0$，由条件(ii)知$y(t)<0$，这与$y(t)>0$矛盾

对于$t\geqslant T$时$y(t)<0$的情形也有类似的结论，证毕。

推论1 如果满足定理1中的条件(i)和(iv)，则方程(9)为振动。

证 此时$g(t,y)\equiv y$，条件(ii)和(iii)自然满足，故结论为真

推论2 如果$g(t,y)\equiv \bar{g}(y)$，且满足定理1中的条件(i)，(ii)，(iv)及$\bar{g}_y'(y)>0$，则方程(1)为振动。

证 由于$\bar{g}(y)$不含t，故$\bar{g}_t'(y)=0$，从而满足定理1的条件是(iii)，由定理1知推论成立

定理4 对于方程(8)，若满足定理3的条件(i)、(ii)、(iii)外，还满足条件

(iv) 当$y(t)$有界时$g(t,y(t))$也有界；

(v) 对每个正的单调不减有界可微函数(或负的单调不增有界可微函数)$y(t)$，有

$$\int^{\infty}(\tau-t_0)F(\tau)d\tau=\infty \text{ (或}-\infty\text{)}.$$

则方程(8)的一切非最终为零的有界解为振动。

证 设定理的结论不成立，即存在有界解$y(t)$不振动，不妨设$t\geqslant T>0$时$y(t)>0$

现分两种情况讨论

(a) 若$t\geqslant T_1>T$时$g'(t,y(t))\geqslant 0$，此时由条件(iii)知

$$y'(t)\geqslant -\frac{g_t'(t,y(t))}{g_y'(t,y(t))}\geqslant 0$$

故$y(t)$当$t\geqslant T_1$时为正的单调不减函数

对方程(8)从$\tau(\tau\geqslant T_1)$到$t>\tau$积分得

$$g'(t,y(t))-g'(\tau,\ y(\tau))+\int_{\tau}^{t}F(\alpha)d\alpha=0.$$

于是 $$g'(\tau,y(\tau))\geqslant\int_{\tau}^{t}F(\alpha)d\alpha.$$

再从T_1到$t>T_1$积分得

$$g(t,y(t))-g(T_1,\ y(T_1))\geqslant\int_{T_1}^{t}\int_{\tau}^{t}F(\alpha)d\alpha d\tau.$$

通过分部积分法可得

$$g(t,y(t))\geqslant g(T_1,y(T_1))+\int_{T_1}^{t}(\tau-T_1)F(\tau)d\tau.$$

由条件(v)导出$g(t,y(t))$无界，再由条件(iv)知$y(t)$无界，这与$y(t)$有界矛盾

(b) 若$t\geqslant T_1\geqslant T$时$g'(t,y(t))<0$。

与定理3的证明一样，导出$y(t)<0$，与$y(t)>0$矛盾。

对于$t\geqslant T$时$y(t)<0$的情形，也有类似的结论，证毕。

下面考虑另一种类型的二阶泛函微分方程

$$g'(t,y'(t))+f(t,y(t),y(p(t)),y'(t),y'(q(t)))=0. \tag{11}$$

其中$g(t,x)$是映$\mathbf{R}_A\times\mathbf{R}$到$\mathbf{R}$的连续函数，$\mathbf{R}_A=[A,\infty)$，$A\geqslant0$；$p(t)$，$q(t)$是定义在$\mathbf{R}_A$上的连续函数，当$t\to\infty$时$p(t)\to\infty,q(t)\to\infty$；$f(t,u,v,w,z)$是由$\mathbf{R}_A\times\mathbf{R}^4$到$\mathbf{R}$的连续函数。

方程(11)包含方程(9)作为它的特例，也包含通常文献中所遇到的方程

$$(r(t)y'(t))'+f(t,y(t),y(p(t)),y'(t),y'(q(t)))=0.$$

定理5 设当$t\geqslant A\geqslant0$时，下列条件成立：

(i) $uf(t,u,v,w,z)>0$，当$uv>0$时；

(ii) 对于$x\neq0$，$xg(t,x)>0$；

(iii) 对于任何实数a，存在一个连续函数$\bar g(t,a)$使得当$g(t,x)<a$时有$x<\bar g(t,a)$，当$g(t,x)>a$时有$x>\bar g(t,a)$。且

$$\int^{\infty}\bar g(t,a)dt=\infty\cdot\mathrm{sgn}a,$$

则方程(11)的每一个非振动解在某一区间$[T,\infty)$上或者为正值递增或者为负值递减。

此外，如果还满足

(iv) 当$y(t)$为正值递增函数（或负值递减函数）时，有

$$\int^{\infty}F(t)dt=\infty(\text{或}-\infty).$$

其中$F(t)$为(10)式所定义。则方程(11)为振动。

证 如果$y(t)$是方程(11)的一个非振动解，不妨设$t\geqslant t'\geqslant A$时$y(t)>0$。($y(t)<0$ 的情形可类似地证明)。设 $t\geqslant T\geqslant t'$ 时$p(t)\geqslant t'$，故当$t\geqslant T$时$F(t)>0$，从而得$g'(t, y'(t))<0$。因此$t\geqslant T$时$g(t, y'(t))$是递减的。

下面分两种情形讨论：

(a) 当$t\geqslant T$时$g(t, y'(t))>0$。

由条件(ii)，有$y'(t)>0$，故$y(t)$在$[T, \infty)$上为正值递增。

(b) 当$t\geqslant T_1\geqslant T$时$g(t, y'(t))<0$。

由于$g(t, y'(t))$递减，故有

$$g(t, y'(t))<g(T_1, y'(T_1)), \quad t>T_1.$$

由条件(iii)，$y'(t)<\bar{g}(t, g(T_1, y'(T_1)))$，$t>T_1$，因此得到

$$y(t)<y(T_1)+\int_{T_1}^{t}\bar{g}(s, g(T_1, y'(T_1)))ds.$$

由条件(iii)知，当t充分大时有$y(t)<0$，这与$y(t)>0$矛盾。故情形(b)不可能出现。

通过上述的论证知定理的第一个论断成立。下面证明第二个论断。

由(11)得到

$$g(t, y'(t))-g(T,y'(T))=-\int_{T}^{t}F(s)ds. \tag{12}$$

如果$t\geqslant T$时$y(t)$为正值递增，则$t\geqslant T$时$y'(t)\geqslant 0$。但由(12)式和条件(iv)知，当t充分大时$g(t, y'(t))<0$，再由条件(ii)知$y'(t)<0$，这与$y(t)$的递增性矛盾。故方程(11)为振动，证毕。

作为方程(11)的一个特殊情形，我们考虑如下的方程：

$$(r(t)B(y'(t)))'+f(t, y(t), y(p(t)), y'(t), y'(q(t)))=0. \tag{13}$$

其中$r(t)$当$t>0$时为正值连续函数；$B(x)$为连续递增函数，$B(0)=0$；$p(t)$，$q(t)$及$f(t, u, v, w, z)$均如方程(11)所规定。

推论3 设定理5中的条件(i)及(iv)成立，又设对于任何的

$c>0$，有

$$\int^{\infty}B^{-1}\left(\frac{\pm c}{r(t)}\right)dt=\pm\infty.$$

则方程(13)为振动。

证明由定理5立即得到。

下面考察中立型方程

$$g''(t,y(t))+\sum_{i=1}^{n}a_i(t)F_i(y(t),\ y(p(t)),\ y'(t),$$

$$y'(q(t)),\ y''(t),\ y''(r(t)))=0. \tag{14}$$

其中$g(t,\ y)$有连续偏导数，$p(t)$，$q(t)$，$r(t)$为连续函数，且$t-M\leqslant p(t)\leqslant t$，$t-M\leqslant q(t)\leqslant t$，$M$为某一正数，$a_i(t)\geqslant 0$为连续，$F_i$关于自己的变元连续。

定理6　对方程(14)除上述假设外，还满足下列的条件：

(i)　u，v同号时，$F_i(u,\ v,\ w,x,\ s,\ z)$与u，v同号；

(ii)　当t足够大时，$yg(t,\ y)>0$；

(iii)　当t足够大时，$g'_y(t,\ y)>0$，又当$y>0$时$g'_t(t,y)\leqslant 0$，当$y<0$时$g'_t(t,\ y)\geqslant 0$。

(iv)　当$y(t)\neq 0$时，$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{g(t,y(t))-(t-t_1)g'_t(t,y(t))}{(t-t_1)y(t)g'_y(t,\ y(t))}=0$，其中$t_1$为任一常数；

(v)　存在某一个下标j，使得

(a) $F_j(u,v,w,x,s,z)\geqslant F_j(u,v,w,x,0,0)$；

(b) $F_j(\lambda u,\lambda v,\lambda w,\lambda x,0,0)=m(\lambda)F_j(u,v,w,x,0,0)$，其中$m(\lambda)$为$\lambda$的连续函数，当$\lambda>0$时$m(\lambda)>0$，当$\lambda<0$时$m(\lambda)<0$；

(c) 存在某正函数$\varphi(t)$，使$t\varphi(t)\to\infty$(当$t\to\infty$时)且

$$\int^{\infty}\frac{a_j(t)}{\varphi(t)}dt=\infty,\qquad \int^{\infty}\frac{|\varphi'(t)|}{(t-t_1)\varphi^2(t)}dt<\infty;$$

(vi)　当t足够大且$y(t)\neq 0$时$\dfrac{m(y(t))}{g(t,y(t))}$为$t$的单调不减函数。

则方程(14)为振动。

证 若结论不成立，则存在非振动解$y(t)$，不妨设 $t\geqslant t_1$时$y(t)>0$，$y(t-M)>0$，于是$g''(t,y(t))<0$。

现分两种情况讨论：

1° 若当$t\geqslant t_1$时$g'(t,y(t))>0$

不妨设$t\geqslant t_1$时条件(ii)、(iii)、(vi)成立，故当$t\geqslant t_1$时

$$y'(t)>-\frac{g'_t(t,y(t))}{g'_y(t,y(t))}\geqslant 0$$

易证
$$\lim_{t\to\infty}\frac{y(p(t))}{y(t)}=1, \tag{15}$$

由条件(ii)，当$t\geqslant t_1$时$g(t,y(t))>0$。

令$G(t)=g(t,y(t))$，则当$t\geqslant t_1$时$G(t)>0$，$G'(t)>0$，$G''(t)<0$。

由Taylor中值公式得

$$G(t_1)=G(t)-G'(t)(t-t_1)+\frac{G''(\xi)}{2}(t-t_1)^2.$$

由于$G(t_1)>0$及$G''(\xi)<0$，故当$t\geqslant t_1$时

$$\frac{G'(t)}{G(t)}<\frac{1}{t-t_1}. \tag{16}$$

于是有
$$\frac{g'_t(t,y(t))+g'_y(t,y(t))y'(t)}{g(t,y(t))}<\frac{1}{t-t_1},$$

因此
$$\frac{y'(t)}{y(t)}<\frac{g(t,y(t))-(t-t_1)g'_t(t,y(t))}{(t-t_1)y(t)g'_y(t,y(t))}$$

由条件(iv)知

$$\lim_{t\to\infty}\frac{y'(t)}{y(t)}=0, \tag{17}$$

又因$t\geqslant t_1$时，$y(t)$为正的单调增加函数，而t充分大时$y'(q(t))>0$，故由(17)得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{y'(q(t))}{y(t)}\leqslant\lim_{t\to\infty}\frac{y'(q(t))}{y(q(t))}=0. \tag{18}$$

定义
$$b(t)=\frac{G(t)}{G'(t)}\varphi(t).$$

则 $$\frac{1}{b(t)}=\frac{G'(t)}{G(t)\varphi(t)}\leqslant\frac{1}{(t-t_1)\varphi(t)}\to 0\quad (\text{当}\ t\to\infty\ \text{时}),$$

$$\left(\frac{1}{b(t)}\right)'=-\frac{b'(t)}{b^2(t)}=-\frac{G'(t)\varphi(t)G'(t)}{G^2(t)\varphi^2(t)}$$

$$+\frac{\varphi'(t)G(t)G'(t)-G(t)\varphi(t)G''(t)}{G^2(t)\varphi^2(t)}$$

$$=-\frac{G(t)\varphi(t)\sum_{i=1}^{n}a_iF_i+(G'(t))^2\varphi(t)}{G^2(t)\varphi^2(t)}$$

$$+\frac{\varphi'(t)G(t)G'(t)}{G^2(t)\varphi^2(t)}$$

$$<-\frac{a_j(t)F_j}{G(t)\varphi(t)}-\left[\frac{G'(t)}{G(t)}\right]^2\frac{1}{\varphi(t)}$$

$$-\frac{\varphi'(t)G'(t)}{G(t)\varphi^2(t)}$$

$$<-\frac{a_j(t)m(y(t))}{G(t)\varphi(t)}F_j\left(1,\ \frac{y(p(t))}{y(t)},\ \frac{y'(t)}{y(t)},\right.$$

$$\left.\frac{y'(q(t))}{y(t)},\ 0,\ 0\right)$$

$$-\frac{\varphi'(t)G'(t)}{G(t)\varphi^2(t)}.$$

两边积分并注意到条件(vi)得

$$\frac{1}{b(t)}-\frac{1}{b(t_1)}$$

$$<-\int_{t_1}^{t}\frac{a_j(\alpha)m(y(\alpha))}{G(\alpha)\varphi(\alpha)}F_j\left(1,\ \frac{y(p(\alpha))}{y(\alpha)},\ \frac{y'(\alpha)}{y(\alpha)},\right.$$

$$\left.\frac{y'(q(\alpha))}{y(\alpha)},\ 0,\ 0\right)d\alpha+\int_{t_1}^{t}\frac{G'(\alpha)|\varphi'(\alpha)|}{G(\alpha)\varphi^2(\alpha)}d\alpha$$

$$\leqslant-\frac{m(y(t_1))}{G(t_1)}\int_{t_1}^{t}\frac{a_j(\alpha)}{\varphi(\alpha)}F_j\left(1,\ \frac{y(p(\alpha))}{y(\alpha)},\ \frac{y'(\alpha)}{y(\alpha)},\right.$$

$$\left.\frac{y'(q(\alpha))}{y(\alpha)},\ 0,\ 0\right)d\alpha+\int_{t_1}^{t}\frac{G'(\alpha)|\varphi'(\alpha)|}{G(\alpha)\varphi^2(\alpha)}d\alpha. \tag{19}$$

由(15)，(17)，(18)，当$t\to\infty$时，有

$$F_j\left(1,\ \frac{y(p(t))}{y(t)},\ \frac{y'(t)}{y(t)},\ \frac{y'(q(t))}{y(t)},\ 0,\ 0\right)\to$$

$$F_j(1,1,0,0,0,0)>0.$$

于是由条件(v)之(c)即知(19)式的第一个积分当$t\to\infty$时趋于正无穷大，而第二个积分由(6)和条件(v)之(c)，可知当$t\to\infty$时为绝对收敛，从而由(19)式导致t足够大时$b(t)<0$，这与假设$b(t)>0$矛盾。

2° 若当$t\geqslant t_2\geqslant t_1$时，$g'(t,y(t))\leqslant 0$。

因为$g''(t,y(t))<0$，故$g(t,y(t))$随t的增大而变负，由条件(ii)知当t足够大时$y(t)<0$，这与假设$y(t)>0$矛盾。

对于$t\geqslant t_1$时$y(t)<0$的情形，用上述的方法可获得类似的结论。

因此，定理的结论成立，证毕。

下面介绍一种强超(强次)线性二阶泛函微分方程解的振动理论。

首先考虑方程

$$[r(t)x'(t)]'+\sum_{i=1}^{m}f_i(t,x(g_{i1}(t)),\cdots,$$

$$x(g_{in}(t)))=0. \tag{20}$$

其中对$r(t)$、$g_{ij}(t)$，$f_i(t,x_1,\cdots,x_n),i=1,2,\cdots m,j=1,2,\cdots,n$的要求与第十章§4的方程(E)相同，下面的结果引自文[156]。

定义1 如果存在函数$p_i(t)\geqslant 0$，$i=1,2,\cdots n$，$\sum_{i=1}^{n}p_i(t)>0$，及常数$\sigma>1$，使得当$x_i\geqslant y_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$时，有

$$\frac{f(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\left[\sum_{i=1}^{n}p_i(t)x_i\right]^{\sigma}}\geqslant\frac{f(t,y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\left[\sum_{i=1}^{n}p_i(t)y_i\right]^{\sigma}}. \tag{21}$$

当$x_i\leqslant y_i<0$，$i=1,2,\cdots,n$时，有

$$\frac{-f(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\left[-\sum_{i=1}^{n}p_i(t)x_i\right]^{\sigma}} \geqslant \frac{-f(t,y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\left[-\sum_{i=1}^{n}p_i(t)y_i\right]^{\sigma}}, \tag{22}$$

则称函数$f(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$是强超线性的，而称σ为f的强超线性常数。

如果不等式(21)，(22)反号，且$0<\sigma<1$，则称函数$f(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$是强次线性的。

引理1 若$f(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 关于σ_0为强超线性，（强次线性），则对一切$1<\sigma\leqslant\sigma_0$($\sigma_0\leqslant\sigma<1$)，$f$关于$\sigma$也是强超(强次）线性的。

引理直接从定义即可证得。

定理7 设$\int^{+\infty}\frac{dt}{r(t)}=+\infty$，若$f_i, i=1,2,\cdots,m$均为强超线性，$g_{ij}(t)\geqslant t(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$。那么方程(20)振动的充要条件是

$$\int^{+\infty}R(t)\left|\sum_{1}^{m}f_i(t,c,c,\cdots,c)\right|dt=+\infty, \quad 对一切c\neq0。 \tag{23}$$

证 必要性由第十章§4的定理3得到。下面，我们证明其充分性。令

$\sigma=\min\{\sigma_i;\sigma_i为f_i的强超线性常数, i=1,2,\cdots,m\}$，那么，由引理1，$\sigma$可作为诸$f_i$公共的强超线性常数。

反证法。设(20)有非振动解$x(t)$，不妨设$x(t)>0$，由第十章§4引理1，存在t_1充分大使$x'(t)>0$，$t\geqslant t_1$。

把(20)从t到T积分($t_1\leqslant t<T$)。

$$r(T)x'(T)-r(t)x'(t)+\int_t^T f(s,x(g(s)))ds=0.$$

由此推出，$r(t)x'(t)\geqslant\int_t^T f(s,x(g(s)))ds$，$t\geqslant t_1$。

令$T\to+\infty$得

$$r(t)x'(t) \geq \int_t^{+\infty} f(s,x(g(s)))ds, t \geq t_1. \qquad (24)$$

两边除以$r(t)$，再从t_1到t积分，

$$x(t) \geq \int_{t_1}^t R(s,t_1)f(s,x(g(s)))ds, \quad t \geq t_1.$$

另一方面，存在$k>0$，使$x(t) \geq k$，$t \geq t_1$。

由于强超线性，那么我们有

$$f(t,x(g(t))) = \sum_1^m f_i(t,x(g_{i1}(t)),\cdots,x(g_{in}(t)))$$

$$= \sum_{i=1}^m \Big\{\Big[\sum_{j=1}^n p_{ij}(t)x(g_{ij}(t))\Big]^{\sigma}$$

$$\cdot \Big[\sum_{j=1}^n p_{ij}(t)x(g_{ij}(t))\Big]^{-\sigma} \cdot f_i(t,x(g_{i1}(t)),$$

$$\cdots, x(g_{in}(t)))\Big\}$$

$$\geq \sum_{i=1}^m k^{-\sigma}x^{\sigma}(t)f_i(t,k,k,\cdots,k)$$

$$= k^{-\sigma}x^{\sigma}(t)f(t,k).$$

所以， $$x(t) \geq \int_{t_1}^t R(s,t_1)k^{-\sigma}x^{\sigma}(s)f(s,k)ds, \quad t \geq t_1.$$

故 $$[x(t)]^{-\sigma} \leq k^{\sigma^2}\Big[\int_{t_1}^t R(s,t_1)x^{\sigma}(s)f(s,k)ds\Big]^{-\sigma}, \quad t \geq t_1.$$

用$R(t,t_1)x^{\sigma}(t)f(t,k)$乘以上式得

$$R(t,t_1)f(t,k) \leq k^{\sigma^2}R(t,t_1)x^{\sigma}(t)f(t,k)$$

$$\cdot \Big[\int_{t_1}^t R(s,t_1)x^{\sigma}(s)f(s,k)ds\Big]^{-\sigma}$$

取$t_2>t_1$，从t_2到t积分上式

$$\int_{t_2}^t R(s,t_1)f(s,k)ds \leq \frac{k^{\sigma^2}}{\sigma-1}\Big[\int_{t_1}^u R(s,t_1)x^{\sigma}(s)$$

$$f(s,k)ds\Big]^{1-\sigma}\Big|_t^{t_2},$$

故 $\int_{t_1}^{+\infty} R(s,t_1)f(s,k)ds < +\infty$。

又由(24)式，$\int_{t_2}^{+\infty} f(s,k)ds < +\infty$，

故 $\int_{t_2}^{+\infty} R(s)f(s,k)ds < +\infty$。

上式与(23)矛盾。定理得证。

定理8 设$\int^{+\infty}\frac{dt}{r(t)} < +\infty, f_i, i=1,2,\cdots,m$均为强超线性，$g_{ij}(t)\geqslant t(i=1,2,\cdots m; j=1,2,\cdots,n)$。那么方程(20)振动的充要条件为

$$\int^{+\infty}\left|\sum_1^m f_i(t,c\rho(g_{i1}(t)),\cdots,c\rho(g_{in}(t)))\right|dt = +\infty,$$

对一切$c\neq 0$。 (25)

证 必要性由第十章§4的定理6得到。下面我们证明其充分性。令

$\sigma=\min\{\sigma_i;\ \sigma_i$为$f_i$的强超线性常数，$i=1,2,\cdots,m\}$，那么，由引理1，$\sigma$可作为诸$f_i$公共的强超线性常数。

反证法。设(20)有非振动解$x(t)$，不失一般性，设$x(t)>0$。从(20)得$r(t)x'(t)$非增，那么$x'(t)$最终定号。我们可以证明：存在T，当$t\geqslant T$时，$x'(t)<0$。先取t_1足够大，使$\rho(t)\leqslant c$，$t\geqslant t_1$，其中c为任意给定的正数。

由超线性及$\rho(t)\geqslant\rho(g_{ij}(t))$ 推得

$$cf(t,\rho(g(t)))\leqslant\rho(t)f(t,c).$$

由条件，从而$\int^{+\infty}\rho(t)f(t,c)dt=+\infty$，那么$x(t)$不能为$A_c$型，所以$x(t)\to 0$，这样就证明了$x'(t)<0$。

设当$t\geqslant t_2$时，$x'(t)<0$，令$k=-r(t_2)x'(t_2)>0$。

由第十章§4的引理2，我们得到

$$x(t)\geqslant -r(t)x'(t)\rho(t)\geqslant k\rho(t),\qquad t\geqslant t_2.$$

根据f强超线性及$g_{ij}(t)\geqslant t$，得到

$$
\begin{aligned}
&\{-[-r(t)x'(t)]^{1-\sigma}\}' \\
&=(\sigma-1)[-r(t)x'(t)]^{-\sigma}f(t,x(g(t))) \\
&=(\sigma-1)\sum_{1}^{m}[-r(t)x'(t)]^{-\sigma}f_i(t,x(g_{i1}(t)),\cdots, \\
&\quad x(g_{in}(t))) \\
&=(\sigma-1)\sum_{i=1}^{m}\Big\{[-r(t)x'(t)]^{-\sigma}\Big[\sum_{j=1}^{n}p_{ij}x(g_{ij}(t))\Big]^{\sigma} \\
&\quad\cdot\Big[\sum_{j=1}^{n}p_{ij}(t)x(g_{ij}(t))\Big]^{-\sigma}f_i(t,x(g_{i1}(t)),\cdots, \\
&\quad x(g_{in}(t)))\Big\}.
\end{aligned}
$$

又因为 $\dfrac{x(g_{ij}(t))}{-r(t)x'(t)}\geqslant\dfrac{x(g_{ij}(t))}{-r(g_{ij}(t))x'(g_{ij}(t))}\geqslant\rho(g_{ij}(t))$

所以 $\{-[-r(t)x'(t)]^{1-\sigma}\}'\geqslant(\sigma-1)k^{-\sigma}f(t,k\rho(g(t)))$。

从t_2到t积分上式

$$
\begin{aligned}
&(\sigma-1)k^{-}\int_{t_2}^{t}f(s,k\rho(g(s)))ds\leqslant[-r(t_2)x'(t_2)]^{1-\sigma} \\
&\quad-[-r(t)x'(t)]^{1-\sigma},
\end{aligned}
$$

从而 $\displaystyle\int_{t_1}^{+\infty}f(s,k\rho(g(s)))ds<+\infty$。

与(25)式矛盾。定理得证。

定理9 设$\displaystyle\int^{+\infty}\frac{dt}{r(t)}=+\infty$，$f_i,i=1,2,\cdots,m$均为强次线性，$g_{ij}(t)\leqslant t$，$(i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots,n)$。那么方程(20)振动的充要条件为

$$
\int^{+\infty}\Big|\sum_{1}^{m}f_i(t,cR(g_{i1}(t)),\cdots,cR(g_{in}(t)))\Big|dt=+\infty,
$$

对一切$c\neq 0$。 (26)

证 必要性从第十章§4的定理4得到。下面我们证明其充分性。令

$\tau=\max\{\tau_i;\ \tau_i$为$f_i$的强次线性常数，$i=1,2,\cdots,m\}$那么，由引理1，$\tau$可作为诸$f_i$公共的强次线性常数。

反证法。设(20)有非振动解$x(t)$，不妨设$x(t)>0$，从方程(20)，$r(t)x'(t)$ 不增。又根据第十章§4 的引理1，存在 t_1，$k>0$，使得当$t\geqslant t_1$时

$$x'(t)>0, \qquad x(t)\leqslant kR(t).$$

因为$x(t)>\int_{t_1}^{t}r^{-1}(s)r(s)x'(s)ds\geqslant r(t)x'(t)\int_{t_1}^{t}\frac{ds}{r(s)}$

$$=R(t,t_1)r(t)x'(t)$$

所以，存在$t_2>t_1$，当$t\geqslant t_2$时 $x(t)\geqslant\frac{1}{2}R(t)r(t)x'(t)$。

不妨假设，$t\geqslant t_2$时

$$x'(g_{ij}(t))>0,$$

$$kR(g_{ij}(t))\geqslant x(g_{ij}(t))\geqslant\frac{1}{2}R(g_{ij}(t))r(g_{ij}(t))x'(g_{ij}(t)),$$

$$i=1,2,\cdots m; \qquad j=1,2,\cdots,n.$$

因f强次线性，$g_{ij}(t)\leqslant t$，那么

$$\{-[r(t)x'(t)]^{1-\tau}\}'=(1-\tau)[r(t)x'(t)]^{-\tau}f(t,x(g(t)))$$

$$=(1-\tau)\sum_{1}^{m}\left\{[r(t)x'(t)]^{-\tau}\left[\sum_{j=1}^{n}p_{ij}(t)x(g_{ij}(t))\right]^{\tau}\right.$$

$$\cdot\left[\sum_{j=1}^{n}p_{ij}(t)x(g_{ij}(t))\right]^{-\tau}f_i(t,x(g_{i1}(t)),$$

$$\left.\cdots,x(g_{in}(t)))\right\}$$

$$\geqslant(1-\tau)\left(\frac{1}{2}\right)^{\tau}k^{-\tau}f(t,kR(g(t))), \qquad t\geqslant t_2.$$

从t_2到t积分上式得

$$(1-\tau)\left(\frac{1}{2}\right)^{\tau}k^{-\tau}\int_{t_2}^{t}f(s,kR(g(s)))ds\leqslant[r(t_2)x'(t_2)]^{1-\tau}$$

$$-[r(t)x'(t)]^{1-\tau},$$

故 $$\int_{t_2}^{+\infty}f(s,kR(g(s)))ds<+\infty.$$

与(26)矛盾。定理得证。

定理10 设$\int^{+\infty}\frac{dt}{r(t)}<+\infty$，$f_i,i=1,2,\cdots,m$均为强次线性，

$g_{ij}(t)\leqslant t(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，那么方程(20)振动的充要条件为

$$\int^{+\infty}\rho(t)\left|\sum_{1}^{m}f_i(t,c,c,\cdots,c)\right|dt=+\infty,$$

对一切$c\neq 0$。 (27)

证 必要性由第十章§4的定理5得到。下面我们证明其充分性。令

$\tau=\max\{\tau_i;\tau_i$为f_i的强次线性常数$,i=1,2,\cdots m\}$，那么，根据引理1，τ可作为诸f_i公共的强次线性常数。

反证法。设(20)有非振动解$x(t)$，不妨设最终有$x(t)>0$。因$x(t)$不能是A_2型，故$x(t)\to 0(t\to+\infty)$，所以最终有$x'(t)<0$。我们设$t\geqslant t_1$时

$x'(g_{ij}(t))<0$

$$i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n$$

$0<x(g_{ij}(t))<k$。

积分(20)从t_1到t得

$$-r(t)x'(t)\geqslant\int_{t_1}^{t}f(s,x(g(s)))ds,$$

那么
$$\{-[x(t)]^{1-\tau}\}'=(1-\tau)[x(t)]^{-\tau}\frac{-r(t)x'(t)}{r(t)}$$

$$\geqslant(1-\tau)[x(t)]^{-\tau}\frac{1}{r(t)}\int_{t_1}^{t}f(s,x(g(s)))ds$$

$$\geqslant(1-\tau)k^{-\tau}\frac{1}{r(t)}\int_{t_1}^{t}f(s,k)ds。$$

从t_1到t积分上式得

$$(1-\tau)k^{-\tau}\int_{t_1}^{t}\left[\frac{1}{r(s)}\int_{t_1}^{s}f(\theta,k)d\theta\right]ds$$
$$\leqslant[x(t_2)]^{1-\tau}-[x(t)]^{1-\tau}。$$

令$t\to+\infty$得 $\displaystyle\int_{t_1}^{+\infty}\left[\frac{1}{r(s)}\int_{t_1}^{s}f(\theta,k)d\theta\right]ds<+\infty$，

即 $\displaystyle\int_{t_1}^{+\infty}\rho(s)f(s,k)ds<+\infty$，

与(27)矛盾，定理得证。

§3 高阶泛函微分方程解的振动性

在这一节中，我们考察高阶泛函微分方程的解的振动性。

首先，考虑如下形式的方程[147]

$$x^{(n)} + P(t)f(x(g(t))) = Q(t), \qquad (1)$$

并假定：

(i) $P \in C(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$;

(ii) $g \in C(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$, $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = \infty$;

(iii) $f \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, 为单调增加，且当$u \neq 0$时$uf(u) > 0$;

(iv) $Q \in C(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$。

定理1 除假设 (i)—(iv) 外，还假设当$t \geq 0$时$P(t) \geq 0$，且存在一个在$[0, \infty)$上为n阶连续可微的振动函数$R(t)$，使得$R^{(n)}(t) = Q(t)$，又假设对每一个$\lambda > 0$，有

(v) $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \int_0^t P(s) f(\lambda + \mathbf{R}(g(s))) ds = \infty$,

(vi) $\underline{\lim\limits_{t\to\infty}} \int_0^t P(s) f(-\lambda + R(g(s))) ds = -\infty$。

则当n为偶数时，方程(1)为振动；当n为奇数时，方程(1)的解或者为振动或者当$t \to \infty$时$[x(t) - R(t)]$单调地趋于零；如果上面的积分条件当$\lambda = 0$时也成立，则n为奇数时方程(1)为振动。

证 设n为偶数且上述的积分条件对每一个$\lambda > 0$成立。如果方程(1)不振动，则必存在(1)的解$x(t) > 0$，$t \geq t_0$。设$u(t) = x(t) - R(t)$，$t \in [t_0, \infty)$。则$u(t)$满足下面的方程

$$u^{(n)} + P(t)f(u(g(t))) + R(g(t)) = 0, \qquad (1)'$$

由于$u(t) + \mathbf{R}(t) > 0$，$t \in [t_0, \infty)$，故必存在 $t_1 \geq t_0$ 使得$u(g(t)) + \mathbf{R}(g(t)) > 0$，$t \geq t_1$。

因此 $$u^{(n)}(t) = -P(t)f(u(g(t))) + R(g(t)) \leq 0, \quad t \geq t_1. \qquad (2)$$

所以$u(t)$的每一阶导数$u^{(k)}(t)(k=0, 1, \cdots, n)$最终不变号。且在无穷区间上不会恒等于零，这是因为如果有某一阶导数$u^{(k)}(t)\equiv 0$，则必然$u^{(n)}(t)\equiv 0$，这与条件(V)矛盾。显然，当t充分大时$u(t)$是严格单调增加或严格单调减少的，假定t充分大时$u(t)<0$，则必存在$t_2\geqslant t_1$使得当$t\geqslant t_2$时$u(g(t))<0$，故$0>u(g(t))>-R(g(t))$，这与$R(t)$为振动的假设矛盾，故当t充分大时必然有$u(t)>0$，这蕴含了当t充分大时$u'(t)>0$及$u^{(n-1)}(t)>0$（可参看文[148]定理2）。因此，存在$t_2\geqslant t_1$使得

$$u^{(n-1)}(t)>0,\ u(g(t))\geqslant\lambda>0,\ t\geqslant t_2. \qquad (3)$$

其中λ为常数。对(1)′从t_2到$t\geqslant t_2$积分得

$$u^{(n-1)}(t)=u^{(n-1)}(t_2)-\int_{t_2}^{t}P(s)f(u(g(s))+R(g(s)))ds\leqslant u^{(n-1)}(t_2)-\int_{t_2}^{t}P(s)f(\lambda+R(g(s)))ds. \qquad (4)$$

由此易知 $\lim\limits_{t\to\infty}u^{(n-1)}(t)=-\infty$，这与(3)矛盾。

综上所述，$u(t)$当t充分大时既不是最终为正，也不是最终为负，又不是振动。故在$x(t)>0$，$t\geqslant t_0$的假设下$u(t)$不存在。在$t\geqslant t_0$时$x(t)<0$的情形下亦可推出同样的结论，这证明了当n为偶数时方程(1)为振动。

对n为奇数的情形，如果t充分大时$u(t)>0$，则$u'(t)$最终为负，如果t充分大时$u(t)<0$，则$u'(t)$最终为正，这两种情况都会推出当$t\to\infty$时，$u(t)=x(t)-R(t)$单调趋于零。如果不是这两种情形，则采用n为偶数时的论证方法，可证明方程(1)为振动。

现在讨论n为奇数且$\lambda=0$时(V)和(vi)成立的情形。

当$\lambda=0$时(v)和(vi)成立，则$\lambda>0$时(v)和(vi)当然成立，从而对n为偶数的情形定理为真。当n为奇数时我们由(4)式可得

$$u^{(n-1)}(t)\leqslant u^{(n-1)}(t_2)-\int_{t_2}^{t}P(s)f(R(g(s)))ds,\quad t\geqslant t_2.$$

由此可推得$\lim\limits_{t\to\infty}u^{(n-1)}(t)=-\infty$，或$\lim\limits_{t\to\infty}u(t)=-\infty$。这与$u(t)>0$矛盾。

$u(t)$最终为负的情形可得类似的结果

因此，$x(t)$为振动。证毕。

下面给出定理1的一个有用的推论。

推论1 假定$f(u)=u^{2q+1}$，q为负整数，且满足条件(i)-(iv)，当$t\geqslant0$时$P(t)\geqslant0$，Q，R如定理1所规定，又设当$m=1,2,\cdots,2q+1$时有

$$\int_0^\infty P(t)dt=\infty,\quad \int_0^\infty P(t)|R(g(t))|^m dt<\infty, \tag{6}$$

则定理1的结论当$\lambda\neq0$时成立。

证 只要注意到$\lambda\neq0$时有

$$(\lambda+R(g(t)))^{2q+1}=\sum_{k=0}^{2q+1}\binom{2q+1}{k}\lambda^{2q+1-k}[R(g(t))]^k. \tag{7}$$

推论1便可立即证得。

同理可得

推论2 除(6)外，设推论1的假设成立。又设

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_0^t P(t)[R(g(t))]^m dt=\infty,$$

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\int_0^t P(t)[R(g(t))]^m dt=-\infty.$$

对某一个偶整数$m(2\leqslant m\leqslant2q)$成立，且对每一个$j=0,1,2,\cdots,m-1,m+1,\cdots,2q+1$，有

$$\int_0^\infty P(t)|R(g(t))|^j dt<\infty.$$

则定理1的结论当$\lambda\neq0$时成立。

下面考察有界解的振动性。

定理2 设定理1的假定成立，且R为有界。条件(v)和(vi)换为

(v)′ $\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_0^t s^{m_1}P(s)f(\lambda+R(g(s)))ds=\infty$, (8)

(vi)′ $\underline{\lim_{t\to\infty}}\int_0^t s^{m_2}P(s)f(-\lambda+R(g(s)))ds=-\infty$. (9)

其中m_1，m_2为整数，$m_1\geqslant1$，$m_2\leqslant n-1$。
则有(a)当n为偶数且$\lambda>0$及(v)′，(vi)′成立时，则方程(1)的一切有界解为振动。

(b) 当n为奇数时，则方程(1)的每一个有界解x或者为振动，或者当$t\to\infty$时$[x(t)-R(t)]$单调地趋于零。

(c) 若(v)′和(vi)′对$\lambda=0$成立，则方程(1)的每一个有界解为振动。

证 (a) 当n为偶数时，设$x(t),u(t)$如定理1的证明中直到(3)式那样，现考虑$t^{m_1}u^{(n-1)}(t)$。微分之得到

$$[t^{m_1}u^{(n-1)}(t)]'=-t^{m_1}P(t)f(u(g(t)))+R(g(t))$$
$$+m_1t^{m_1-1}u^{(n-1)}(t).$$

再从t_2到$t\geqslant t_2$积分得

$$t^{m_1}u^{(n-1)}(t)=t_2^{m_1}u^{(n-1)}(t_2)-\int_{t_2}^t s^{m_1}P(s)f(u(g(s))$$
$$+R(g(s)))ds+m_1\int_{t_2}^t s^{m_1-1}u^{(n-1)}(s)ds. \tag{10}$$

利用条件(v)′可得

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\left[t^{m_1}u^{(n-1)}(t)-m_1\int_{t_2}^t s^{m_1-1}u^{(n-1)}(s)ds\right]=-\infty. \tag{11}$$

由于当$t\geqslant t_2$时$u^{(n-1)}(t)>0$及$\int_{t_2}^t s^{m_1-1}u^{(n-1)}(s)ds$为$t$的增函数，故有

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t_2}^t s^{m_1-1}u^{(n-1)}(s)ds=\infty. \tag{12}$$

如果$x(t)$为有界，则$u(t)$也为有界且$(-1)^k u^{(k)}(t)<0$，$k=1,2,\cdots,n-1$，$t\geqslant t_2$。对(12)进行多次积分并用分部积分法，

于是有

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t_2}^{t} u^{(n-m)}(s)ds = \infty \qquad \text{如果}m\text{为奇数，}$$

$$= -\infty \qquad \text{如果}m\text{为偶数。}$$

这与$u(t)$的有界性矛盾。从而结论(a)得证。

为了避免过多的重复，(b)与(c)的证明从略。

现在我们讨论下列形式的方程

$$[r(t)x^{(n-1)}(t)]' + a(t)f(x(g(t))) = b(t), \tag{13}$$

$$[r(t)x'(t)]^{(n-1)} + a(t)f(x(g(t))) = b(t) \tag{14}$$

的有界解的振动性和渐近性。现假设

(a) $a,\ b\in C(\mathbf{R}^+,\mathbf{R})$；

(b) $r\in C(\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+)$且$\int^{\infty} r^{-1}(t)dt = \infty$；

(c) $f\in C(\mathbf{R}^+,\mathbf{R})$，$yf(y)>0$当$y\neq 0$时，$f(y)$非减；

(d) $g\in C(\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+)$，且$\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = \infty$。

定理3[149] 除假设(a)—(d)成立外，还假设

$$\int^{\infty} a_+(t)dt = \infty, \quad \int^{\infty} a_-(t)dt > -\infty, \tag{15}$$

这里$a_+(t) = \max\{a(t),0\}$，$a_-(t) = \min\{a(t),0\}$。又

$$\int^{\infty} |b(t)|dt < \infty. \tag{16}$$

则方程(13)和(14)的有界解$x(t)$或者为振动或者有

$$\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0. \tag{17}$$

证 设$x(t)$为方程(13)的有界非振动解。不妨假定$x(t)$最终为正。如果(17)不成立，则存在正数m，M和T，使得

$$m \leqslant x(g(t)) \leqslant M, \quad t \geqslant T. \tag{18}$$

积分(13)从T到t，并考虑到(c)，可得

$$r(t)x^{(n-1)}(t) - r(T)x^{(n-1)}(T)$$

$$= -\int_T^t a_+(s)f(x(g(s)))\,ds - \int_T^t a_-(s)f(x(g(s)))ds$$

$$+\int_T^t b(s)ds \leqslant -f(m)\int_T^t a_+(s)ds - f(M)\int_T^t a_-(s)ds$$

$$+\int_T^t b(s)ds \qquad (19)$$

在(19)中令$t\to\infty$并用(15)和(16)，得到

$$\lim_{t\to\infty} r(t)x^{(n-1)}(t) = -\infty.$$

由(b)知$r(t)\geqslant 0$，故$\lim\limits_{t\to\infty} x^{(n-1)}(t) = -\infty$，因而$\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = -\infty$，这与$x(t)$最终为正矛盾。因此对(13)的论断成立。

下面证明对(14)的论断。

设$x(t)$为(14)的有界解使得$\varlimsup\limits_{t\to\infty} x(t) > 0$。则存在某正数$m$，$M$，$T$使(18)式成立。类似上面的论证可得

$$\lim_{t\to\infty}[r(t)x'(t)]^{(n-2)} = -\infty.$$

于是有$\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = -\infty$。导出了矛盾。故对方程(14)的论断成立。

下面的例子表明条件(15)不能减弱为

$$\int^\infty a(t)dt = \infty. \qquad (20)$$

例 方程

$$x''(t) - \frac{\sin t}{2+\sin t}x(t-\pi) = 0$$

具有解$x(t) = 2-\sin t$。它既不振动也不满足$\varlimsup\limits_{t\to\infty}|x(t)| = 0$。系数$a(t) = \sin t/(2+\sin t)$满足(20)但不满足(15)，事实上，

$$\int^\infty a_+(t)dt = \infty, \quad \int^\infty a_-(t)dt = -\infty.$$

下面我们介绍泛函微分方程振动理论中的一个比较定理[150]。

考虑泛函微分方程

$$x^{(n)}(t) + H_i(t, x(g(t))) = Q(t) \quad (i=1,2).$$

其中$H_i \in C(\mathrm{R}^+\times\mathrm{R},\ \mathrm{R})$。

定理4 设函数$H_i(t,u)$关于u单调增加。且对$u\neq 0$有$uH_i(t,$

$u)>0$。设$P\in C^n(\mathrm{R}^+,\mathrm{R})$，$P^{(n)}(t)=Q(t),t\geqslant 0$，且$\lim\limits_{t\to\infty}P(t)=0$。设 $g\in C(\mathrm{R}^+,\ \mathrm{R})$，且 $g(t)\leqslant t$，$\lim\limits_{t\to\infty}g(t)=\infty$。又设 $P(t)$为振动及

$$H_1(t,u)\leqslant H_2(t,u),\quad t\in\mathrm{R}^+,\quad u\geqslant 0,$$
$$H_1(t,u)\geqslant H_2(t,u),\quad t\in\mathrm{R}^+,\quad u<0.$$

如果方程

$$x^{(n)}(t)+H_1(t,x(g(t)))=Q(t) \tag{21}$$

当n为偶数时为振动，当n为奇数时，解$x(t)$或为振动或为$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$。则方程

$$x^{(n)}(t)+H_2(t,x(g(t)))=Q(t) \tag{22}$$

有同样的结论。

证 用反证法，若定理不真，则(22)必存在这样的解$Z(t)$：当n为偶数时$Z(t)$不振动，当n为奇数时 $Z(t)$不振动且$\lim\limits_{t\to\infty}|Z(t)|>0$，不妨设当$t\geqslant T$时$Z(t)>0$，则函数 $u(t)\equiv Z(t)-P(t)$ 为下列方程

$$u^{(n)}(t)+H_2(t,u(g(t))+P(g(t)))=0 \tag{23}$$

的最终正解。事实上，当t充分大时，不妨设 $t\geqslant T_1\geqslant T$ 时，有$u(g(t))+P(g(t))>0$。因此有$u^{(n)}(t)<0$，$t\geqslant T$，于是$u(t)$最终不变号。若t充分大时 $u(t)<0$，则 $P(t)>-u(t)>0$，这与$P(t)$的振动性矛盾。所以$u(t)$只能是最终为正。由$u^{(n)}(t)<0$，$u(t)>0$。根据Kигуpадзе引理[151]，对n为偶(奇)数时存在一个奇(偶)数$0\leqslant l\leqslant n-1$，使得

$$u^{(i)}(t)>0,\quad i=0,\ 1,\ \cdots,\ l,$$
$$(-1)^{l+i}u^{(i)}(t)\geqslant 0,\quad i=l+1,\ \cdots,\ n,\quad t\geqslant T_1.$$

因此，在特殊情形，当 n 为偶数或奇数且 $t\geqslant T_1$ 时 $u(t)>0$，$u'(t)>0$，或者当n为奇数且$t\geqslant T_1$时$u(t)>0$，$u'(t)<0$。现取T_1 足够大使$|P(t)|<c<u(T_1)$，$t\geqslant T_1$，其中c为某正常数，则有

$$u^{(n)}(t)+H_1(t,u(g(t))+P(g(t)))\leqslant u^{(n)}(t)+H_2(t,$$
$$u(g(t))+P(g(t)))=0,\quad t\geqslant T_1,$$

注意到$t\geqslant T_1$时$u(g(t))+P(g(t))>0$，

则不等式 $u^{(n)}(t)+H_1(t,u(g(t))+P(g(t)))\leqslant 0$ (24)

有解$u(t)$具有性质$u(t)>0$，$u'(t)>0$(或$u'(t)<0$在某奇数的情形)，对(24)进行n次积分得到

$$u(t)\geqslant u(T_1)+\int_{T_1}^{t}\int_{T_1}^{S_{n-1}}\cdots\int_{T}^{S_{n-l+1}}\int_{S_{n-l}}^{\infty}\cdots$$

$$\int_{S_1}^{\infty}H_1(t,u(g(t))+P(g(t)))dtds_1\cdots ds_{n-1}$$

$$\geqslant c+\psi(t,u(g(t))+P(g(t))),\quad t\geqslant T_1. \qquad (25)$$

其中$c=u(T_1)$(当$u'(t)>0$时)及$c=u(T_1)/2$（当$u'(t)<0$时），$\psi(t,u(g(t))+P(g(t)))$表示上面的多重积分。

现在证明积分方程

$$v(t)=c+\psi(t,v(g(t))+P(g(t))),\quad t\geqslant T_1 \qquad (26)$$

存在正解。为此，定义$v_n(t)$，$n=0, 1, \cdots$

使得 $v_0(t)=u(t)$，$t\geqslant T$,

$$v_{n+1}(t)=\begin{cases}c+\psi(t,v_n+P), & t\geqslant T_1,\\ c, & T\leqslant t\leqslant T_1.\end{cases}$$

则 $0<v_n(t)<u(t)$，$c\leqslant v_{n+1}(t)\leqslant v_n(t)$, (27)

若令 $v(t)=\lim\limits_{t\to\infty}v_n(t)$，$t\geqslant T_1$. (28)

则由(27)，(28)，及Lebesgue定理可得

$$v(t)=c+\psi(t,v(g(t))+P(g(t))),\quad t\geqslant T_1,$$

微分(26)n次，则有

$$v^{(n)}(t)+H_1(t,v(g(t)))=Q(t),\quad t\geqslant T_1. \qquad (29)$$

由于$v(t)+P(t)>c+P(t)>0$，故(29)具有最终正解，或当n为奇数时$\varliminf\limits_{t\to\infty}v(t)>0$。得到了矛盾。

对方程(22)的最终负解，可用上述的论证得到类似的矛盾。证毕。

下面我们讨论强超(次)线性的四阶泛函微分方程的振动性。

考虑方程

$$[r(t)y''(t)]''+f(y(g(t)),t)=0_{\circ} \tag{30}$$

我们总假定

(a) $r(t)$当$t\geqslant T_0$时为连续，T_0为某一正数，且$\int_{T_0}^{\infty}\frac{s}{r(s)}ds=\infty$;

(b) $f(y,t)$当$|y|<\infty, t\geqslant T_0$时连续，且$y\neq 0$时$yf(y,t)>0$，$t\geqslant T_0$;

(c) $g(t)$当$t\geqslant T_0$ 时为连续且$\lim\limits_{t\to\infty}g(t)=\infty$。

记 $\quad R(t,u)=\int_u^t\frac{(t-s)(s-u)}{r(s)}ds \quad (t>u>T_0)$,

$R(t)=R(t,T_0)$.

引理1 如果$y(t)$是方程(15)的最终正解，则下列两种情形之一成立：

(I) $y'(t)>0$, $y''(t)>0$, $[r(t)y''(t)]'>0$，当t充分大时；

(II) $y'(t)>0$, $y''(t)<0$, $[r(t)y''(t)]'>0$，当t充分大时。

对任一种情形，存在正数$u>T_0$，使得当$t\geqslant u$时

$$y(t)\leqslant aR(t,u)<aR(t). \tag{31}$$

证 设$t\geqslant T_1>T_0$时$y(t)>0$。则存在$t_0>T_1$，使得$t\geqslant t_0$时$y(g(t))>0$。由方程(30)，则$t\geqslant t_0$时$[r(t)y''(t)]''<0$。因此，$[r(t)y''(t)]'$最终不变号。假定$t\geqslant t_1>t_0$时$[r(t)y''(t)]'<0$。由假定(a)，可知$\lim\limits_{t\to\infty}y'(t)=-\infty$，这与$y(t)$的正性矛盾。因此我们必然有$[r(t)y''(t)]'>0$，当$t\geqslant t_0$时。由此可知$r(t)y''(t)$最终不变号。如果当$t>t_0$时$r(t)y''(t)<0$，则易知$y'(t)$最终为正。如果存在$t_2\geqslant t_0$使得当$t\geqslant t_2$时$r(t)y''(t)>0$，则$t\geqslant t_2$时$r(t)y''(t)\geqslant c$，$c=r(t_2)y'(t_2)$。用$t/r(t)$乘此不等式并从$t_2$到$t$积分得

$$ty'(t)-y(t)-t_2y'(t_2)+y(t_2)\geqslant c\int_{t_2}^{t}\frac{s}{r(s)}ds,$$

$$t\geqslant t_2.$$

由条件(a),可看到$\lim_{t\to\infty} ty'(t)=\infty$,由此知当$t$充分大时$y'(t)>0$。如果积分$[r(t)y''(t)]''<0$四次从$u>t_0$到$t$，则有

$$y(t)\leqslant a_0+a_1t+a_2\int_u^t\frac{t-s}{r(s)}ds+a_3\int_u^t\frac{(t-s)(s-u)}{r(s)}ds. \tag{32}$$

其中a_0，…，a_3为正常数。

由于 $$\frac{\partial R(t,u)}{\partial u}=-\int_t^u\frac{-(t-s)}{r(s)}ds=-\int_u^t\frac{t-s}{r(s)}<0$$

$$(t>u>T_0).$$

可知$R(t,u)(t>u>T_0)$关于u为单调减少。再由(32)便得引理之证。

引理2 若$u>T_0$，则$\lim_{t\to\infty}\frac{R(t,u)}{R(t)}=1$。

证 $$\lim_{t\to\infty}\frac{R(t,u)}{R(t)}=\lim_{t\to\infty}\left[\int_u^t\frac{(t-s)(s-u)}{r(s)}ds\Big/\int_{T_0}^t\frac{(t-s)(s-T_0)}{r(s)}ds\right]$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[\int_u^t\frac{s-u}{r(s)}ds\Big/\int_{T_0}^t\frac{s-T_0}{r(s)}ds\right]$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{t-u}{r(t)}\Big/\frac{t-T_0}{r(t)}\right]=1.$$

引理3 若$y(t)$是方程(30)的最终正解，则存在$T^*\geqslant T_0$，使得当$t\geqslant T^*$时有

$$y(t)\geqslant R^*(t)[r(t)y''(t)]'+\int_{T^*}^t R^*(s)f(y(g(s)),s)ds.$$

其中$R^*(t)=R(t,T^*)$。

证 取T^*足够大使得$t\geqslant T^*$时 $y(t)$ 满足引理1的情形(I)或(II)。假定情形(I)成立。由于$y''(t)>0$，$[r(t)y''(t)]'$单调减少，故当$t\geqslant T^*$时有

$$r(t)y''(t)\geqslant\int_{T^*}^t[r(s)y''(s)]'ds$$
$$\geqslant(t-T^*)[r(t)y''(t)]'. \tag{33}$$

注意到$y'(t)$的正性，便得

$$y'(t)\geqslant\int_{T^*}^{t} y''(s)ds\geqslant\int_{T^*}^{t}\frac{s-T^*}{r(s)}[r(s)y''(s)]'ds,$$

$$t\geqslant T^*$$

由此有

$$y(t)\geqslant\int_{T^*}^{t} y'(s)ds\geqslant\int_{T^*}^{t}\int_{T^*}^{s}\frac{u-T^*}{r(u)}[r(u)y''(u)]'duds$$

$$\geqslant\int_{T^*}^{t}\left(\int_{T^*}^{s}\frac{u-T^*}{r(u)}du\right)[r(s)y''(s)]'ds,\quad t\geqslant T^*. \tag{34}$$

用分部积分法可得

$$y(t)\geqslant R^*(t)[r(t)y''(t)]'-\int_{T^*}^{t}R^*(s)[r(s)y''(s)]''ds. \tag{35}$$

由此便可得到结论。

下面假定引理1的情形(II)成立。以$R^*(t)$乘方程(30)并从T^*到t积分，重复使用分部积分法，可得

$$R^*(t)[r(t)y''(t)]'-(R^*(t))'r(t)y''(t)$$
$$+(t-T^*)y'(t)-y(t)+y(T^*)$$
$$+\int_{T^*}^{t}R^*(s)f(y(g(s)),\ s)ds=0. \tag{36}$$

由于$y''(t)<0$，$y'(t)>0$及$y(T^*)>0$，故由(36)便可得到结论证毕。

定理5 假设函数$f(x,t)$为强次线性且$g(t)\leqslant t$，则方程(30)为振动的充要条件为

$$\int^{\infty}|f(cR(s),s)|ds=\infty \quad 对一切c\neq 0成立。 \tag{37}$$

证 先证必要性

用反证法，假设方程(30)振动，但(37)式不成立，则存在某一个$c\neq 0$使

$$\int^{\infty}|f(cR(s),\ s)|ds<\infty. \tag{38}$$

现不妨假定 $c>0$（$c<0$ 时可类似地论证）。设 $a=\frac{c}{2}$. 则必存在 $T_2>T_0$ 使得

$$\int_{T_2}^{\infty}|f(cR(s),s)|ds<\frac{a}{2}.$$

由于 f 为强超线性，因此也为超线性，注意到 $g(t)\leqslant t$，故有

$$\int_{T_2}^{\infty}|f(cR(g(s)),s)|ds<\frac{a}{2}. \tag{39}$$

设 $T_3=\inf\{g(t):t\geqslant T_2\}>T_0$。

考虑积分方程

$$y(t)=(\Phi y)(t), \tag{40}$$

其中

$$\begin{cases}(\Phi y)(t)=aR(t)+\int_{T_2}^{t}\int_{T_2}^{s_3}\frac{1}{r(s_2)}\int_{T_2}^{s_2}\int_{s_1}^{\infty}f(y(g(s)),s)\\ \qquad\cdot ds\,ds_1\,ds_2\,ds_3,\quad t\geqslant T_2. \\ (\Phi y)(t)=aR(t),\quad T_3^*\leqslant t\leqslant T_2.\end{cases} \tag{41}$$

这里 $T_3^*=\min(T_3,T_2)$。不难验证，(40)的解也是(30)的解。

设 $C_R[T_3^*,\infty)$ 是由所有连续函数 $y:[T_3^*,\infty)\to\mathrm{R}$ 所组成的空间，并使得 $\|y\|_R=\sup\{R(t)^{-2}|y(t)|:t\geqslant T_3^*\}<\infty$。显然 $C_R[T_3^*,\infty)$ 在范数取为 $\|\cdot\|_R$ 时成为Banach空间。设集合

$$Y=\{y\in C_R[T_3^*,\infty):aR(t)\leqslant y(t)\leqslant 2aR(t),\quad t\geqslant T_3^*\}.$$

它是 $C_R[T_3^*,\infty)$ 中的有界闭凸子集。

(i) Φ 将 Y 映入 Y

若 $y\in Y$，则由(41)，$(\Phi y)(t)\geqslant aR(t)$，$t\geqslant T_3^*$。由超线性知

$$f(y(g(s)),s)\leqslant f(2aR(g(s)),s),$$

再由(39)，可得

$$(\Phi y)(t)\leqslant aR(t)+2\left(\int_{T_2}^{t}\int_{T_2}^{s_3}\frac{1}{r(s_2)}\int_{T_2}^{s_2}ds_1\,ds_2\,ds_3\right)$$

$$\cdot\left(\int_{T_2}^{\infty}f(y(g(s)),s)ds\right)\leqslant aR(t)$$

$$+a\int_{T_2}^{t}\frac{(t-s_2)(s_2-T_2)}{r(s_2)}ds_2$$

$$\leqslant aR(t)+aR(t,T_2)\leqslant 2aR(t),\quad t\geqslant T_2.$$

及 $$(\Phi y)(t)=aR(t),\quad T_3^*\leqslant t\leqslant T_2.$$

故Φ将Y映入Y。

(ii) Φ为连续。

设y_n为Y中元素的一个序列使$\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n-y\|_R=0$。因$Y$为闭集，故$y\in Y$。又

$$|(\Phi y_n)(t)-(\Phi y)(t)|\begin{cases}\leqslant\int_{T_2}^{t}\int_{T_2}^{S_3}\frac{1}{r(s_3)}\int_{T_2}^{S_2}\int_{S_1}^{\infty}\\ \cdot F_n(g(s))dsds_1ds_2ds_3,\quad t\geqslant T_2,\\ =0,\quad T_3^*\leqslant t\leqslant T_2.\end{cases}$$

其中 $$F_n(g(s))=|f(y_n(g(s)),s)-f(y(g(s)),s)|$$
$$\leqslant 4f(cR(g(s)),s).$$

应用(39)式，得到

$$\begin{aligned}|(\Phi y_n)(t)-(\Phi y)(t)|&\leqslant\left(\int_{T_2}^{\infty}F_n(g(s))ds\right)\int_{T_2}^{t}\int_{T_2}^{S_3}\frac{1}{r(s_2)}\\&\cdot\int_{T_2}^{S_2}ds_1ds_2ds_3\\&\leqslant\left(\int_{T_2}^{\infty}F_n(g(s))ds\right)R(t,T_2)\\&\leqslant\left(\int_{T_2}^{\infty}F_n(g(s))ds\right)R(t),t\geqslant T_2,\end{aligned}\tag{42}$$

$$(=0,\quad T_3^*\leqslant t\leqslant T_2).$$

于是有 $$\|\Phi y_n-\Phi y\|_R\leqslant\sup_{t\geqslant T_3^*}R(t)^{-2}R(t)\int_{T_2}^{\infty}F_n(g(s))ds.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}F_n(g(s))=0$，故$y_n$在$C_R[T_3^*,\infty)$中收敛于$y$。根据Lebesgue控制收敛定理有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{T_2}^{\infty}F_n(g(s))ds=0.$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}\|\Phi y_n-\Phi y\|_R=0$。即$\Phi$为连续。

(iii) $\overline{\Phi Y}$为紧。

要证明这一点，只须证明函数族$\{R^{-2}\Phi y: y\in Y\}$为一致有界和等度连续。一致有界性是显然的，我们只须证明等度连续性。根据Levitan定理[158]，只须证明对任意的$\varepsilon>0$，区间$[T_3^*,\infty)$能分为有限个子区间，使得函数族中的每一个函数的振动不超过ε。如果$y\in Y$，根据$R(t)\geqslant R(t,T_2)$，$t\geqslant T_2$，我们有当$t_2>t_1\geqslant T_2$时，

$$
\begin{aligned}
&|(R^{-2}\Phi y)(t_2)-(R^{-2}\Phi y)(t_1)|\\
&\leqslant 2aR(t_1)^{-1}+2R(t_2)^{-2}\left(\int_{T_2}^{\infty}f(cR(g(s)),s)ds\right)\\
&\cdot\int_{T_2}^{t_2}\int_{t_1}^{s_3}\frac{1}{r(s_2)}\int_{T_2}^{s_2}ds_1ds_2ds_3+2R(t_1)^{-2}\left(\int_{T_2}^{\infty}f(cR\right.\\
&\cdot\left.(g(s)),s)\,ds\right)\int_{T_2}^{t_1}\int_{T_2}^{s_3}\frac{1}{r(s_2)}\int_{T_2}^{s_2}ds_1ds_2ds_3\leqslant 4aR(t_1)^{-1}.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

注意到当$t_1\to\infty$时，$R(t_1)^{-1}\to 0$。由(43)，存在$T_4>T_2$使得当$t_2>t_1>T_4$时对所有的$y\in Y$，有

$$|(R^{-2}\Phi y)(t_2)-(R^{-2}\Phi y)(t_1)|<\varepsilon.$$

当$T_2\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant T_4$时，由(29)得

$$
\begin{aligned}
&|(R^{-2}\Phi y)(t_2)-(R^{-2}\Phi y)(t_1)|\\
&\leqslant a|R(t_2)^{-1}-R(t_1)^{-1}|+R(t_2)^{-2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{T_2}^{s_3}\\
&\cdot\frac{1}{r(s_2)}\int_{T_2}^{s_2}\int_{s_1}^{\infty}f(y(g(s)),s)dsds_1ds_2ds_3+|R(t_2)^{-2}\\
&-R(t_1)^{-2}|\int_{T_2}^{t_1}\int_{T_2}^{s_3}\frac{1}{r(s_2)}\int_{T_2}^{s_2}\int_{s_1}^{\infty}\\
&\cdot f(y(g(s)),s)dsds_1ds_2ds_3\leqslant a|R(t_2)^{-1}-R(t_1)^{-1}|\\
&+2R(T_2)^{-2}\left(\int_{T_2}^{\infty}f(cR(g(s)),s)ds\right)\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_{T_2}^{s_3}\frac{1}{r(s_2)}\right.\\
&\cdot\left.\int_{T_2}^{s_2}ds_1ds_2ds_3\right)+2|R(t_2)^{-2}-R(t_1)^{-2}|
\end{aligned}
$$

$$\cdot\left(\int_{T_1}^{\infty} f(cR(g(s)),s)ds\right)\left(\int_{T_1}^{T_4}\int_{T_2}^{s_1}\frac{1}{r(s_2)}\int_{T_3}^{s_2} ds_1 ds_2 ds_3\right).$$

这个不等式保证了存在$\delta>0$使得对所有的$y\in Y$，当$t_2-t_1<\delta$时，有

$$|(R^{-2}\Phi y)(t_2)-(R^{-2}\Phi y)(t_1)|<\varepsilon. \tag{44}$$

当t_1，$t_2\in[T_3^*,T_2]$时，易证(44)式是成立的。

综上所述，函数族$\{R^{-2}\Phi y:y\in Y\}$是等度连续的。故$\overline{\Phi Y}$为紧。

根据(i)、(ii)、(iii)，知满足Schauder不动点定理的条件，从而映像Φ在Y中存在不动点$y^*(t)$，故方程(40)从而方程(30)存在正解$y^*(t)$。这与假设方程(30)为振动矛盾。故(37)式成立。

下证充分性　假设(37)成立。如果结论不真，则方程(30)存在非振动解$y(t)$。设$t\geqslant T_4>T_0$时$y(g(t))>0$。由引理3知存在$T^*\geqslant T_4$，使得当$t\geqslant T^*$时有

$$y(t)\geqslant R^*(t)[r(t)y''(t)]'. \tag{45}$$

根据引理1，存在正数k和$T_5\geqslant T^*$，使得当$t\geqslant T_5$时，$y(t)\leqslant kR(t)$。又存在T_6使$t\geqslant T_6$时$g(t)\geqslant T_5$。再由强超线性可得

$$f(y(g(t)),t)/(y(g(t)))^\beta\geqslant f(kR(g(t)),t)/(kR(g(t)))^\beta,\quad t\geqslant T_6. \tag{46}$$

由引理2，有$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{R^*(t)}{R(t)}=1$，使用(45)，(46)，$g(t)\leqslant t$，$[r(t)\cdot y''(t)]''<0$这些事实，知存在$T_7\geqslant T_6$，使得当$t\geqslant T_7$时有

$$\begin{aligned}\{-([r(t)y''(t)]')^{1-\beta}\}'&=-(1-\beta)([r(t)y''(t)]')^{-\beta}\\&\cdot[r(t)y''(t)]''=(1-\beta)([r(t)y''(t)]')^{-\beta}\\&\cdot f(y(g(t)),t)/y((g(t))^\beta)y(g(t))^\beta\geqslant(1-\beta)\\&\cdot([r(t)y''(t)]')^{-\beta}(f(kR(g(t)),t)/(kR^*(g(t))^\beta)\\&\cdot[r(v)y''(v)]_{v=g(t)})^\beta\geqslant\left(\frac{1-\beta}{k^\beta}\right)([r(t)y''(t)]')^{-\beta}\\&\cdot(f(kR(g(t)),t))\cdot(R^*(g(t))/R(g(t)))^\beta\\&\cdot([r(t)y''(t)]')^\beta=\left(\frac{1-\beta}{k^\beta}\right)(f(kR(g(t)),t)\end{aligned}$$

$$\cdot(R^*(g(t))/R(g(t)))^{\beta}$$

$$\geqslant c\left(\frac{1-\beta}{k^{\beta}}\right)f(kR(g(t)),t) \tag{47}$$

其中c，β为常数$0<\beta<1$。

对(47)积分得

$$\int_{T_1}^{\infty} f(kR(g(s)),s)ds<\infty。$$

这与(37)式矛盾。故方程(30)为振动。证毕。

采用类似论证方法，可得到下面的定理

定理6 假定函数 $f(x,t)$ 为强次线性，且$g(t)\leqslant t$，则方程(30)为振动的充要条件为

$$\int^{\infty} R(s)|f(c,s)|ds=\infty \quad 对一切c\neq 0成立。$$

第十二章

泛函微分方程的周期解

在本章中，将介绍泛函微分方程周期解的一些理论，其中包括不动点定理法、常微分方程产生法、映像特征函数法、李雅普诺夫第二方法等一些重要结果。

§1 关于Massera及Yoshizawa周期解定理的推广

对纯量的周期常微分方程，J. L. Massera 曾经证明了有界解的存在性蕴含了周期解的存在性。[159] T. Yoshizawa 则对泛函微分方程证明了当滞量r小于或等于方程的周期ω时，如果方程的解一致有界，一致最终有界，则存在ω—周期解。[133] 在本节中，我们介绍文[160]的结果，它将Massera 定理推广到泛函微分方程并改进Yoshizawa的结果。

考虑泛函微分方程

$$\dot{x}(t)=F(t,\ x_t)_\circ \tag{1}$$

其中F：$\boldsymbol{R}\times C\to\boldsymbol{R}^n$为连续，$F(t+\omega,\ \phi)=F(t,\phi)$。假定方程(1)的初值问题有唯一解。

若$\bar{x}(t;\ t_0,\ \varphi)$表示方程(1)过点$(t_0,\ \varphi)$的解，又以$x_1(t;\ t_0,\ \bar{x}_{t_0+\omega}(t_0,\ \varphi))$表示方程(1)过$(t_0,\ \bar{x}_{t_0+\omega}(t_0,\ \varphi))$的解。可以证明，对$t\geqslant t_0$，有

$$x_1(t;\ t_0,\ \bar{x}_{t_0+\omega}(t_0,\ \varphi))=\bar{x}(t+\omega;\ t_0,\ \varphi)_\circ \tag{2}$$

定理1 设系统(1)有一个解$\bar{x}(t, t_0, \varphi)$，且存在正整数k及$\varphi_0\in C$使得

$$\lim_{n\to\infty}\|\bar{x}_{nk\omega+t_0}(t_0, \varphi)-\varphi_0\|=0,$$

则系统(1) 至少有一个$k\omega$—周期解。

证明 记$x_0(t; t_0, \varphi_0)$ 为以φ_0为初始函数的解，$x_n(t; t_0, \bar{x}_{nk\omega+t_0}(t_0, \varphi))$是以$\bar{x}_{nk\omega+t_0}(t_0, \varphi)$ 为初始函数的解，则由(2)式，对$t\geqslant t_0$有

$$\begin{aligned}&x_n(t; t_0, \bar{x}_{nk\omega+t_0}(t_0, \varphi))\\&=\bar{x}(t+nk\omega; t_0, \varphi)\\&=x_{n-1}(t+k\omega; t_0, \bar{x}_{(n-1)k\omega+t_0}(t_0, \varphi)).\end{aligned}$$

从而，对$t\geqslant t_0$，有

$$\begin{aligned}&x_0(t; t_0, \varphi_0)\\&=\lim_{n\to\infty}x_n(t; t_0, \bar{x}_{nk\omega+t_0}(t_0, \varphi))\\&=\lim_{n\to\infty}x_{n-1}(t+k\omega; t_0, \bar{x}_{(n-1)k\omega+t_0}(t_0, \varphi))\\&=x(t+k\omega; t_0, \varphi_0), \quad t\geqslant t_0.\end{aligned}$$

因此，$x(t; t_0, \varphi_0)$为方程(1)的$k\omega$—周期解，证毕。

定义1 设$x(t;t_0,\varphi_0)$为(1)的解。如果对任意$B>0$及$\varepsilon>0$，存在$T(B, \varepsilon)>0$，使得当$\|\varphi-\varphi_0\|\leqslant B$，$t\geqslant t_0+T$时，$|x(t; t_0, \varphi)-x(t; t_0, \varphi_0)|<\varepsilon$，则称$x(t; t_0, \varphi_0)$ 为(1) 的全局吸引子。

定义2 设$x(t;t_0, \varphi_0)$ 为(1)的解，如果存在C中的有界子集S，$S-\{\varphi_0\}\neq\phi$(空集)，使得对任一$\varepsilon>0$，存在 $T(\varepsilon)>0$，当$\varphi\in S$及$t\geqslant t_0+T(\varepsilon)$时有$|x(t; t_0, \varphi)-x(t;t_0, \varphi_0)|<\varepsilon$，则称$x(t;t_0, \varphi_0)$ 为系统(1)的局部吸引子。

定理2 如果系统(1)有全局吸引子$\bar{x}(t;t_0,\varphi)$，$|\bar{x}(t;t_0,\varphi)|\leqslant H$，$t\geqslant t_0-r$，且以$t_0$为初始时刻的解在$[t_0, \infty)$ 上存在，则系统(1)有ω—周期解。

证 由于$|\bar{x}(t;t_0, \varphi)|\leqslant H$，$t\geqslant t_0-r$，则对任意正整数$n$，

$$\|\bar{x}_{n\omega+t_0}(t_0, \varphi)-\varphi\|\leqslant 2H,$$

因$\bar{x}(t;t_0,\bar{\varphi})$为吸引子，对$B=2H$及任意$\varepsilon>0$，存在$T(2H,\varepsilon)$使得$\|\varphi-\bar{\varphi}\|\leqslant 2H$，$t\geqslant t_0+T(2H,\varepsilon)$时

$$|x(t;t_0,\varphi)-\bar{x}(t;t_0,\bar{\varphi})|<\varepsilon. \tag{5}$$

取正整数N使得$s+N\omega+t_0\geqslant t_0+T(2H,\varepsilon)$，$s\in[-r,0]$。由(3)式，对任何$n,m>N$，

$$\begin{aligned}
&\|\bar{x}_{n\omega+t_0}(t_0,\bar{\varphi})-\bar{x}_{m\omega+t_0}(t_0,\bar{\varphi})\|\\
=&\sup_{-r\leqslant s\leqslant 0}|\bar{x}(s+n\omega+t_0,t_0,\bar{\varphi})-\bar{x}(s+m\omega+t_0,t_0,\bar{\varphi})|\\
=&\sup_{-r\leqslant s\leqslant 0}|x(s+N\omega+t_0,t_0,\bar{x}_{(n-N)\omega+t_0}(t_0,\bar{\varphi}))-\\
&-x(s+N\omega+t_0,t_0,\bar{x}_{(m-N)\omega+t_0}(t_0,\bar{\varphi}))|\\
\leqslant&\sup_{-r\leqslant s\leqslant 0}|x(s+N\omega+t_0,t_0,\bar{x}_{(n-N)\omega+t_0}(t_0,\bar{\varphi}))-\\
&-\bar{x}(s+N\omega+t_0,t_0,\bar{\varphi})|+\sup_{-r\leqslant s\leqslant 0}|x(s+N\omega+t_0,t_0,\\
&\bar{x}_{(m-N)\omega+t_0}(t_0,\bar{\varphi}))-\bar{x}(s+N\omega+t_0,t_0,\bar{\varphi})|<2\varepsilon.
\end{aligned}$$

这说明$\{\bar{x}_{n\omega+t_0}(t_0,\bar{\varphi})\}$为Banach空间$C$中的 Cauchy列，因此，存在$\varphi_0\in C$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\|\bar{x}_{n\omega+t_0}(t_0,\bar{\varphi})-\varphi_0\|=0,$$

由定理1，系统(1)有ω—周期解。

定理3 如果(1)有一局部吸引子$\bar{x}(t,t_0,\bar{\varphi})$，其吸引域为$S$，且存在$T_0$，使得$t\geqslant T_0+t_0$时，$\bar{x}_t(t_0,\bar{\varphi})\in S$，则系统(1)有$\omega$–周期解。

证明略。

如果系统(1)存在一致渐近稳定解，则此解为局部吸引子；如果存在全局一致渐近稳定解，则此解为全局吸引子。

下面两个不动点定理将用来减弱Yoshizawa定理的条件。

定理4(Horn) 设f为Banach空间X到自身的全连续映射。如果存在有界集E使得对任意$x\in X$,存在$m=m(x)$,使得$f^m(x)\in E$,则f在E中有不动点。

定理5(Horn) 设$S_0\subset S_1\subset S_2$为Barnach空间$X$的凸子集，$S_0$与$S_2$为紧的，$S_1$相对于$S_2$为开的。设$f$：$S_2\to X$为连续映射，对某个

整数$m>0$，使得$f^j(S_1)\subset S_1$，$1\leqslant j\leqslant m-1$，且$f^j(S_1)\subset S_0$，$m\leqslant j\leqslant 2m-1$。则$f$在$S_0$中有不动点。

定理6 设$\omega\geqslant r$，且对任意$M>0$，存在$L(M)>0$，使得$\|\varphi\|\leqslant M$时$|F(t,\ \varphi)|\leqslant L(M)$，$t\in[-\omega,\ 0]$，系统(1)的解为同等有界，关于$B_0$最终有界，则(1)存在$\omega$-周期解，且此解以$B_0$为界。

证 设t_0为任何固定的初始时刻，由解的有界性，每个解是将来存在的。

定义映射f，$C\to C$为$f(\varphi)=x_{t_0+\omega}(t_0,\ \varphi)$。由解对初始函数的连续相依性，$f$为连续的。由解的唯一性及系统的周期性，对$k=1,\ 2,\ \cdots$，$f^k(\varphi)=x_{t_0+k\omega}(t_0,\ \varphi)$。由解的等度有界性，对任意$B>0$，存在$H(B)>0$，使得$\|\varphi\|\leqslant B$，$t\geqslant t_0$时，$|x(t,\ t_0,\varphi)|\leqslant H(B)$。设$S\subset C$为任何有界集，存在$H>0$使得$\varphi\in S$，$t\geqslant t_0-h$时，$|x(t,\ t_0,\ \varphi)|\leqslant H$，因此，$f(S)$包含在半径为$H$的球中。

对H，存在$L>0$，使得$\|\varphi\|\leqslant H$时，$|F(t,\ \varphi)|\leqslant L, t\in[-\omega,\ 0]$。由$F(t,\ \varphi)$关于$t$的周期性，故对所有$t\in\mathbb{R}$，$|F(t,\varphi)|\leqslant L$。由于$\|x_t(t_0,\ \varphi)\|\leqslant H$对$\varphi\in S$，$t\geqslant t_0$，故$|\dot{x}(t,\ t_0,\ \varphi)|=|F(t,\ x_t(t_0,\ \varphi))|\leqslant L$。于是，由$\omega\geqslant r$，有

$$\left|\frac{d}{ds}f(\varphi)(s)\right|=\left|\frac{d}{ds}x_{t_0+\omega}(t_0,\varphi)(s)\right|$$

$$=|\dot{x}(t_0+\omega+s,\ t_0,\ \varphi)|\leqslant L,$$

对$\varphi\in S$，$s\in[-r,\ 0]$，因此$f(S)$为由等度连续函数构成的集合，于是f为全连续的。

设$E=\{\varphi\in C;\ \|\varphi\|\leqslant B_0\}$，则$E$为$C$的有界子集。由于系统的解关于$B_0$最终有界，故对$\varphi\in C$，存在$T(\varphi)>0$，使得$t\geqslant t_0+T(\varphi)$时，$|x(t,\ t_0,\ \varphi)|\leqslant B_0$。取正整数$k=k(\varphi)$使得$k\omega\geqslant T(\varphi)+r$，则对$\varphi\in C$，

$$\|f^k(\varphi)\|=\|x_{t_0+k\omega}(t_0,\ \varphi)\|\leqslant B_0,$$

即$f^k(\varphi)\in E$。由定理4，f有不动点$\varphi_0\in E$，则$x(t,\ t_0,\ \varphi_0)$即为(1)的ω-周期解，显然它以B_0为界。

定理7 设对任意$M>0$，存在$L(M)>0$，使得$\|\varphi\|\leqslant M$时，

$|F(t, \varphi)|\leqslant L(M)$，$t\in[-\omega, 0]$，且(1)的解同等有界，关于$B_0$同等最终有界，则(1)存在$\omega$-周期解，且此解以$B_0$为界。

证 与定理6中一样，设t_0为任意固定的初始时刻，每一解都是将来存在的，由$f(\varphi)=x_{t_0+\omega}(t_0, \varphi)$定义的映射$f$：$C\to C$为连续的，且$f^k(\varphi)=x_{t_0+k\omega}(t_0, \varphi)$，$k=1, 2, \cdots$。

由解的同等有界性，存在B_1，B_2，B_3，$B_0<B_1<B_2<B_3$，对$\varphi\in C$，当$\|\varphi\|\leqslant B_0$，$t\geqslant t_0$时，

$|x(t, t_0, \varphi)|\leqslant B_1$；当$\|\varphi\|\leqslant B_1$，$t\geqslant t_0$时，

$|x(t, t_0, \varphi)|\leqslant B_2$；当$\|\varphi\|\leqslant B_2$，$t\geqslant t_0$时，

$|x(t, t_0, \varphi)|\leqslant B_3$。对$B_3$，存在$L>0$，使得$\|\varphi\|\leqslant B_3$时$|F(t, \varphi)|\leqslant L$，$t\in \mathbf{R}$。

设 $S_0=\{\varphi\in C; \|\varphi\|\leqslant B_0, |\varphi(s_1)-\varphi(s_2)|\leqslant L|s_1-s_2|, s_1, s_2\in[-r, 0]\}$，$S_1=\{\varphi\in C; \|\varphi\|<B_1, |\varphi(s_1)-\varphi(s_2)|\leqslant L|s_1-s_2|, s_1, s_2\in[-r, \theta]\}$，$S_2=\{\varphi\in C; \|\varphi\|\leqslant B_2, |\varphi(s_1)-\varphi(s_2)|\leqslant L|s_1-s_2|, S_1, S_2\in[-r, 0]\}$，则$S_0$、$S_1$、$S_2$为$C$的凸子集，$S_0$与$S_2$为紧的，$S_1$关于$S_2$为开的。

由于$|x(t; t_0, \varphi)|\leqslant B_2$，对$\varphi\in S_1$及$t\geqslant t_0$，

则 $|\dot{x}(t; t_0, \varphi)|=|F(t, x_t(t_0, \varphi))|\leqslant L$，

且 $\|f^k(\varphi)\|=\|x_{t_0+k\omega}(t_0, \varphi)\|\leqslant B_2$，

从而

$$
\begin{aligned}
&|f^k(\varphi)(\lambda_1)-f^k(\varphi)(\lambda_2)| \\
&=|x(t_0+k\omega+\lambda_1; t_0, \varphi)-x(t_0+k\omega+\lambda_2; t_0, \varphi)| \\
&\leqslant L|\lambda_1-\lambda_2|, \qquad (4)
\end{aligned}
$$

对λ_1、$\lambda_2\in[-r, 0]$，$k=1, 2, \cdots$，即$f^k(\varphi)\in S_2$，

那么，$f^k(S_1)\subset S_2$，$k=1, 2, \cdots$。

由解关于B_0的同等最终有界性，对B_1，存在$T(B_1)>0$，使得$\|\varphi\|\leqslant B_1$，$t\geqslant t_0+T(B_1)$时，$|x(t; t_0, \varphi)|\leqslant B_0$，取正整数$k_0$，使得$k_0\omega\geqslant T(B_1)+r$，则对$\varphi\in S_1$，$k\geqslant k_0$，有

$\|f^k(\varphi)\|=\|x_{t_0+k\omega}(t_0, \varphi)\|\leqslant B_0$，由此及(4)式可知，对$\varphi\in S_1$，$k\geqslant k_0$，$f^k(\varphi)\subset S_0$，即$f^k(S_1)\subset S_0$，$k\geqslant k_0$，由定理5，$f$在$S_0$中有不动点$\varphi_0$，则$x(t; t_0, \varphi_0)$ 为方程(1)的ω-周期解。并以B_0为

界，证毕。

§2 存在周期解的Kaplan-Yorke方法

研究泛函微分方程周期解的存在性，主要的工具是不动点定理。我们将在§4中介绍。在本节中，我们先介绍J. L. Kaplan和J. A. Yorke[161]提出的一种方法，即周期解的常微分方程产生法，它对判别某些类型的时滞微分方程的周期解是简单而有效的。

首先考察纯量方程

$$x'(t)=-f(x(t-1))。\tag{1}$$

其中$f(x)$为连续函数且当$x\neq 0$时$xf(x)>0$。此外，我们还考虑常微分方程组

$$\begin{cases}x'(t)=-f(y(t)),\\ y'(t)=f(x(t)).\end{cases}\tag{2}$$

定理1 假定方程(1)中的f为连续的奇函数，且满足$xf(x)>0$当$x\neq 0$时。设

$$\alpha=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}及\beta=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

存在(可以为∞)。又设

$$当x\to\infty时\ F(x)=\int_0^x f(s)ds\to\infty.\tag{3}$$

如果 $$\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta.\tag{4}$$

或者 $$\beta<\frac{\pi}{2}<\alpha.\tag{5}$$

则方程(1)存在振动的周期解x。而且x具有周期4，并满足方程组(2)，此处$y(t)=x(t-1)$。

证 证明的方法是，首先证明方程组(2)具有周期为4的周期解$(x,\ y)$，然后再证明x满足方程(1)。

现令 $V(x,y)=F(x)+F(y)$，其中$F(v)=\int_0^v f(s)ds,\ v\in\mathbf{R}$.

由条件（3）及 $v\neq 0$ 时 $vf(v)>0$，可知 $V(x, y)\geqslant 0$，当且仅当 $(x, y)=(0,0)$ 时 $V(x, y)=0$；当 $x^2+y^2\to\infty$ 时 $V(x,y)\to\infty$。我们还可以看到，对方程(2)的任何解，对一切 t 有

$$\frac{dV(x(t), y(t))}{dt}=f(x(t))x'(t)+f(y(t))y'(t)=0.$$

因此 V 沿解为常数。

由于 f 为奇函数且 $xf(x)>0$，故令 $s=-t$ 时有

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(s)ds=-\int_0^{x}f(-t)dt=\int_0^{x}f(t)dt$$
$$=F(x).$$

因此有 $V(-x, y)=V(x, y)=V(x, -y)=V(-x, -y)$.
即 $V(x, y)$ 关于 x 轴、y 轴及原点都对称。另外，由 F 的定义及 $xf(x)>0$ 的性质，知 $F(x)$，$x\in[0, \infty)$，和 $F(y)$，$y\in[0, \infty)$ 分别关于 x 和 y 为严格单调增加函数。因此对于任一 $C>0$，必存在 $x_0>0$，$y_0>0$ 使得

$$F(x_0)=C, \qquad F(y_0)=C.$$

易知方程 $V(x, y)=C$ 在第一象限中唯一确定了一个连续函数 $y=\varphi(x)$，且 $x\in[0, x_0]$，$y\in[0, y_0]$，$y_0=\varphi(0)$，$0=\varphi(x_0)$，于是由 V 的对称性可知，$V(x, y)=C$ 在 (x, y) 平面上确定了一条简单闭曲线，原点在闭曲线之内。

若 $(x(t), y(t))$ 是方程（2）过 (x_0, y_0) 的解，其最大存在区间为 (α, β)，现要证明必有 $\alpha=-\infty$，$\beta=\infty$，若不然，设 $\beta<\infty$，由 V 沿（2）的解为常数可知 $V(x(t), y(t))=V(x_0, y_0)$ $t\in(\alpha, \beta)$，从而 $(x(t), y(t))$ 在 (α, β) 上必有界，根据延展定理，可得解 $(x(t), y(t))$ 在 $[\beta, \beta+\delta]$，$\delta>0$ 上存在，这与 β 为最大存在区间右端点相矛盾。故必有 $\beta=\infty$，$\alpha=-\infty$。又因 $V(x, y)=V(x_0, y_0)$ 为平面的简单闭曲线，故 $r(t)\overset{def}{=\!=}(x(t), y(t))$ 为方程（2）的非常数周期解。并且相轨线在 (x, y) 平面上是一条绕原点的简单闭曲线。

令 $V(x_0, y_0)=C$，$r(t)=(x_C(t), y_C(t))$，$r(t)$ 的周期为

ω_C, $C\in(0,\ \infty)$, $\varphi(t)=\arctan\dfrac{y(t)}{x(t)}$, $t\in[0,\ \omega_C]$, 则

$$2\pi=\int_0^{2\pi}d\varphi=\int_0^{\omega_C}\varphi'(t)dt=\int_0^{\omega_C}\frac{y'(t)x(t)-x'(t)y(t)}{x^2(t)+y^2(t)}dt,$$

$$=\int_0^{\omega_C}R(x(t),\ y(t))dt.$$

其中$R(x,\ y)\overset{def}{=}\dfrac{xf(x)+yf(y)}{x^2+y^2}$.

由α和β的定义及上面的结果可得

若$\alpha\neq 0$, 则当$C\to 0$时 $\omega_C\to\dfrac{2\pi}{\alpha}$,

若$\alpha=0$, 则当$C\to 0$时 $\omega_C\to\infty$,

若$\beta\neq 0$ 则当$C\to\infty$时 $\omega_C\to\dfrac{2\pi}{\beta}$,

若$\beta=0$, 则当$C\to\infty$时 $\omega_C\to\infty$.

由于ω_C是C的连续函数, $C\in(0,\ \infty)$。故由条件(4)和(5)可推知有某个C使$\omega_C=4$。

现设$(x^*(t),\ y^*(t))$是方程(2)具有周期为4的非常数解, 满足

$$V(x^*(t),\ y^*(t))=C^*,\ \omega_{C^*}=4,\ C^*\in(0,\ \infty).$$

现在证明 $x^*(t)$ 为方程 (1) 的解, 直接计算可知, $(-x^*(t),\ -y^*(t))$满足方程 (2), 且 $V(-x^*(t),\ -y^*(t))=V(x^*(t),\ y^*(t))=C^*$。因满足$V=C^*$的轨线最多相差时间$t$的某个平移$\tau$, 故有

$$(x^*(t),\ y^*(t))\equiv(-x^*(t+\tau),\ -y^*(t+\tau)),$$

$$\tau\in(0,\ 4),$$

从而 $x^*(t)=-x^*(t+\tau)=x^*(t+2\tau)$, $y^*(t)=y^*(t+2\tau)$.

所以 $2\tau=4n$, n为某正整数, 即$\tau=2n$, 又$\tau\in(0,\ 4)$, 故$\tau=2$, 于是有

$$\begin{aligned}x^*(t)&=-x^*(t+2)=-x^*(t-2),\\ y^*(t)&=-y^*(t+2)=-y^*(t-2).\end{aligned}\tag{6}$$

又易知 $(y^*(t), -x^*(t))$ 也满足方程组（2），且 $V(y^*(t), -x^*(t))=C^*$。显然$x^*(t)\neq y^*(t)$。同理可得，存在 $\tau\in(0,4)$，使

$$(y^*(t+\tau),\ -x^*(t+\tau))\equiv(x^*(t),\ y^*(t)),$$

即 $$x^*(t)\equiv y^*(t+\tau),\ y^*(t)\equiv -x^*(t+\tau), \tag{7}$$

故 $$x^*(t)=-x^*(t+2\tau),\ 同理,\ y^*(t)=-y^*(t+2\tau)。$$

由(6)和(7)得$x^*(t-2)=x^*(t+2\tau)$。$y^*(t-2)=y^*(t-2\tau)$从而$2\tau+2=4n$，n为正整数，于是有$\tau=1$或3，以下说明$\tau\neq3$。

若$\tau=3$，则由(7)知$y^*(t+3)=x^*(t)$，$x^*(t+3)=-y^*(t)$，$t\in[0,\ 4]$，现利用 $(x^*(t),\ y^*(t))$ 的相图分析，设 $(x^*(t_0),\ y^*(t_0))$ 属于第一象限，则由（6）知 $(x^*(t_0+2),\ y^*(t_0+2))=(-x^*(t_0),\ -y^*(t_0))$，故应属第三象限，显然 $(x^*(t_0+3),\ y^*(t_0+3))$ 只可能属第三、四或一象限。然而，$(x^*(t_0+3),\ y^*(t_0+3))=(-y^*(t_0),\ x^*(t_0))$，应属于第二象限，乃得矛盾。故 $\tau\neq3$，必 $\tau=1$，从而 $x^*(t)=y^*(t+1)$，即 $y^*(t)=x^*(t-1)$，由方程(2)的第一个方程得

$$\frac{dx^*(t)}{dt}=-f(y^*(t))=-f(x^*(t-1))。$$

故$x^*(t)$是满足方程(1)且周期为4的振动周期解。

文[162]讨论了下面方程的周期解。

$$x'(t)=-\eta x^{\theta}(t-1)[\alpha^2-x^2(t)]。\tag{8}$$

其中$\alpha\geqslant0$，$\eta>0$，$0<\theta\leqslant1$，且θ为奇数之比。

定理2 当$\theta=1$，$\eta>\dfrac{\pi}{2\alpha^2}$，或 $0<\theta<1$ 时，方程(8)有周期为4的非常数周期解。

证 文［162］对此定理的证明较繁在这里我们给出另一简单的证明。以 $(\alpha^2-x^2(t))$ 除方程(8)两边，得到

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\alpha}\ln\left|\frac{\alpha+x(t)}{\alpha-x(t)}\right|\right)=-\eta x^{\theta}(t-1)$$

作变换 $x=\dfrac{\alpha(e^{2\alpha r}-1)}{e^{2\alpha r}+1}$，则方程(8)变为

$$y'(t) = -\eta a^{\theta}\left(\frac{e^{2ay(t-1)}-1}{e^{2ay(t-1)}+1}\right)^{\theta}. \tag{9}$$

这时，我们只要证明方程(9)有周期为4的非常数周期解$y(t)$即可，因为 $x(t)=\frac{a(e^{2ay(t)}-1)}{e^{2ay(t)}+1}$必为方程(8)之解。

现将方程(9)的未知函数$y(t)$仍写成$x(t)$，则有

$$x'(t) = -\eta a^{\theta}\left(\frac{e^{2ax(t-1)}-1}{e^{2ax(t-1)}+1}\right)^{\theta},$$

则 $f(x)=\eta a^{\theta}\left(\frac{e^{2ax}-1}{e^{2ax}+1}\right)^{\theta}$ 满足定理1的一切条件，事实上，$xf(x)>0$是显然的。又

$$\alpha = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\eta a^{\theta}\left(\frac{e^{2ax}-1}{e^{2ax}+1}\right)^{\theta}}{x}$$

$$=\begin{cases}\eta a^2, & 当\theta=1时,\\ \infty, & 当0<\theta<1时.\end{cases}$$

$$\beta = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0,$$

故当$\theta=1$，$\eta>\frac{\pi}{2a^2}$ 或$0<\theta<1$时满足定理1的条件(5)。此外，

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x\left(\frac{e^{2as}-1}{e^{2as}+1}\right)^{\theta}ds=\infty.$$

故满足定理1的所有条件，根据定理1便知定理2成立。

下面考察含有两个滞量的方程

$$x'(t) = -[f(x(t-1))+f(x(t-2))]. \tag{10}$$

定理3 假定f为连续的奇函数且满足当$x\neq 0$时 $xf(x)>0$。设α和β如定理1所定义。如果

$$\alpha<\frac{\pi}{3\sqrt{3}}<\beta \tag{11}$$

或者 $$\beta<\frac{\pi}{3\sqrt{3}}<\alpha. \tag{12}$$

则方程(10)存在振动的周期解x，且x具有周期6。

证 首先证明常微分方程组

$$\begin{cases} x'(t) = -f(y(t)) - f(z(t)), \\ y'(t) = f(x(t)) - f(z(t)), \\ z'(t) = f(x(t)) + f(y(t)) \end{cases} \tag{13}$$

有周期为6的振动周期解。为此引入某些记号，定义Ψ：$\boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$如下

$$\Psi(x, y, z) = (f(x), f(y), f(z))$$

设

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = (x, y, z).$$

则方程组(13)可写成等价的形式

$$X' = A_3 \Psi(X). \tag{14}$$

现取初始条件为

$$X(0) = (x(0), y(0), z(0)) = (0, -\gamma, -\gamma), \ \gamma > 0. \tag{15}$$

设方程 (14) 满足初始条件 (15) 的解为$X(t, \gamma)$。由 (13) 看到，$(x - y + z)' = 0$。因此，对任何的$\gamma > 0$，$X(t, \gamma)$ 对所有的时刻都会停留在平面 $x - y + z = 0$ 之上。

设 $F(v) = \int_0^v f(s)ds$ 及 $V(X) = F(x) + F(y) + F(z)$。

则 V 为正定，当 $|X| \to \infty$时 $V(X) \to \infty$，且$\frac{d}{dt}V(X(t)) \equiv 0$。

故对每一个$a > 0$，$V(X) = a$ 为一个不变曲面。从而对每一个$a > 0$，$V(X) = a$ 被平面 $x - y + z = 0$ 截出一条简单的闭曲线。这条曲线是正不变的，这是因为 $V(X) = a$ 及 $x - y + z = 0$ 两者都是正不变的。因此，对任何的r，$X(t, \gamma)$ 为方程 (14)的周期解。

设 π_r 表示 $X(t, \gamma)$ 的周期。如定理 1 的证明那样，我们可以采用 (14) 的线性化来考察接近$\gamma = 0$及 $\gamma = \infty$时π_γ的状态，可以得到

若$\alpha\neq 0$，则当$\gamma\to 0$时$\pi_\gamma\to\frac{2\pi}{\sqrt{3}\alpha}$，

若$\alpha=0$，则当$\gamma\to 0$时$\pi_\gamma\to\infty$，

若$\beta\neq 0$，则当$\gamma\to\infty$时$\pi_\gamma\to\frac{2\pi}{\sqrt{3}\beta}$，

若$\beta=0$，则当$\gamma\to\infty$时$\pi_\gamma\to\infty$。

条件（11）和（12）都可导出有某个γ，$\pi_\gamma=6$。设$\boldsymbol{X}_0(t)=(x_0(t),\ y_0(t),\ z_0(t))$表示方程（14）具有周期为6的解。

现在定义T_3：$\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$为

$$T_3=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}.$$

容易验证，对给定（14）的任何解$\boldsymbol{X}(t)$，$\boldsymbol{T}_3\boldsymbol{X}(t)$也是（14）的解，且$T_3$保留平面$x-y+z=0$的不变性，由于$f$为奇，故可验证$V(\boldsymbol{X})=V(T_3\ \boldsymbol{X})$，$\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{R}^3$，特殊地，这蕴含了$T_3X_0(t)$是（14）的一个周期为6的周期解，且$V(T_3\boldsymbol{X}_0(t))=V(\boldsymbol{X}_0(t))$。因此有

$$\{\boldsymbol{X}_0(t):t\in\boldsymbol{R}\}=\{T_3\boldsymbol{X}_0(t):t\in\boldsymbol{R}\}.$$

从而存在某一个$p>0$使$T_3\boldsymbol{X}_0(t)=\boldsymbol{X}_0(t+p)$。因为$\boldsymbol{T}_3^6\equiv\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{I}$为单位矩阵。故$X_0(t)=T_3^6X_0(t)=\boldsymbol{X}_0(t+6p)$。我们可以假定$p$是1，2，3，4，5中的一个，考虑集合$S=\{T_3^m\boldsymbol{X}(0):m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,5\}$。通过直接计算可看到，$S$中的点是一对一对分开的，由此有

$$mp\neq 0\ (\mathrm{mod}\,6),\ m=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

因此，$p\neq 2$，$p\neq 3$，$p\neq 4$，只有$p=1$或$p=5$，这表示或者$T_3\boldsymbol{X}_0(t)=X_0(t+1)$或者$T_3\boldsymbol{X}_0(t)=X_0(t-1)$。

由于对某个$\gamma>0$，

$$X_0(0)=\begin{pmatrix}0\\-\gamma\\-\gamma\end{pmatrix}$$

则　　$(X_0(0)-X_3X_0(0))\cdot\Psi(X_0(0))=-\gamma f(\gamma)<0$.

于是有　$T_3X_0(t)=X_0(t-1)$，由此得到

$$
\begin{aligned}
&T_3(x_0(t),\ y_0(t),\ z_0(t))\\
&=(x_0(t-1),\ y_0(t-1),\ z_0(t-1))\\
&=(y_0(t),\ z_0(t),\ -x_0(t)).
\end{aligned}
$$

因此$y_0(t)=x_0(t-1)$，同样地可得$z_0(t)=x_0(t-2)$，代入方程(13)的第一个方程之中，得到

$$x_0'(t)=-f(x_0(t-1))-f(x_0(t-2))$$

故$x_0(t)$是方程(10)的周期为6的振动周期解，证毕。

例　考察下面的方程

$$x'(t)=-\eta[1-x^2(t)][x(t-1)+x(t-2)].\qquad(16)$$

取变换　$y'(t)=x'(t)/[1-x^2(t)]$，则

$$x(t)=[e^{2y(t)}-1]/[e^{2y(t)}+1].$$

若令 $f(v)=(e^{2v}-1)/(e^{2v}+1)$，则 $f(0)=0$，f 为奇函数，且$vf(v)>0$。方程(16)可写为

$$y'(t)=-\eta[f(y(t-1))+f(y(t-2))].$$

在此情形下有$\alpha=\eta$，$\beta=0$，因此，若$\eta>\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$，则由定理3知方程(16)具有周期为6的非常数周期解。

我们可以将定理3推广到多滞量的方程之中，即

$$x'(t)=-[f(x(t-1))+f(x(t-2))+\cdots+f(x(t-n))].$$

§3　存在周期解的Grafton方法

关于泛函微分方程周期解存在性的研究，在上节中介绍了Kaplan—Yorke 的方法，它对比较特殊的类型的方程是有效而且简便的。在本节中，我们介绍R. B. Grafton 提出的方法〔165〕，它是利用映像的特征值来研究周期解的存在性的。

(1)　预备知识

设 E_n为 n 维复向量空间，E_n中的范数$|\cdot|$为任意的向量空间

模。记$C[-r,0],E_n)=C$，$r>0$，C 中任一元素g的范数定义为

$$\|g\|=\sup\{|g(\theta)|:\ -r\leqslant\theta\leqslant 0\}。$$

考虑线性自治泛函微分方程

$$\dot{x}(t)=L(x_t) \tag{1}$$

其中L：$C\to E_n$ 为连续线性算子。

由 Riesz 表示定理，存在定义在 $[-r,0]$上的$n\times n$有界变差矩阵函数$\beta(\theta)$，使(1)写成

$$\dot{x}(t)=\int_{-r}^{0}[d\beta(\theta)]x(t+\theta) \tag{2}$$

(2) 的特征方程为

$$det\Delta(\lambda)=0,\ \ \Delta(\lambda)=I\lambda-\int_{-r}^{0}[d\beta(\theta)]e^{\lambda\theta} \tag{3}$$

其中I为$n\times n$ 单位矩阵。(3) 的根称为L 的特征值。它们或为实数或为成对的共轭复数。每一个根具有有限重，对在复平面上任意给定的垂直带形，只能有有限个根在它的右边。如果λ满足(3)且为m重。则方程 (1) 正好有m个形如 $\phi_j(t)=P_j(t)e^{\lambda t}(j=1,2,\cdots,m)$的线性独立解。$p_j(t)$ 为次数不超过m的多项式，其系数属于E_n。

对于C中的子空间 $P(\lambda)$，如果它在解映象$T(t)$ 的作用下不变，且具有基底$\{\phi_1(\theta),\ \phi_2(\theta),\cdots,\ \phi_m(\theta)\}$ $(-r\leqslant\theta\leqslant 0)$。则称$P(\lambda)$为对应$\lambda$的广义特征空间。

更一般地，设$\Lambda=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s\}$为$L$的特征值，每一个$\lambda_j$具有重数$m_j(j=1,2,\cdots,s)$，令 $k=m_1+m_2+\cdots+m_s$。则存在对应Λ的广义特征空间$P(\Lambda)$，它由k个元素所成的基底所支撑。事实上，$P(\Lambda)$ 是由所有的$P(\lambda_j)$合并而成。$P(\Lambda)$ 的性质被概括成如下的定理。

定理1 设Λ和k如上所述，则存在$n\times k$的矩阵函数

$$\Phi(\theta)=(\phi_1(\theta),\phi_2(\theta),\cdots,\phi_k(\theta))\qquad(-r\leqslant\theta\leqslant 0), \tag{4}$$

它的列是线性独立的，并且形成$P(\Lambda)$ 的基底，亦存在一个实的$k\times k$ 矩阵A，它的特征值是Λ的元素，且每一个λ_j具有重数m_j，关系式$\Phi(\theta)=\Phi(0)e^{A\theta}$成立，$T(t)\Phi$为方程(1)的矩阵解。

证明略，读者可参看[28]第七章。

推论1[28]　对任何$\phi\in P(\lambda)$，存在一个唯一的k维向量b使得$\phi=\Phi b$。方程（1）以ϕ为初始函数的解为$x_t(\phi)=\Phi e^{At}b$，$t\geqslant 0$。由此可推知从$P(\Lambda)$中的一点出发的解的轨线当$t\geqslant 0$时仍然留在$P(\Lambda)$之中。

推论2[28]　在广义特征空间$P(\Lambda)$上，（1）的初始函数为$\phi=\Phi b$的初值问题退化为k维常微分方程$\dot{y}(t)=Ay(t)$，$y(0)=b$的初值问题。

存在C的子空间$Q(\Lambda)$为$P(\Lambda)$的补空间。它在算子$T(t)$的作用下也是不变的。为了使$Q(\Lambda)$特征化，可考虑伴随方程

$$\dot{v}(s)=-\int_{-r}^{0}[d\beta(\theta)]^T v(s-\theta),\quad s\leqslant 0。\tag{5}$$

它与方程（2）不同，它的解的初始函数g^*必须属于空间$C([0,r],E^n)=C^*$，（5）的解是在s减少的方向上得到的。（5）的特征方程的根正好是（3）的根。因此在C^*中存在对应Λ的广义特征空间$P^*(\Lambda)$。它的维数与$P(\Lambda)$相同。类似于（4）式，存在一个$n\times k$矩阵

$$\psi(\theta)=(\psi_1(\theta),\psi_2(\theta),\cdots,\psi_k(\theta))\quad(0\leqslant\theta\leqslant r)。\tag{6}$$

它的元素是线性独立的并且形成$P^*(\Lambda)$的基底。现有必要引入双线性形式，

$$(\psi,\phi)=\psi^T(0)\phi(0)-\int_{-r}^{0}\int_{0}^{\theta}\psi^T(\xi-\theta)[d\beta(\theta)]\phi(\xi)d\xi,\tag{7}$$

其中$\psi\in C^*$，$\phi\in C$。

定理2[28]　存在C的子空间$Q(\Lambda)$，它的余维数为k，并且已特征化，即$Q(\Lambda)=\{g\in C:(\psi,g)=0\}$，其中$\psi$为矩阵(6)，$(\psi,g)$是$k$列向量，是将$\psi$和$g$代入(7)中得到的。此外，若$g\in Q(\Lambda)$则$T(t)g\in Q(\Lambda)$，$(t\geqslant 0)$。故$Q(\Lambda)$在$T(t)$作用下不变。

下面的定理指出$P(\Lambda)$和$Q(\Lambda)$形成空间C的坐标系。

定理3[28]　设$P(\Lambda)$和$Q(\Lambda)$如上所述，$k\times k$矩阵$(\Psi,\Phi)=((\psi_j,\phi_i))$ $(j,i=1,2,\cdots,k)$为非奇异。如果Ψ和Φ满足(Ψ,Φ)

$=I$，则C中的任一元素g可唯一地分解为

$$g=g^P+g^Q,\ g^P=\Phi(\Psi,g)\in P(\Lambda),\ g^Q\in Q(\Lambda). \quad (8)$$

现取 $\Lambda_0=\{\lambda;\ \Delta(\lambda)=0,\ Re(\lambda)>0\}$。 (9)

它是一个有限元素的集合。

（2） **周期解定理**

考虑自治泛函微分方程

$$\dot{x}(t)=L(x_t)+N(x_t), \quad (10)$$

其中L在C上为连续线性，L的特征值至少有一个具有正实部（这保证Λ_0非空且广义特征空间$P(\Lambda_0)\stackrel{def}{=\!=}P$和$Q(\Lambda_0)\stackrel{def}{=\!=}Q$存在）。算子 N 在C上连续，$N(0)=0$，在给定的$\delta>0$，存在连续非减函数$\eta(\cdot)$，$\eta(0)=0$，使得对任何g'，$g''\in B(\delta)$，有 $|N(g')-N(g'')|\leqslant\eta(\delta)\|g'-g''\|$。其中$B(\delta)$ 表示以 $\{0\}$为中心，半径为δ的闭球。假定方程(10)是非线性的。

设K是C中的一个闭凸集，如果 $a\in K$，则对一切$\beta\geqslant0$ 都有$\beta a\in K$，并且当 $g\neq\{0\}$ 时，g和$-g$中至少有一个不属于K，则称K为锥。现假设方程（10）的解的轨线从锥 K 中的任一元素 $k\neq\{0\}$出发，经过时刻$\tau(k)$ 后又回K内。时间$\tau(\cdot)$ 为连续并且使得对任何 $m>0$和一切 $k\in B(m)\cap K$，有$r\leqslant\tau(k)\leqslant T(m)$，其中$T(m)$为有限。如果对$K$中所有不为零的元素，$\tau(k)$ 存在，则我们说系统(10)将K映入它本身。此外，如果$x(k)(k\in K)$ 是方程(10)的解，则我们可定义算子A如下

$$Ak\stackrel{def}{=\!=}x_{\tau(k)}(k). \quad (11)$$

算子A关于K是正的，也就是说，A将K映射入K本身，由于$\tau(k)$和 $x(k)$ 关于初值是连续的，故算子A是连续的。从下面我们还可以看到算子 A 是紧的。方程（10）右边的Lipschitz常数$J(\delta)$ （$\delta\geqslant0$） 是连续非减的函数，则当$\|x_t(k)\|\leqslant\delta$时有

$$\|x_t(k)\|\leqslant\|k\|e^{J(\delta)t}. \quad (12)$$

设$T(\delta)=T$为 $\tau(k)$的上界，$k\in K\cap B(\delta)$。于是当 $\|k\|\leqslant\delta e^{-TJ(\delta)}=\delta'$时，（12）式成立。这说明对任意的 $\delta>0$，函数 $x_{\tau(k)}(k)=$

Ak当 $k\in K\cap B(\delta')$ 时为一致有界。$x(k)$ 关于 t 的导数在 $[\tau(k)-r,\ \tau(k)]$上存在并由(10)式给出，因此它也是一致有界的。由 Ascoli 定理即知 A是紧的。

下面是关于周期解的存在定理

定理4 设K是C空间中的一个锥，A 对K中的一切 $k\neq 0$有定义。如果A满足下列的条件：

(i) 当$k\in\partial G\cap K$时，$\inf\|AK\|>0$，其中G是 C空间的零元素的任一有界开邻域；

(ii) 存在有限数 $M>0$使得当$k\in K$且$\|k\|\geq M$ 时，$\|Ak\|<\|k\|$；

(iii) 当$k\in\partial B(1)\cap K$时，$\inf\|k^p\|>0$。

则方程(10)至少存在一个非零周期解且周期大于r。

证 假定A在K中有不动点k^*，它不是方程(10)的临界点。也就是说，由k^*出发的解轨线回到k^*，因此是 C中的闭轨线。由解的唯一性保证了这个闭轨线为周期解。

C 中的非零元素中称为A的特征函数，是指存在一个数μ(特征值)使得$A\phi=\mu\phi$。

如果A关于K是正的且$\phi\in K$为A的特征函数，则$\mu>0$。

现在剩下来要证明的是，在K中有 A 的特征函数对应于特征值1。下面通过若干个引理来证明。

我们说一个算子的特征函数形成长度为 R 的连续分支。是指对每一个 $R_1<R$， 算子的特征函数集与零元素的每一个包含在 $B(R_1)$中的开邻域的边界之交非空。我们说连续分支是无限长的，如果在R上没有上界。

引理 1[163] 设 G 是某 Banach 空间中零元素的有界开邻域，K是空间中的锥，假定在 $\partial G\cap K$ 上算子A关于 K为正且为完全连续。如果$k\in\partial G\cap K$时 $\inf\|Ak\|>0$，则算子A在 $\partial G\cap K$ 中至少有一个特征函数对应于正的特征值。

证明略，有兴趣的读者可参阅[163]。

引理2 设算子A关于锥K为正且为完全连续。假定 A在 K中

具有一个无限长的连续分支。设 $F=\{\phi\in K$: ϕ为A的特征函数，$A\phi=\mu\phi\}$，如果满足下列的条件

(iv) 存在数$M<0$，$\mu^*>0$，使得对一切 $\phi\in F$ 满足 $\|\phi\|>M$ 时，对应的特征值$\mu<\mu^*$。

(v) 存在零元素的有界开邻域G，使得对一切$\phi\in\partial G\cap K$，对应的特征值$\mu>\mu^*$。

则μ^*为A的特征值，对应的特征函数$\phi^*\in F$。

证 假定不存在这样的ϕ^*。设$F_0=\{\phi\in F:\ \phi\notin G\}$，

及 $F_1=\{\phi\in F_0$: 对应的特征值$\mu<\mu^*\}$，

$F_2=\{\phi\in F_0$: 对应的特征值$\mu>\mu^*\}$。

则F_1与F_2互不相交，$F_1\cup F_2$包含F_0的全体元素。于是有如下的结果：

① F_1离原点为有界。这是因为$F_1\subset F_0$而F_0离原点有界。

② F_2为有界，离原点也必有界。若不然，则有 $\phi\in F_2$使得$\|\phi\|>M$，由条件(iv)，对应的$\mu<\mu^*$。这与F_2的定义矛盾。

③ F_1 和F_2 皆为闭集。设 $\{\phi_n\}$是 F_1 中的有界序列收敛于ϕ_0。由于F_1 离原点有界，故 $\|\phi_0\|>0$。由A的连续性知，$\{A\phi_n\}$收敛到$A\phi_0$。这样，序列$\{\mu_n\}=\{\|A\phi_n\|/\|\phi_n\|\}$ 收敛到 $\|A\phi_0\|/\|\phi\|=\mu_0\leqslant\mu^*$。从而得知方程 $A\phi_n=\mu_n\phi_n$ 收敛到 $A\phi_0=\mu_0\phi_0$。如果$\mu_0=\mu^*$，则对 μ^*会有特征函数 ϕ^*，这与假设矛盾。因此有 $\mu_0<\mu^*$及$\phi_0\in F_1$、F_2的闭性可类似地证明。

④ 集 F_1与F_2的距离为有限。若不然，则必存在 $\phi_n\in F_1$，$\psi_n\in F_2$，$A\psi_n=\mu_n\psi_n$，$n=1,2,\cdots$，使得

$$\text{当} n\to\infty \text{时，} \|\phi_n-\psi_n\|\to 0. \qquad (13)$$

由于F_1离原点有界，F_2 有上界以及(13) 式，我们可以假设序列$\{\psi_n\}$有上界且与原点距离有下界。因为 A为紧且 $\inf\|\psi\|>0$，$\psi\in F_2$，故得

$$0<\mu^*<\mu_n=\|A\psi_n\|/\|\psi_n\|<\sup_n\|A\psi_n\|/\inf_n\|\psi_n\|<\infty.$$

因此序列$\{\mu_n\}$有子列收敛到某一数 $\mu_0\geqslant\mu^*$。此外，由A的紧性可知$\{A\psi_n\}$具有收敛的子列$\{A\psi_i\}$。因 $\sup_n\|A\psi_n\|>0$，故 $\{A\psi_i\}$收敛

到非零元素 ψ^*，它可写成 $\mu_0\psi_0$。根据这些收敛性知道，对任一 $\varepsilon>0$，存在$N(\varepsilon)>0$，使得当$i>N(\varepsilon)$时有

$$\begin{aligned}\|\psi_i-\psi_0\| &= \|A\psi_i/\mu_i-\psi_0\|\\ &= \|((\mu_0/\mu_i)-1)\psi_0+(A\psi_i-\mu_0\psi_0)/\mu_i\|\\ &\leqslant |(\mu_0/\mu_i)-1|\,\|\psi_0\|+\|A\psi_i-\mu_0\psi_0\|/\mu^*\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

因此$\{\psi_i\}$收敛到ψ_0，由F_2的闭性知$\psi_0\in F_2$。再由(13)知$\{\phi_i\}$亦收敛到ψ_0，由F_1的闭性知$\psi_0\in F_1$，这与F_1,F_2互不相交矛盾。因此F_1与F_2的距离$d>0$。

现设G如条件V中所定义，又设

$$G^*=G\cup G_2,\ \ G_2=\{g\in C:\ \|\phi-g\|<\frac{d}{2},\phi\in F_2\}.$$

则G^*成为零元素的有界开邻域。下面我们要证明，A在$\partial G^*\cap K$中不存在特征函数。

由于G和∂G^*之交为空集，故$\partial G^*\cap K$是 $G\cap K$的外部。因此A在 $\partial G^*\cap K$ 中的特征函数应属于 F_0，且$\partial G^*\cap F=\partial G^*\cap F_0$。现设 $k_0\in\partial G^*\cap K$，则 $k_0\notin F_2$，这是因为 F_2是在G^*的内部。同理可知$k_0\notin F_1$。k_0 必然或属于$\partial G\cap K$或属 $\partial G_2\cap K$，这是因为 $\partial G^*\cap K$包含这两个集合的并集。如果 k_0为 $\partial G\cap K$中的特征函数，则由G的定义知k_0会仅仅属于F_2。如果k_0为$\partial G_2\cap K$ 中的特征函数，则它不会属于 F_1，这是因为G的构造使 F_1与 ∂G_2 不相交。所以$\partial G^*\cap F$为空集。

最后的结果与F为连续分支的假设矛盾。因此对应于μ^*，在F中有特征函数ϕ^*存在。引理2证毕。

问题已经退化为要证明算子 A当 $\mu^*=1$ 时满足引理 2 的条件。我们已经证明过A为完全连续，关于锥 K为正，在 K 具有无限长的特征函数的连续分支。定理4的条件 II 保证了引理 2 的条件IV 当 $\mu^*=1$时成立。因此我们仅需证明引理2的条件 V成立。这需要通过下面的引理来完成。

引理3[164] 对方程(10)我们假定(9) 中的A_0为非空，且存在

广义特征空间P和Q。则给定常数 $s, 0<s<1$，存在 $\delta=\delta(s)>0$，当$s\to 0$时 $\delta(s)\to 0$，以及函数 $V(y(f))$，它关于向量$y=y(f)=(\Psi, f)$的分量是正定的二次型，使得当 $\|f\|\leqslant\delta$，$\|f^P\|=s\delta$时 $\dot{V}(y)>0$。这里$\dot{V}(y)$表示V沿方程（10)在$B(\delta)$内的解轨线的导数。

引理3可以应用到方程(10)之中。假定集合

$$G=\{g\in C:\|g\|<\delta\}\cap\{g\in C:\|g^P\|<s\delta\} \qquad (14)$$

具有如下的性质：

(vi) $\partial G\cap K$中的任何元素在P的投影为$s\delta$。即

$$\partial G\cap K=\{k\in K:\ \|k\|\leqslant\delta,\ \|k^P\|=s\delta\}\xlongequal{def}\Gamma_s \qquad (15)$$

(vii) 方程（10）的从Γ_s的任一点k出发解轨线当 $0\leqslant t\leqslant\tau(k)$时($\tau(k)$由(11)确定)，仍然留在$B(\delta)$之内。

由于A具有无限长的特征函数的连续分支，故算子A在Γ内有特征函数ϕ而特征值$\mu>0$。如果$x(\phi)$为方程(10)的解，则由引理3知，这个解轨线当$t\in[0,\tau(\phi)]$时，在P中的分量以$s\delta$为下界。即有$\|x_t(\phi)^P\|\geqslant s\delta$。特别有

$$s\delta\leqslant\|x_{\tau(\phi)}(\phi)^P\|=\|(A\phi)^P\|=\mu\|\phi^P\|=\mu s\delta.$$

上式说明了$\mu\geqslant 1$。若 $\mu=1$，则ϕ为A的不动点。因此可假定$\mu>1$。

不难证明，G为零元素的一个邻域。我们已证明条件（vi）和(vii)被满足。则集G当$\mu^*=1$时满足引理2的条件(v)。

采用证明A的紧性那样的论证方法，便可证明性质（vii)。若$\delta=\delta(s)$为引理3所定义，因当$s\to 0$时$\delta(s)\to 0$，故存在$\delta'>\delta(s)$，$0\leqslant s<1$。设$J=J(\delta')$，$T=T(\delta')$及$q=exp(-TJ)$。因此由(12)，如果$k\in K\cap B(q\delta)$，则$\|Ak\|\leqslant\delta$。所以若

$$\Gamma_s\subset K\cap B(q\delta), \qquad (16)$$

则性质(viii)成立。

现在剩下来要证明可以选到一个s，使得(15)和(16)为真。我们首先需要知道，$\partial B(\delta)\cap K$中的元素在P的分量有正下界。如果不是这样，则$\partial G\cap K$中的元素存在一个其范数大于$q\delta$者，

而在P中的分量的范数小于$s\delta$。故(15)和(16)成立。

引理4 如果定理4的条件(iii)成立。则对$\partial B(\delta)\cap K(\delta>0)$中的所有$k$，存在一个极小数$a(\delta)=\nu\delta$，$\nu>0$为常数，使得$\|k^P\|\geqslant a(\delta)$。

证 固定δ，假定不存在这样的极小数。则在$\partial B(\delta)\cap K$中必存在序列$\{k_j\}$使得$\|k_j^P\|$当$j\to\infty$时趋于0。但$\{k_j/\delta\}\in\partial B(1)\cap K$，这与条件(iii)矛盾。故对$\delta>0$有极小数$a(\delta)>0$。$\partial B(\delta)\cap K$的闭包保证了在$\partial B(\delta)\cap K$中至少存在一个元素$k_0$，使得$\|k_0^P\|=a(\delta)$。设$\beta>0$为固定，则由锥的性质知$\beta k_0\in\partial B(\beta\delta)\cap K$，使

$$\|(\beta k_0)^P\|=\beta\|k_0^P\|=\beta a(\delta)\geqslant a(\beta\delta)。\tag{17}$$

我们若在(17)中令$\beta=\dfrac{1}{\delta}$，则$a(\delta)\geqslant\delta a(1)$，当我们用1代替$\delta$，用$\delta$代替$\beta$时，则$\delta a(1)\geqslant a(\delta)$。这说明了

$$a(\delta)=\nu\delta,\quad \nu=a(1)>0\tag{18}$$

从而引理4得证。

最后选取$0<s<1$，$s<\nu q$，q如(16)所述，ν如(18)所述，以保证(15)和(16)两式成立。

为了证明(15)成立。假定有$k_0\in\partial G\cap K$使$\|k_0^P\|<s\delta$，那末，因为

$$\partial G=\{g\in C:\ \|g\|=\delta,\ \|g^P\|\leqslant s\delta\}\cup\{g\in C:\ \|g\|\leqslant\delta,\\ \|g^P\|=s\delta\},$$

故有$\|k_0\|=\delta$。但由引理4得$\nu\delta\leqslant\|k_0^P\|<s\delta<s\delta/q$，这与$s<q\nu$矛盾(注意$0<q<1$)。

要证明(16)成立，我们注意到对任一$k\in P_s$，有$\|k^P\|=s\delta<\nu q\delta=a(q\delta)$。如果$\|k\|\geqslant q\delta$，则$\|k^P\|\geqslant a(q\delta)$，此为不真，故有$\Gamma_s\subset B(q\delta)\cap K$，从而证明了定理4。

(3) 定理4的应用

文[165]利用定理4讨论了下列方程

$$\dot{x}(t)=-ax(t-1)[1+x(t)],\tag{19}$$

$$\dot{x}(t)=-ax(t-1)[1-x^2(t)],$$

$$\ddot{x}(t)+\varepsilon(x^2(t)-1)\dot{x}(t)+x(t-\lambda)=0,\quad \varepsilon>0,\ \lambda>0.$$

的周期解的存在性，我们在这里仅将方程(19)进行讨论，通过它介绍如何利用定理4来判别方程周期解的存在性。

定理5 如果$\alpha>\frac{\pi}{2}$，则方程(19)存在周期大于1的非平凡周期解。

证 方程(19) 显然是属于方程(10) 类型的一个具体方程。(19) 的线性部份的特征方程为$\lambda+\alpha e^{-\lambda}=0$。下面的引理 5 保证了(9)式的 A_0当$\alpha>\frac{\pi}{2}$时为非空。

引理5[166] 对应于任一在$[-1,0]$上的有界可积函数f，方程(19)存在唯一解$x(f)(t)$，$t\geqslant0$。并具有如下的性质：

(i) 若$f(0)\gtreqless-1$，则$x(f)(t)\gtreqless-1$ $(t\geqslant0)$。

(ii) 若$f(0)>-1$，则$-1<x(f)(t)<e^{\alpha}-1$ $(t\geqslant2)$。

(iii) 若$\alpha>\frac{\pi}{2}$，且f在 $(-1,0)$为正（负且$f(0)>-1$），则$x(f)$在零轴上下振动并且当$t\to\infty$时不趋于零。

(iv) 对振动解$x(f)$，存在第一个点$z_1<2$，使得 $x(f)(z_1)=0$，$\dot{x}(k)(z_1)\neq0$，后面的零点的间隔不少于 1，而且是简单的。

证明略。可参看文[166]。

设 $K=\{k\in C([-1,0],\ E')：0\leqslant k(\theta_1)\leqslant k(\theta_2),-1\leqslant\theta_1\leqslant\theta_2\leqslant0\}$。 (20)

容易证明，对于K的边界元素和内部元素，引理5的条件（iii）都成立。对于任一 $k\in K$，引理5保证存在$x(k)$ 的第一个简单零点z_2且$\dot{x}(k)(z_2)>0$。因此由下式

$$Ak=x_{\tau(k)}(k),\quad \tau(k)=z_2(k)+1 \tag{21}$$

定义的算子A将K映射入K。

证明$\tau(k)$在K的连续性相当于要证明 $z_2(k)$在K的连续性。其证明是解 $x(k)$ 在 K 上的连续性和引理5的（iv）的直接结果。这

里不再叙述，至于$z_2(k)$的有界性则由下面的引理给出。

引理6 对每一个 $\delta>0$，存在有限数$T(\delta)$，使得$\tau(k)=z_2(k)+1\leqslant T(\delta)$，$k\in B(\delta)\cap K$。

证 设算子A^*：$K\to C$的定义为$A^*k=x_1(k)$，$(A^*k)(\theta)=x(k)(1+\theta)$，$(-1\leqslant\theta\leqslant 0)$。则用证明$A$的紧性的相同论断。得知$A^*$为紧。设$ClA^*(B(\delta)\cap K)=S$，它是紧的。现考虑$z_2(k)$作为$S$到实数的像，$z_2(k)=z_2(A^*k)$。则$z_2(\cdot)$是一个紧集的连续映像。且有一个有限一致的界$T(\delta)$。

下面的引理证明了定理4的条件(i)成立。

引理7 设G为C空间的零元素的有界邻域，则对(21)的A，当$k\in\partial G\cap K$时$\inf\|Ak\|>0$。

证 注意到因为$\partial G\cap K$距离零元素为有界，故必存在$\delta_0>0$使得

$$\inf\|k\|=\inf|k(0)|\geqslant\delta_0>0,\quad k\in\partial G\cap K。\qquad(22)$$

假定对$k\in\partial G\cap K$，有$\inf\|Ak\|=0$。因为$\|Ak\|=x(k)(z_2+1)$。故由假设推知当$k\in\partial G\cap K$及$z_2\leqslant t\leqslant z_2+1$时有$\inf x(k)(t)=0$。于是存在一初值序列属于$\partial G\cap K$，其对应的解序列在单位区间上趋向于零。因为$Ak$是单调增加的，故解的导数也趋向于零。由(19)知这些解在前面的单位区间上趋向于零。并且当$z_2-1\leqslant t\leqslant z_2$时$\inf|x(k)(t)|=0$。由于$G$有界，故$z_2=z_2(k)$对一切$k\in\partial G\cap K$为一致有界。因此，我们可以将这个过程继续下去，经过有限步便得$\inf|x(k)(z_1(k)+1)|=0$对$k\in\partial G\cap K$。注意到$x(k)(z_1+1)$为$x(k)$在$[z_1,z_2]$上的极小值。经过一个类似的过程，又可回到z_1+1，经过有限步骤得到$\inf|x(k)(0)|=\inf|k(0)|=0$，$k\in\partial G\cap K$。后者与(22)矛盾。从而引理得证。

定理4的条件(ii)是得到满足的，如果我们取$M=e^a-1$。当$\|k\|\geqslant e^a-1$时，由引理6的(ii)得$\|Ak\|<\|k\|$。

最后，我们证明定理4的条件(iii)得到满足，从而完成定理5的证明。为此再通过以下的引理。

引理8 如果K为(20)所确定的锥，$k\in\partial B(1)\cap K$，则

$\inf\|k^{p}\|>0$。

证 文〔166〕中的一个结果指出，若 $\alpha>\frac{\pi}{2}$，则存在(19)式中线性部份的一个复特征值$\lambda=\sigma+i\gamma$，使得$\sigma>0$和$0<\gamma<\pi$。对应于$\Lambda_0=(\lambda,\bar{\lambda})$为(4)的矩阵 $\Phi=(\phi,\bar{\phi})$和(6)的矩阵$\Psi=(\psi,\bar{\psi})$。其中$\phi=e^{\lambda\theta}/(1+\lambda)$，$-1\leqslant\theta\leqslant0$，$\psi=e^{-\lambda\vartheta}$，$0\leqslant\vartheta\leqslant1$。特征函数$\phi$和$\psi$的选择要使得$(\Phi,\Psi)=I$。

现假定存在一序列$k_j\in\partial B(1)\cap K, j=1,2,\cdots$,使得$\inf\|k_j^p\|=0$。由于$\Phi$中的元素为线性独立,故我们的假设退减为$\inf|(\Psi,k_j)|=0$。由此得 $\inf|R(k_j)|=0$及 $\inf|I(k_j)|=0$。其中$R(\cdot)$和$I(\cdot)$分别地为(ψ,k_j)的实部和虚部。由(7)可得

$$R(k_j)=k_j(0)-\alpha\int_{-1}^{0}k_j(s)e^{-\sigma(s+1)}\cos\gamma(s+1)ds,$$

$$I(k_j)=\alpha\int_{-1}^{0}k_j(s)e^{-\sigma(s+1)}\sin\gamma(s+1)ds. \qquad (23)$$

由于$0<\gamma<\pi$，故在$(-1,0]$上 $\alpha\exp(-\sigma(s+1))\sin\gamma(s+1)>0$。因此，由于 $\inf|I(k_j)|=0$且 k_j在$[-1,0]$上非减和非负，故当$-1\leqslant s<0$时$k_j(s)\to0$。注意到$\|k_j\|=k_j(0)=1$,因$k_j\in\partial B(1)\cap K$。再根据(23)可知 $\inf|R(k_j)|=1$。导出了矛盾。引理从而得证。于是定理5全部证毕。

§4 存在周期解的Nussbaum方法

在本节中,我们将介绍研究周期解存在性的不动点定理方法。G.S.Jones在文〔167〕中证明了方程 $\dot{x}(t)=-\alpha x(t-1)(1+x(t))$ 当$\alpha>\frac{\pi}{2}$时具有非平凡的周期解。接着又证明了其他的一些方程的周期性质。他的基本方法是使用某些不动点定理，使得一紧映象F存在非零的不动点,而这个不动点又对应着一个泛函微分方程的非零周期解。R.D.Nussbaum在文〔168〕中指出了Jones的结果中，要求映像为紧的缺点，并给出了一个新的不动点定理，这个定理

推广了Jones和Browder的相应结果，然后利用他的不动点定理研究了某些微分差分方程周期解的存在性。下面介绍Nussbaum的理论。

1 Nussbaum不动点定理

在叙述Nussbaum 不动点定理之前，先介绍一些必须的有关知识。

定义1 （广义非紧性测度）设X为～Banach空间，μ是一个实值集函数。如果对X中的任一有界集A，μ有一个非负实值$\mu(A)$与之对应，并具有下列的性质：

1） 存在常数$m>0$，$M>0$，使对每一个有界集$A\subset X$，有$m\mu(A)\leqslant\gamma(A)\leqslant M\mu(A)$，其中$\gamma(A)$表示$A$的非紧性测度（见第五章定义1）。

2） 对任一有界集$A\subset X$，$\mu(\overline{CO}(A))=\mu(A)$，$\overline{CO}(A)$表示$A$的凸闭包。

3） 如果$A\subset B$，则$\mu(A)\leqslant\mu(B)$。

4） $\mu(A\cup B)=\max(\mu(A),\mu(B))$。

5） $\mu(A+B)\leqslant\mu(A)+\mu(B)$，其中$A+B=\{a+b: a\in A, b\in B\}$。

则称μ为广义的非紧性测度。

下面我们简略地介绍不动点指标

我们称一个紧的距离空间A为紧的距离ANR。如果对任意的距离空间M和任意的闭集$B\subset M$，以及任意的连续映射$f:B\to A$，f在B的某一个开邻域U上具有连续的扩张$\widetilde{f}$：U$\to A$。

设G为紧的距离ANR A中的一个开子集，$f:G\to A$为连续映像。它在G内具有紧的不动点集（包括空集）。则存在一个确定的整数$i_A(f,G)$，我们称之为f在G上的不动点指标。它可以被认为是f在G内的不动点数目的代数计数。当然，它要求满足一定的性质（可参阅[171]和[172]）。其中最基本的性质有：1°可加性，即$i_A(f,G_1)+i_A(f,G_2)=i_A(f,G_1\cup G_2)$，其中$G_1$，$G_2\subset A$为开集，$f$在$G_1\cap G_2$中没不动点；2°可交换性，即$i_A(f,G)=i_B(hfh^{-1},$

$h(G)$)，其中B是一个紧的距离ANR，h是A到B的一个同胚映射。等等。

下面将不动点指标推广到在闭凸集上定义的映像中去。假设A是Banach空间X中的一个闭凸子集，U是A的有界开子集，设f：$\overline{U}\to A$是一个μ—压缩（见第五章前言定义2），当$x\in\overline{U}-U$时$f(x)\neq x$。定义$K_1=K_1(f,U)=\overline{CO}f(U)$，$K_n=K_n(f,U)=\overline{CO}f(U\cap K_{n-1})$，$n=2,3,\cdots$。置$K_\infty=K_\infty(f,U)=\bigcap_{n\geq1}K_n$，不难证明$K_\infty$是紧且凸的（因为$\mu(K_n)\leqslant k^n\mu(U)$），且$f(U\cap K_\infty)\subset K_\infty$。现设$K$为任意的紧凸集使$K\supset K_\infty$且$f(U\cap K)\subset K$。现定义$f$在$U$上的不动点指标为

$$i_A(f,\ v)=\begin{cases}i_K(t,\ U\cap K), & \text{当}K_\infty\text{为非空时，}\\0, & \text{当}K_\infty\text{为空集时。}\end{cases}$$

下面介绍喷射点的概念：

定义2　设X为一拓扑空间，$x_0\in X$，W为x_0的一个开邻域，f：$W-\{x_0\}\to X$为连续映像，如果存在x_0的一个开邻域U，使得对每一个$x\in U-\{x_0\}$时有一个正整数$m=m(x)$，使得$f^m(x)$有定义且$f_m(x)\notin U$。则称x_0为f的喷射点。

下面介绍Nussbaum的不动点定理及其推论，不加证明，有兴趣的读者可看〔168〕。

定理1　设G是Banach空间X中的一个闭有界凸无穷维的子集，μ是X上的广义非紧性测度，$x_0\in G$，f：$G-\{x_0\}\to G$为连续且为μ—压缩。如果x_0为f的喷射点，U为x_0的一个开邻域使得当$x\in\overline{U}-\{x_0\}$时$f(x)\neq x$，则有$i_G(f,G-\overline{U})=1$且f在$G-\overline{U}$中存在不动点。

推论1　设G和μ的定义如定理1所述，又设f：$G\to G$为连续且为μ—压缩。如果x_0为f的喷射不动点，U为x_0的一个邻域使得对$x\in\overline{U}-\{x_0\}$时$f(x)\neq x$。则$i_G(f,U)=0$，此处，f在G内存在非喷射点的不动点。

推论2　设K是Banach空间中的一个闭凸无穷维子集且$0\in K$。

对某个$R>0$设$G=\{x\in K: \|x\|\leqslant R\}$，又设 $f:G-\{0\}\to K$为μ—压缩，μ为非紧性测度，如果对$x\in K$，$\|x\|=R, t\geqslant 1$有$f(x)\neq tx$，且0为f的喷射点．则f在$G-\{0\}$中存在不动点。

2　周期解的存在性

在这里我们利用Nussbaum的不动点定理来考察方程组

$$\begin{cases} x'(t)=y(t)+\varepsilon\left[x(t)-\dfrac{1}{3}x^3(t)\right], & t\geqslant 0 \\ y'(t)=-x(t-r)+kx(t), & t\geqslant 0 \end{cases} \tag{1}$$

满足条件$x_0=\varphi$（给定的连续函数），$y(0)=y_0$的解的周期性。为此我们需要通过7个引理和一个定理来讨论，其中引理1至3可涉及较为广泛的方程

$$\begin{cases} x'(t)=y(t)+\varepsilon\left[x(t-r_1)-\dfrac{1}{3}x^3(t)\right], & t\geqslant 0, \\ y'(t)=-x(t-r)+kx(t-r_2), & t\geqslant 0, \\ x(t)=\varphi(t)\ -\rho\leqslant t\leqslant 0, & \rho=\max\{r_1, r_2, r\}, \\ y(0)=y_0. \end{cases} \tag{2}$$

引理1　设 $(x(t), y(t))$ 表示 (2) 的解、如果$k<1$，且当$k>0$时$r_2<r$，则当$\varphi(0)>0$时，存在$T_1>0$，使得$x(T_1)<0$。

证　用反证法，假定对一切$t\geqslant 0$均有$x(t)\geqslant 0$。定义$M_0=\max\limits_{\rho\leqslant t\leqslant 0}|\varphi(t)|$，$k_1=\max(k, 0)$，以$\xi$表示下列方程

$$y(0)+(1+|k|)\rho M_0+k_1\rho\xi+\varepsilon\xi-\varepsilon\xi^2/3=0 \tag{3}$$

的最大正根（若方程 (3) 无正解，则取$\xi=0$）。

如果$M>\max(M_0, \xi)$，我们第一个要求是$x(t)<M$，$t\geqslant 0$。假若不成立，设$T>0$是使$x(T)=M$的第一个时刻，则$x(t)$在T处的左导数$x'(T)\geqslant 0$。另一方面我们有

$$\begin{aligned} y(T) &= y(0)-\int_{-r}^{T-r}x(s)ds+k\int_{-r_2}^{T-r_2}x(s)ds \\ &\leqslant y(0)+(1+|k|)\rho M_0+(k-1)\int_0^{T-\rho}x(s)ds+k_1\rho M \\ &\leqslant y(0)+(1+|k|)\rho M_0+k_1\rho M. \end{aligned} \tag{4}$$

从而得到 $x'(T)=y(T)+\varepsilon[x(T-r_1)-x^3(T)/3]$

$$\leqslant y(0)+(1+|k|)\rho M_0+k_1\rho M+\varepsilon M-\varepsilon M^3/3$$

$$<0。\tag{5}$$

导出了矛盾，故必有$x(t)<M$，$t\geqslant 0$

对于$t\geqslant 2\rho$，我们有

$$y(t)=y(\rho)-\int_{\rho-r}^{t-r}x(s)ds+k\int_{\rho-r_1}^{t-r_1}x(s)ds$$

$$\leqslant y(\rho)+A-(1-k_1)\int_{\rho}^{t-\rho}x(s)ds-\int_{t-\rho}^{t-r}x(s)ds$$

$$+k\int_{t-\rho}^{t-r_1}x(s)ds$$

$$\leqslant y(\rho)+A+k\rho M-(1-k_1)\int_{\rho}^{t-\rho}x(s)ds。\tag{6}$$

其中 $A=-\int_{\rho-r}^{\rho}x(s)ds+k\int_{\rho-r_1}^{\rho}x(s)ds$。由此可知，除非$x(t)$在$[0,\infty)$上可积，否则$y(t)\to-\infty(t\to\infty)$。如果当$t\to\infty$时$y(t)\to-\infty$，则$x'(t)\to-\infty$，这与$x(t)$永远非负的假设矛盾。因此$x(t)$在$[0,\infty)$上可积。于是当$t\to\infty$时

$$y(t)\to y(0)-\int_{-r}^{0}x(s)ds+k\int_{-r_1}^{0}x(s)ds$$

$$-(1-k)\int_{0}^{\infty}x(s)ds。$$

由于$x'(t)=y(t)+\varepsilon[x(t-r_1)-x^3(t)/3]$，可见$x'(t)$有界，又因$x(t)$非负且在$[0,\infty)$可积，故有$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$。如果设$B=\lim\limits_{t\to\infty}y(t)$，则$\lim\limits_{t\to\infty}x'(t)=B$，故得$B=0$。

当$k>0$时有

$$y(t)=y(0)-\int_{-r}^{0}x(s)ds+k\int_{-r_1}^{0}x(s)ds$$

$$-(1-k)\int_{0}^{t-r}x(s)ds+k\int_{t-r}^{t-r_1}x(s)ds,$$

对$\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$时比较上式，得知$t\geqslant r$时$y(t)\geqslant 0$。

当$k<0$时，$y(t)$当$t\geqslant\rho$时单调减少，故当$t\geqslant\rho$时$y(t)\geqslant 0$。由

于$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$，可取$s>\rho$使$x(s)>0$且$t\geqslant s$时$x(t)<\sqrt{3}$。因此当$t\geqslant s$时有

$$x(t)=x(s)+\int_s^t x'(u)du$$

$$=x(s)+\int_s^t y(u)du+\varepsilon\int_{s-r_1}^{t-r_1}x(u)du-\frac{\varepsilon}{3}\int_s^t x^3(u)du$$

$$\geqslant x(s)+\varepsilon\int_s^{t-r_1}(x(u)-x^3(u)/3)du-\frac{\varepsilon}{3}\int_{t-r_1}^{t}x^3(u)du$$

$$\geqslant x(s)-\frac{\varepsilon}{3}\int_{t-r_1}^{t}x^3(u)du. \tag{7}$$

因为$\lim\limits_{t\to\infty}\int_{t-r_1}^{t}x^3(u)du=0$，故由(7)知当$t$足够大时$x(t)>\frac{1}{2}x(s)$。得到了矛盾。证毕。

现将方程(2)化为二阶方程，得$x''(t)=-x(t-r)+kx(t-r_2)+\varepsilon x'(t-r_1)-\varepsilon x^2(t)x'(t)$。它对应的线性方程的特征方程为

$$\lambda^2-\varepsilon\lambda e^{-r_1\lambda}+e^{-r\lambda}-ke^{-r_2\lambda}=0. \tag{8}$$

引理2 若$r>0$，又对每一个使得$\gamma_0^2=\cos r\gamma_0$及$0<\gamma_0<\frac{\pi}{r}$的$\gamma_0$，如果$\varepsilon\gamma_0>-\sin r\gamma_0$（特殊情况$\varepsilon\geqslant0$），则方程$\lambda^2-\varepsilon\lambda+e^{-r\lambda}=0$具有两个根$\lambda$使得$R_e(\lambda)>0$和$-\frac{\pi}{r}<I_m(\lambda)<\frac{\pi}{r}$。

证 首先证明，当$\lambda=iv$，$0\leqslant v\leqslant\frac{\pi}{r}$或$\lambda=\mu+\frac{i\pi}{r}$，$\mu\geqslant0$时，如果$\varepsilon'\geqslant\varepsilon$，则$\lambda^2-\varepsilon'\lambda+e^{-r\lambda}\neq0$。

若$\lambda=iv$，$0\leqslant v\leqslant\frac{\pi}{r}$而$\lambda^2-\varepsilon'\lambda+e^{-r\lambda}=0$，则分开实部和虚部即得$-v^2+\cos rv=0$和$-\varepsilon'v-\sin rv=0$。于是我们有$0<v<\frac{\pi}{r}$和$v^2=\cos rv$，由假设知$\varepsilon'v\geqslant\varepsilon v>-\sin rv$，得到了矛盾。若$\lambda=\mu+\frac{i\pi}{r}$，

而 $\lambda^2-\varepsilon'\lambda+e^{-r\lambda}=0$，则有 $\mu^2-\left(\frac{\pi}{r}\right)^2-\varepsilon'\mu-e^{-r\mu}=0$ 和 $2\mu\frac{\pi}{r}-\varepsilon'\cdot\frac{\pi}{r}=0$。由第二个方程得$\mu=\frac{1}{2}\varepsilon'$。但将$\mu=\frac{1}{2}\varepsilon'$ 代入第一个方程的左边得到负数，产生矛盾。故论断成立，同理可知，当$\lambda=-iv$，$0\leqslant v\leqslant\frac{\pi}{r}$或$\lambda=\mu-\frac{i\pi}{r}$，$\mu\geqslant0$时，$\lambda^2-\varepsilon'\lambda+e^{-r\lambda}\neq0$。

设$\varepsilon'\geqslant\varepsilon$为正数，又设$R_1=1+\varepsilon'$。则当$\varepsilon\leqslant\varepsilon_1\leqslant\varepsilon'$和$\mathrm{Re}(\lambda)\geqslant R_1$时，$\lambda^2-\varepsilon_1\lambda+e^{-r\lambda}\neq0$。对任一$\mathrm{R}\geqslant R_1$，定义$G_R=\left\{\lambda\in C:0<\mathrm{Re}(\lambda)<\mathrm{R},|\mathrm{Im}(\lambda)|<\frac{\pi}{r}\right\}$。若定义$f_t(\lambda)=\lambda^2-(1-t)\varepsilon\lambda-t\varepsilon'\lambda+e^{-r\lambda}$，$0\leqslant t\leqslant1$，则通过计算得知当$\lambda\in\partial G_R$，$0\leqslant t\leqslant1$时$f_t(\lambda)\neq0$。由Rouche定理知方程$f_1(\lambda)=0$在$G_R$中有相同代数数的解。

现设$b>0$使$\frac{(\varepsilon')^2}{4}<b<\frac{(\varepsilon')^2}{4}+\frac{\pi^2}{r^2}$并选取$R_2>\max\{1+\varepsilon',b+\varepsilon'\}$。易知当$\mathrm{Re}(\lambda)\geqslant R_2$时 $\lambda^2-\varepsilon'\lambda+(1-s)e^{-r\lambda}+sb\neq0$，$0\leqslant s\leqslant1$；而$\mathrm{Re}(\lambda)<R_2$时，$\lambda^2-\varepsilon'\lambda+b$在$G_{R_2}$中有两个根。现要证明，若$0\leqslant s\leqslant1$，且当$\lambda=iv$，$0\leqslant v\leqslant\frac{\pi}{r}$或$\lambda=\mu+\frac{i\pi}{r}$，$\mu\geqslant0$ 时 $\lambda^2-\varepsilon'\lambda+(1-\varepsilon)e^{-r\lambda}+sb\neq0$。如果当$\lambda=iv$，$0\leqslant v\leqslant\frac{\pi}{r}$时$\lambda^2-\varepsilon'\lambda+(1-\varepsilon)e^{-r\lambda}+sb=0$，则用前面相同的方法可得$-v^2+(1-s)\cos rv+sb=0$和$-\varepsilon'v-(1-s)\sin rv=0$。由第二个方程得$v=0$（因为$\varepsilon'>0$），这是不可能的。如果当$\lambda=\mu+\frac{i\pi}{r}$，$\mu\geqslant0$时$\lambda^2-\varepsilon'\lambda+(1-\varepsilon)e^{-r\lambda}+sb=0$，则有$\mu^2-\left(\frac{\pi}{r}\right)^2-\varepsilon'\mu-(1-s)+sb=0$和$2\mu\left(\frac{\pi}{r}\right)-\varepsilon'\left(\frac{\pi}{r}\right)=0$。由第二个方程得到$\mu=\frac{1}{2}\varepsilon'$，代入第一个方程得$-\frac{1}{4}(\varepsilon')^2-\left(\frac{\pi}{r}\right)^2-(1-s)+sb=0$，这也不可能，因为我们取$b<\frac{(\varepsilon')^2}{r}$

$+\left(\frac{\pi}{r}\right)^2$。从而引理得证。

引理3 如果$\varepsilon>0$，$r>0, 0\leqslant r_1\leqslant r, 0\leqslant r_2\leqslant\frac{1}{2}r$且$0\leqslant k<1$，则方程$\lambda^2-\varepsilon\lambda e^{-r_1\lambda}+e^{-r\lambda}-ke^{-r_2\lambda}=0$有两个解$\lambda$使$\mathrm{Re}(\lambda)>0$，$-\frac{\pi}{r}<I_m(\lambda)<\frac{\pi}{r}$。如果$\varepsilon\geqslant 0$，$r>0$，$0\leqslant r_1\leqslant r$且$-\left(\frac{\pi}{2r}\right)^2<k<0$，则方程$\lambda^2-\varepsilon\lambda e^{-r_1\lambda}+e^{-r\lambda}-k=0$亦具有两个解$\lambda$使$\mathrm{Re}(\lambda)>0$，$-\frac{\pi}{r}<I_m(\lambda)<\frac{\pi}{r}$。

证 先考虑第一情形。若$R(\lambda)\geqslant R_1=1+\varepsilon+k$，则对任何非负数$r_1'$，$r_2'$，$r_3'$及任何非负数$k'\leqslant k$，有

$$|\lambda^2-s'e^{-r_1'\lambda}+e^{-r'\lambda}-k'|\geqslant|\lambda||\lambda-\varepsilon'e^{-r_1'\lambda}|-1-k$$
$$\geqslant(1+\varepsilon+k)(1+k)-1-k>0。$$

若$G_{R_1}=\left\{\lambda:\ 0<\mathrm{Re}\lambda<R_1,\ -\frac{\pi}{r}<\mathrm{Im}(\lambda)<\frac{\pi}{r}\right\}$，则由引理2知$\lambda^2-\varepsilon\lambda+e^{-r\lambda}$在$G_{R_1}$恰有两个根。由Rouche定理只要证明$\lambda^2-\varepsilon\lambda e^{-r_1\lambda}+e^{-r\lambda}-ke^{-r_2\lambda}=0$能变形为$\lambda^2-\varepsilon\lambda+e^{-r\lambda}$在$\partial G_{R_1}$上不为零就行了。因此，如定义$f_t(\lambda)=\lambda^2-\varepsilon\lambda e^{-tr_1\lambda}+e^{-r\lambda}-tke^{-r_2\lambda}$。则只要证明当$0\leqslant t\leqslant 1$和$\lambda\in\partial G_{R_1}$时$f_t(\lambda)\neq 0$ 就行了，为此，我们只要证明当$\lambda=iv$，$0\leqslant v\leqslant\frac{\pi}{r}$或$\lambda=\mu+\frac{i\pi}{r}$，$\mu\geqslant 0$时$f_t(\lambda)\neq 0$就行了，至于$\lambda$的共轭复数自然有同样的结论。如果$\lambda=iv$及$f_t(\lambda)=0$，则分实部和虚部便可得到方 程$-v^2-\varepsilon v\sin tr_1v+\cos rv-tk\cos r_2v=0$和$-\varepsilon v\cdot\cos tr_1v-\sin rv+k\sin r_2v=0$。如果$v=0$，则第一个方程退化为$1-tk=0$。如果$0<v\leqslant\frac{\pi}{2r}$，则$\sin rv>\sin r_2v$和$\cos tr_1v\geqslant 0$使得$-\varepsilon v\cos tr_1v-\sin rv+k\sin r_2v<0$。如果$\frac{\pi}{2r}<v\leqslant\frac{\pi}{r}$，则 $\cos r_2v\geqslant 0$（因为$0\leqslant r_2\leqslant\frac{1}{2}r$），$\cos rv\leqslant 0$且$-v^2-\varepsilon v\sin tr_1v+\cos rv-tk\cos r_2v<0$。如

果$\lambda=\mu+\frac{i\pi}{r}$，则由实部和虚部可得到方程$\left[\mu^2-\left(\frac{\pi}{r}\right)^2\right]-\varepsilon e^{-tr_1\mu}\left(\mu\cos tr_1\frac{\pi}{r}+\frac{\pi}{r}\sin tr_1\frac{\pi}{r}\right)-e^{-r\mu}-kte^{-r_2\mu}\cos r_2\frac{\pi}{r}=0$及$2\mu\frac{\pi}{r}-\varepsilon e^{-tr_1\mu}\left(\frac{\pi}{r}\cos tr_1\frac{\pi}{r}-\mu\sin r_1\frac{\pi}{r}\right)+kte^{-r_2\mu}\sin r_2\frac{\pi}{r}=0$。如果$0\leqslant tr_1\leqslant\frac{r}{2}$，则由第一个方程可得到$\mu^2>\varepsilon\mu e^{-tr_1\mu}\cos tr_1\frac{\pi}{r}$或者当$\mu>0$时有$\mu>\varepsilon e^{-tr_1\mu}\cos tr_1\frac{\pi}{r}$。将这个估计式用于第二个方程，得到$2\mu\frac{\pi}{r}-\varepsilon e^{-tr_1\mu}\frac{\pi}{r}\cos tr_1\frac{\pi}{r}>0$。由此又得到第二个方程的左边为正。如果$\frac{r}{2}<tr_1\leqslant r$，则$\cos tr_1\frac{\pi}{r}\leqslant0$，这亦导出第二个方程的左边为正。综上所述，得知当$\lambda\in\partial G_{R_1}$时$f_t(\lambda)\neq0$。从而引理的第一部份得证。

为了避免重复，我们对引理的第二部份只给出证明的大意。如上一样，只要证明当$\lambda=iv$，$0\leqslant v\leqslant\frac{\pi}{r}$，或$\lambda=\mu+\frac{i\pi}{r}$，$\mu\geqslant0$时，$g_t(\lambda)\neq0$，$0\leqslant t\leqslant1$。其中$g_t(\lambda)=\lambda^2-\varepsilon\lambda e^{-tr_1\lambda}+e^{-r\lambda}-tk$。当$\lambda=iv$，$0\leqslant v\leqslant\frac{\pi}{r}$或者$\lambda=\mu+\frac{i\pi}{r}$，$\mu\geqslant0$时，$g_t(\lambda)=0$都可以由实部和虚部分成两个方程。正如前一部份一样，又可导出v或μ不满足方程。故矛盾。从而引理得证。

引理4 在方程(1)中，假定$0\leqslant k<1$，φ为单调增加，$\varphi(-r)=0$，$\varphi(0)\geqslant0$，$y_0\geqslant0$，$\max\{\varphi(0),\ y(0)\}>0$且$y_0+\varepsilon[\varphi(0)-(\varphi(0))^3/3]\geqslant0$。定义$T_1=\sup\{t\geqslant0:x'(s)\geqslant0,\ 0\leqslant s\leqslant t\}$和$z_1=\inf\{t>0:x(t)=0\}$（由引理1知$T_1$和$z_1$为有限）。则$z_1$为$x$的孤立零点且当$T_1\leqslant t\leqslant z_1+r$时$x'(t)\leqslant0$，$y'(t)\leqslant0$。

证 首先证明当$T_1\leqslant t\leqslant T_1+r$时$x'(t)\leqslant0$，$y'(t)\leqslant0$。显然，$x'(0)=0$（如果$T_1=0$，可用假设$x'_+(0)\geqslant0$来保证），$x''(T_1)=y'(T_1)\leqslant0$。取$\eta>0$，定义一个新的泛函微分方程如下：

$$\begin{cases} x_\eta'(t) = y_\eta(t) + \varepsilon[x_\eta(t) - x_\eta^3(t)/3] - \eta(t - T_1), & t \geqslant T_1, \\ y_\eta'(t) = -x_\eta(t-r) + kx_\eta(t), & t \geqslant T_1, \\ x_\eta(t) = x(t), & T_1 - r \leqslant t \leqslant T_1, \\ y_\eta(T_1) = y(T_1). \end{cases} \tag{9}$$

显然当$T_1 \leqslant t \leqslant T_1 + r$时，$\lim\limits_{\eta\to 0} x_\eta(t) = x(t)$，$\lim\limits_{\eta\to 0} y_\eta(t) = y(t)$。如果定义$t_1 = \sup\{t : T_1 \leqslant t \leqslant T_1 + r,\ x_\eta'(s) \leqslant 0,\ T_1 \leqslant s \leqslant t\}$，则因$\eta$的引入保证了$x_\eta''(T_1) \leqslant -\eta$（在$T_1$的导数是取右导数）使得$t_1 > T_1$且$x(t_1) < x_\eta(T_1)$。如果$t_1 < T_1 + r$，则必有$x_\eta'(t_1) = 0$。可见$x_\eta''(t_1) = -x_\eta(t_1 - r) + kx_\eta(t_1) - \eta \leqslant -x_\eta(T_1 - r) + kx_\eta(T_1) - \eta \leqslant -\eta < 0$，这与$t_1$的选法矛盾。由此可知$x_\eta$在区间$[T_1, T_1 + r]$上是严格递减的。因此，$y_\eta'(t) = -x_\eta(t - r) + kx_\eta(t) \leqslant -x_\eta(T_1 - r) + kx_\eta(T_1) \leqslant 0$，$T_1 \leqslant t \leqslant T_1 + r$。故$y_\eta$在$[T_1, T_1 + r]$上是递减的（事实上是严格递减）。

现设$t_2 = \sup\{t \geqslant T_1 : x'(s) \leqslant 0,\ T_1 \leqslant s \leqslant t\}$，则$t_2 \geqslant T_1 + r$，假设$t_2 < z_1 + r$，由$t_2$的定义知$x'(t_2) = 0$，故有$x''(t_2) = y'(t_2) = -x(t_2 - r) + kx(t_2) \leqslant (k-1)x(t_2 - r) < 0$，这与$t_2$的选择矛盾。故必有$t_2 \geqslant z_1 + r$，从而当$T_1 \leqslant t \leqslant z_1 + r$时，$x'(t) \leqslant 0$，$y'(t) \leqslant 0$。

下证z_1为孤立点。由上面的论述可知$x'(z_1) = y(z_1) \leqslant 0$。若$x'(z_1) < 0$，则$z_1$为孤立点，故假定$x'(z_1) = 0$。如果$x''(z_1) = y'(z_1) < 0$，则$z_1$还是孤立点，故我们又假定$y'(z_1) = 0$。由方程(1)得$y'(z_1) = -x(z_1 - r)$，如果$y'(z_1) = 0$，则有$z_1 - r < 0$及$\varphi(z_1 - r) = 0$。由于$\varphi$是单调减少的且$\varphi(-r) = 0$，故对$-r \leqslant t \leqslant z_1 - r$有$\varphi(t) = 0$。于是当$0 \leqslant t \leqslant z_1$时，$y(t) = y(0) + k\int_0^t x(s)ds$，于是一般有$y(z_1) > 0$，除非$y(0) = 0$和$k = 0$。因此我们必须假定$y_0 = k = 0$，这时有$y(t) = 0$，$x(t - r) = 0$，$0 \leqslant t \leqslant z_1$，于是方程组(8)退化为常微分方程组

$$\begin{cases}x'(t)=\varepsilon[x(t)-x^3(t)/3], \\ y'(t)=0.\end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant z_1.$$

易知当$x(0)<\sqrt{3}$时，$x(t)$ 是递增的且 $x(t)<\sqrt{3}$；当$x(0)=\sqrt{3}$时，$x(t)=\sqrt{3}$；当$x(0)>\sqrt{3}$时，$x(t)$是递减的且$x(t)>\sqrt{3}$，故在任何事况下都有$x(z_1)>0$，与z_1为零点矛盾。故有$y'(z_1)<0$，于是z_1为孤立点。证毕。

用相同的证明可以证得，x的零点序列 z_2，z_3，…，z_n 等等都是孤立点。x在$[z_n, z_n+r]$上或为单调增加或为单调减少，依赖于$x(z_n+r)$ 是正或是负。而y在$[z_n,z_n+r]$上或为单调增加或为单调减少。再者，当$n\geqslant 2$时若$x(z_n+r)>0$，则$y'(z_n)>0$，若$x(z_n+r)<0$时，则$y'(z_n)<0$。

我们的证明方法可描述如下：设$G=\{(\varphi, y_0)$：φ为 $[-r,0]$ 上的连续单调增加函数，$y_0\geqslant 0$，$\varphi(-r)=0$，$y_0+\varepsilon[\varphi(0)-(\varphi(0))^3/3]\geqslant 0\}$。易证$G$为Banach空间$X=C([-r, 0])\times R$ 中的一个闭凸子集。对给定的 $(\varphi, y_0)\in G-\{0\}$（0表示$X$的原点），设$(x(t), y(t))$ 为（1）满足初值 (φ, y_0) 的解，又设$z_1(\varphi)$为x的第一个零点且 $z_1(\varphi)>0$。定义 $F(\varphi, y_0)=(-\psi, -y_1)$ 其中 $\psi(t)=x(z_1(\varphi))+r+t)$，$-r\leqslant t\leqslant 0$，$y_1=y(z_1(\varphi)+r)$。如果$F$在$G$上有不动点$(\bar{\varphi},\bar{y}_0)$，则$F(\bar{\varphi}, \bar{y}_0)=(-\psi, -y_1)=(\bar{\varphi}, \bar{y}_0)$，即$-x(z_1(\bar{\varphi})+r+t)=\bar{\varphi}(t)$，$-r\leqslant t\leqslant 0$，$-y(z_1(\bar{\varphi})+r)=\bar{y}_0$，故$F$在$G$上的不动点对应（1）的周期解。由引理4知 $F(G-\{0\})\subset G-\{0\}$，易证$F$在$G-\{0\}$上是连续的。

引理5 映像F：$G-\{0\}\to G-\{0\}$定义如上，为紧映像。

证 设A为$G-\{0\}$中的有界子集，为了证明F的紧性，我们需要指出$F(A)$在X中具有紧的闭包。由Ascoli定理只须证明$F(A)$为有界而且$\{\psi$：$(\psi, y_1)\in F(A)$对某个$y_1\}$为等度连续。由于ψ满足微分方程$\psi'(t)=y(t+z_1(\varphi)+r)+\varepsilon[\psi(t)-(\psi(t))^3/3]$，如果证明了存在一常数$M_1$使得$\max\{|x(t)|:z_1(\varphi)\leqslant t\leqslant z_1(\varphi)+r\}\leqslant M_1$且$\max\{|y(t)|: z_1(\varphi)\leqslant t\leqslant z_1(\varphi)+r\}\leqslant M_1$，其中$x$和$y$为（1）的对应于$(\varphi, y_0)\in A$的解。则等度连续性便可得到

如果M如引理1中所规定，则引理1相同的论证可知当 $0\leqslant t\leqslant z_1(\varphi)$时$x(t)<M$。假设对某一个$t_0\in(0,\ z_1(\varphi)]$,$y(t_0)=\left(-kr-\varepsilon-\frac{1}{r}\right)M$。由于$y'(t)\leqslant kx(t)$，$0\leqslant t\leqslant z_1(\varphi)+r$,故必有$y(t)\leqslant\left(-\varepsilon-\frac{1}{r}\right)M$，$t_0\leqslant t\leqslant t_0+r$。由此可知 $x'(t)\leqslant\left(-\varepsilon-\frac{1}{r}\right)M+\varepsilon x(t)\leqslant-\frac{M}{r}$，$t_0\leqslant t\leqslant t_0+r$，并且$x(t)\geqslant0$；又由于 $x(t_0)\leqslant M$，故有$t_0\leqslant z_1(\varphi)\leqslant t_0+r$。因为$y'(t)\geqslant-(1+k)M$，$0\leqslant t\leqslant z_1(\varphi)$，故有$y(t)\geqslant-\left(kr+\varepsilon+\frac{1}{r}\right)M-r(1+k)M$，$0\leqslant t\leqslant z_1(\varphi)$，当然，如果$y(t)>-\left(kr+\varepsilon+\frac{1}{r}\right)M$，$0\leqslant t\leqslant z_1(\varphi)$，则我们就有更好的估计式。在每一种情形，都存在正数N使$y(t)>-N$，$0\leqslant t\leqslant z_1(\varphi)$。

显然，由这些估计式可以得知当$z_1(\varphi)\leqslant t\leqslant z_1(\varphi)+r$时，$y(t)>-N-rM$。若$x(t)>-\sqrt{3(\varepsilon+kr)/\varepsilon}$，$z_1(\varphi)\leqslant t\leqslant z_1(\varphi)+r$，则证明结束，否则，有 $t_1\in[z_1(\varphi),\ z_1(\varphi)+r]$，使得$x(t_1)=-\sqrt{3(\varepsilon+kr)/\varepsilon}$，我们得到$x'(t)\geqslant-(N+rM)$。由此可知在任何情形下，当$z_1(\varphi)\leqslant t\leqslant z_1(\varphi)+r$时有$x(t)\geqslant-\sqrt{3(\varepsilon+kr)/\varepsilon}-r(N+rM)$。证毕。

引理6 存在正常数R，使得当$(\varphi,\ y_0)\in G-\{0\}$及$\|(\varphi,y_0)\|\geqslant R$时有$\|F(\varphi,\ y_0)\|\leqslant\|(\varphi,\ y_0)\|$。其中$\|(\varphi,y_0)\|=\max(\varphi(0),\ y_0)$。

证 给定常数$R>0$，设ξ为$R+kr\xi+\varepsilon\left(\xi-\frac{\xi^3}{3}\right)=0$的最大正解。如将$\xi$写为$\xi=\delta(R)R$，则显然有$\lim\limits_{R\to\infty}\delta(R)=0$。选择$R_1$使得当$R\geqslant R_1$时$\delta(R)<1$，如果$(\varphi,\ y_0)\in G$且$\|(\varphi,\ y_0)\|\geqslant R_1$，则有$\varphi(0)<y_0$，这是因为已假定$y_0+\varepsilon(\varphi(0)-(\varphi(0))^3/3)\geqslant0$之故。如果我们写$y_0=R\geqslant R_1$，则使用引理1的论证可证明$x(t)\leqslant\xi=\delta(R)R$，$0\leqslant t\leqslant z_1(\varphi)$。

定义$M=\max\{x(t):0\leqslant t\leqslant z_1(\varphi)\}$。使用引理5的论证可证明当$0\leqslant t\leqslant z_1(\varphi)$时，$y(t)\geqslant -cM$。这里$c=2kr+\varepsilon+\frac{1}{r}+r$。亦可证明$y(z_1(\varphi)+r)\geqslant -(c+r)M+krx(z_1(\varphi)+r)=N$ 及 $x(z_1(\varphi)+r)\geqslant\sqrt{3(\varepsilon+kr)/\varepsilon}-r(cM+rM)$。由此可得$\|F(\varphi,\ y_0)\|\leqslant KM$，其中$K$为独立于$R\geqslant R_1$的常数。若取$R_2$足够大使当$R\geqslant R_2$时$\delta(R)K<1$，则当$R\geqslant R_2$时，$\|F(\varphi,\ y_0)\|<R=\|(\varphi,\ y_0)\|$。证毕。

引理7 设$(\varphi,\ y_0)\in G-\{0\}$，$(x(t),\ y(t))$为方程(1)满足初值为$(\varphi,\ y_0)$的解。则存在一个与$(\varphi,\ y_0)$无关的常数$a$，使得$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}|x(t)|\geqslant a$。

证 用引理6的论证可证明$|x(t)|$和$|y(t)|$当$t\geqslant 0$时都有界。根据引理3，方程$\lambda^2-\varepsilon\lambda+e^{-r\lambda}-k=0$存在两个解$\lambda_1$和$\lambda_2$使得$R(\lambda_j)>0$和$-\frac{\pi}{r}<\mathrm{Im}(\lambda_j)<\frac{\pi}{r},j=1,2$。有三种可能性：1° $\mathrm{Im}(\lambda_1)>0$且$\lambda_2=\bar{\lambda}_1$；2° λ_1和λ_2为实根且$\lambda_1<\lambda_2$；3° λ_1和λ_2是相等实根。

我们的证明将根据各种情形来讨论，但不论什么情形，只要λ是上述的特征方程的根且$T\geqslant 0$，则由分部积分法可得到

$$\begin{aligned}&\int_T^\infty x'(t)\lambda e^{-\lambda t}dt+\int_T^\infty y'(t)e^{-\lambda t}dt\\&=\lambda^2\int_T^\infty x(t)e^{-\lambda t}dt-\lambda x(T)e^{-\lambda T}-y(T)e^{-\lambda T}\\&\quad+\lambda\int_T^\infty y(t)e^{-\lambda t}dt.\end{aligned}\tag{10}$$

另一方面，将方程(1)代入$x'(t)$和$y'(t)$，则有

$$\begin{aligned}&\int_T^\infty x'(t)\lambda e^{-\lambda t}dt+\int_T^\infty y'(t)e^{-\lambda t}dt\\&=\int_T^\infty(y(t)+\varepsilon x(t))\lambda e^{-\lambda t}dt-\frac{\varepsilon\lambda}{3}\int_T^\infty x^3(t)e^{-\lambda t}dt\\&\quad-\int_T^\infty x(t-r)e^{-\lambda t}dt+k\int_T^\infty x(t)e^{-\lambda t}dt.\end{aligned}\tag{11}$$

置(10)和(11)相等并使用$\int_T^\infty x(t-r)e^{-\lambda t}dt=e^{-r\lambda}\int_{T-r}^\infty x(t)e^{-\lambda t}$.

dt。这个关系，得到

$$-\lambda x(T)-y(T)+\int_{T-r}^{T}x(t)e^{-\lambda(t-T+r)}dt$$

$$=-\frac{\varepsilon\lambda}{3}\int_{T}^{\infty}x^{3}(t)e^{-\lambda(t-T)}dt. \tag{12}$$

情形1 当$\operatorname{Im}(\lambda)>0$时。设$\lambda=\mu+iv$使有$\mu>0$和$0<v<\frac{\pi}{r}$，则取(12)的虚部便得

$$-vx(T)-\int_{T-r}^{T}x(t)e^{-\mu(t-T+r)}\sin v(t-T+r)dt$$

$$=-\operatorname{Im}\left(\frac{\varepsilon\lambda}{3}\int_{T}^{\infty}x^{3}e^{-\lambda(t-T)}dt\right).$$

若z是x的零点，设$b=\sup\limits_{t\geq z}|x(t)|\geq 0$，又设$z_n\geq z$为$x$的零点使$\sup\limits_{z_n\leq t\leq z_{n+1}}|x(t)|=c\geq\frac{1}{2}b$，而$T\in(z_n, z_{n+1})$使$|x(\mathrm{T})|=c$。由于$x$在$[z_n, z_n+r]$上单调，故$T\geq z_n+r$。为了确定性我们假定$x(T)>0$，因此我们可以得到$\int_{T-r}^{T}x(t)e^{-\mu(t-T+r)}\sin v(t-T+r)dt>0$。从而有

$$|vx(T)|\leq\left|\frac{\varepsilon\lambda}{3}\int_{T}^{\infty}x^{3}(t)e^{-\lambda(t-T)}dt\right|. \tag{13}$$

用 $|x^{3}(t)|\leq b^{3}(t\geq T)$ 这事实来估计上式右边，得到

$$\frac{1}{2}vb\leq\frac{1}{3}\varepsilon|\lambda|b^{3}\frac{1}{\mu}. \tag{14}$$

易见$b>0$，故由 (14) 可知$b^{2}>a^{2}=\frac{3}{2}(\varepsilon|\lambda|)^{-1}\mu v$。从而引理在情形1之下得证。

情形2 当λ_1和λ_2为实根且$\lambda_1<\lambda_2$时。将λ_2和λ_1分别代入(12) 然后相减得到

$$-(\lambda_2-\lambda_1)x(T)+\int_{T-r}^{T}x(t)\left[e^{-\lambda_2(t-T+r)}-e^{-\lambda_1(t-T+r)}\right]dt$$

$$=-\frac{\varepsilon\lambda_2}{3}\int_{T}^{\infty}x^{3}(t)e^{-\lambda_2(t-T)}dt$$

$$+\frac{\varepsilon\lambda_1}{3}\int_{T}^{\infty}x^{3}(t)e^{-\lambda_1(t-T)}dt. \tag{15}$$

设z、T和b如情形1中所述，则

$$\frac{1}{2}(\lambda_2-\lambda_1)b\leqslant\frac{\varepsilon b^3}{3}+\frac{\varepsilon b^3}{3}. \tag{16}$$

和前面一样，可以推知$b^2>a^2=\dfrac{3}{2\varepsilon(\lambda_2-\lambda_1)}$。

情形3 当特征方程具有二重实根λ时。则λ亦满足方程$2\lambda-\varepsilon-re^{-r\lambda}=0$。若$\lambda_1>\lambda$，由(12)得

$$\begin{aligned}&-\lambda_1x(T)-y(T)+\int_{T-r}^{T}x(t)e^{-\lambda_1(t-T+r)}dt\\&+(\lambda_1^2-\varepsilon\lambda_1+e^{-r\lambda_1}-k)\int_T^{\infty}x(t)e^{-\lambda_1(t-T)}dt\\&=-\frac{\varepsilon\lambda_1}{3}\int_T^{\infty}x^3(t)e^{-\lambda_1(t-T)}dt.\end{aligned} \tag{17}$$

现将(17)减去(12)再除以$\lambda_1-\lambda$，然后让λ_1趋于λ，应用Lebesgue控制收敛定理便得到

$$\begin{aligned}&-x(T)-\int_{T-r}^{T}x(t)(t-T+r)e^{-\lambda(t-T+r)}dt\\=&-\frac{\varepsilon}{3}\int_T^{\infty}x^3(t)e^{-\lambda(t-T)}dt\\&+\frac{\varepsilon\lambda}{3}\int_T^{\infty}x^3(t)(t-T)e^{-\lambda(t-T)}dt.\end{aligned}$$

再用前面那些情形的讨论方法便可得证。

引理8 设$x(t)$和$y(t)$如引理7所述，z_n表示x的零点，$n=1,2,\cdots$。则存在一个与(φ,y_0)无关的正常数a^*，使得$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\max(|x(z_n+r)|,|y(z_n+r)|)\geqslant a^*$。

证 由引理7知存在一个正常数a使得$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}|x(t)|\geqslant a$。选$z_n$使$\max\{|x(t)|;z_n\leqslant t\leqslant z_{n+1}\}=\alpha\geqslant\dfrac{a}{2}$。设$T\in[z_n,z_{n+1}]$使$|x(T)|=\alpha$。我们知道$T\geqslant z_n+r$，为方便起见不妨设$x(T)>0$，选$T_1$，$T<T_1<z_{n+1}$，使得$x(T_1)=\min\left(\dfrac{\alpha}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\doteq\beta$。由前面的工作知$x'(T_1)=y(T_1)+\varepsilon x(T_1)[1-x^2(T_1)/3]\leqslant0$。于是可得$y(T_1)$

$\leqslant -\frac{1}{2}\varepsilon\beta$。由于$y$在$[T_1, z_{n+1}+r]$递减，可见引理成立。证毕。

定理 2 如果$\varepsilon>0$，$r>0$，$0\leqslant k<1$，则方程(1)具有非零周期解$(x(t), y(t))$，其周期大于$2r$。

证 设G和F如引理5，由引理6知存在一个常数R_1使得当$\|(\varphi, y_0)\|\geqslant R_1$时有$\|F(\varphi, y_0)\|\leqslant\|(\varphi, y_0)\|$。现定义$R_2=\sup\{\|F(\varphi, y_0)\|: \|(\varphi, y_0)\|\leqslant R_1\}$，$G_R=\{(\varphi, y_0)\in G: \|(\varphi, y_0)\|\leqslant R\}$。则当$R\geqslant\max(R_1, R_2)$时有$F(G_R-\{0\})\subset G_R-\{0\}$。由引理8知0是$F$的一个喷射点而由引理5知$F$是紧的。由定理1知$F$在$G$上有非零的不动点，而且对0的某一个适当的开邻域$U$，有$i_G(F, G-\bar{U})=1$。因此，这个不动点对应方程(1)的一个非零周期解，周期大于$2r$。证毕。

对于$k<0$的情形，方程(1)的周期解有如下的结果，在这里只述而不证。有兴趣的读者参考[168]。

定理 3 若$k<0$，$-kr<\varepsilon$，$-\frac{1}{2}kr^2\leqslant 1$，则方程(1)有周期大于$2r$的非零周期解。

此外，文[168]还考察了如下的方程

$$\begin{cases} x'(t)=-ax(t-1-|x(t)|)(1-x^2(t)), \\ x(t)=\varphi(t), \quad -2\leqslant t\leqslant 0, \quad |\varphi(0)|<1. \end{cases} \tag{18}$$

其$\varphi(t)$为给定的函数，它属于将$[-2, 0]$映射到R的Lipschitz函数所成的Banach空间，其范数为

$$\|\varphi\|=\max\left(\max_{-2\leqslant t\leqslant 0}|\varphi(t)|, \max_{-2\leqslant u<v\leqslant 0}\frac{|\varphi(v)-\varphi(u)|}{v-u}\right),$$

及如下的中立型方程

$$\begin{cases} x'(t)=\left[-ax(t-1)+\dfrac{k}{m+1}\dfrac{d}{dt}(x(t-1))^{m+1}\right][1-x^2(t)], \\ x(t)=\varphi(t), \quad -1\leqslant t\leqslant 0. \end{cases} \tag{19}$$

的周期解。得到了如下的结果：

定理 4 如果$a>\frac{\pi}{2}$，则方程（18）有非零的周期解，其周期大于2。

定理 5 如果$a>\frac{\pi}{2}, m>1, |k|\leqslant\frac{m+1}{4}\left(1+\frac{2}{m-1}\right)^{(m-1)/2}$$\left(\text{如} m=1 \text{时} |k|\leqslant\frac{1}{2}\right)$则方程（19）有非零的连续可微的周期解。

§5 存在周期解的李雅普诺夫第二方法

李雅普诺夫第二方法除了被广泛地用来研究解的有界性稳定性之外，也被用来研究解的其他性质，其中包括周期解的存在性，文[133]、[173]、[174]等曾将李雅普诺夫第二方法应用到泛函微分方程的周期解的存在性之中，下面介绍的是[133]中的结果。

引理1（Browder不动点定理）设S和S_1是Banach空间X的开凸子集，S_0是X的闭凸子集，$S_0\subset S_1\subset S$，f：$S\to X$为紧映像。如果对正整数m，f^m在S_1上有定义$\bigcup\limits_{0\leqslant j\leqslant m} f^j(S_0)\subset S_1$而$f^m(S_1)\subset S_0$。则$f$在$S_0$内有不动点。

现考虑有界滞量的泛函微分方程

$$\dot{x}(t)=F(t,x_t)。\tag{1}$$

其中F：$\mathbf{R}\times C\to\mathbf{R}^n$，连续，$C=C([-r,0],\mathbf{R}^n)$。

定理 1 假设$F(t,\phi)$关于t是周期的，周期为ω，$\omega>r$。对于任何的$\alpha>0$，存在$L(\alpha)>0$，使得当$\phi\in C_\alpha$（$C_\alpha=\{\phi\in C$：$\|\phi\|\leqslant\alpha\}$）时，$|F(t,\phi)|\leqslant L(\alpha)$。此外，假设存在李雅普诺夫泛函$V(t,\phi)$，它定义在$\mathbf{R}\times C^H$上（$C^H=\{\phi\in C$：$|\phi(0)|\geqslant H\}$），并且满足下列条件：

(i) 存在连续递增函数$a(s)$和$b(s)$，当$s\geqslant H$时$a(s)>0$，$b(s)>0$，又当$s\to\infty$时$a(s)\to\infty$，使得

$$a(|\phi(0)|)\leqslant V(t,\phi)\leqslant b(\|\phi\|)。$$

(ii) 存在连续函数$\omega(s)$，当$s\geqslant H$时$\omega(s)>0$，使得

$$\dot{V}_{(1)}(t,\phi)\leqslant -\omega(|\phi(0)|).$$

(iii) 设正数H_1、α、β、γ、γ^*满足下列不等式

$$b(H_1)\leqslant a(\alpha),\quad b(\alpha)\leqslant a(\beta),\quad b(\beta)\leqslant a(\gamma),\quad b(\gamma)\leqslant a(\gamma^*).$$

其中$H_1>H$使得

$$rL(\gamma^*)<H_1-H. \tag{2}$$

则方程(1)存在周期为ω的周期解。

证 设$S=\{\phi\in C:\ \|\phi\|<\gamma\}$。我们首先要证明，如果$\varphi\in C_\gamma$，则对一切$t\geqslant t_0$，$\|x_t(t_0,\varphi)\|<\gamma^*$。若不然，则存在某个$t_1$使得$\|x_{t_1}(t_0,\varphi)\|=\gamma^*$那么存在$t_2,t_3,t_0\leqslant t_0<t_2\leqslant t_1$，使得$\|x_{t_2}(t_0,\varphi)\|=\gamma$，$|x(t_0,\varphi)(t_3)|=\gamma^*$且对$t\in(t_2,t_3)$成立$\gamma<\|x_t(t_0,\varphi)\|<\gamma^*$。假设在某一个$t\in[t_2,t_3]$，有$|x(t_0,\varphi)(t)|<H$。那么存在$t_4,t_5,t_2\leqslant t_4<t_5<t_3$，使得$|x(t_0,\varphi)(t_4)|=H$，$|x(t_0,\varphi)(t_5)|=H_1$，而且对$t\in(t_4,t_5)$有$H<|x(t_0,\varphi)(t)|<H_1$。在区间$t_4\leqslant t\leqslant t_5$上，有$\|x_t(t_0,\varphi)\|<\gamma^*$，因此，根据条件知$\|F(t,x_t(t_0,\varphi))\|\leqslant L(\gamma^*)$，即$|\dot{x}(t_0,\varphi)(t)|\leqslant L(\gamma^*)$，于是$|x(t_0,\varphi)(t_5)|\leqslant H+L(\gamma^*)(t_5-t_4)$。如果$t_5-t_4\leqslant r$，则$|x(t_0,\varphi)(t_5)|\leqslant H+rL(\gamma^*)<H_1$，因此$t_5-t_4$必须大于$r$。于是$\|x_{t_5}(t_0,\varphi)\|=H_1$。但是因为$t_2<t_5<t_3$，所以$\|x_{t_5}(t_0,\varphi)\|>r$。因为$\gamma\geqslant H_1$，我们得到矛盾。于是对所有$t\in[t_2,t_3]$有$|x(t_0,\varphi)(t)|\geqslant H$。由条件(i)和(ii)可得

$$\begin{aligned}a(\gamma^*)=a(|x(t_0,\varphi)(t_3)|)&\leqslant V(t_3,x_{t_3}(t_0,\varphi))\\&<V(t_2,x_{t_2}(t_0,\varphi))\leqslant b(\|x_{t_2}(t_0,\varphi)\|)=b(\gamma).\end{aligned}$$

它与$b(\gamma)\leqslant a(\gamma^*)$矛盾。因此可见当$\varphi\in C_\gamma$时，对一切$t\geqslant t_0$有$\|x_t(t_0,\varphi)\|<\gamma^*$。

同样的论证表明$\varphi\in C_{H_1}$时，对一切$t\geqslant t_0$有$\|x_t(t_0,\varphi)\|<\alpha$，当$\varphi\in C_\alpha$时，对一切的$t\geqslant t_0$有$\|x_t(t_0,\varphi)\|<\beta$，当$\varphi\in C_\beta$时，对一切的$t\geqslant t_0$有$\|x_t(t_0,\varphi)\|<\gamma$。

考虑$\varphi\in C_\beta$时的解$x(0,\varphi)$，则当$t\geqslant 0$时，有$\|x_t(0,\varphi)\|<\gamma$。假设对所有的$t\geqslant r$成立$|x(0,\varphi)(t)|>H$。则必存在一个常数$k>0$使得

$$\dot V_{(1)}(t,x_t(0,\varphi))\leqslant -k,\quad t\geqslant r. \tag{3}$$

这是因为$H<|x(0,\varphi)(t)|<\gamma$对一切$t\geqslant r$成立。由(3)得到

$$V(t,x_t(0,\varphi))\leqslant V(r,x_r(0,\varphi))-k(t-r)\leqslant b(\gamma)-k(t-r).$$

因此，如果$t>\frac{1}{k}[b(\gamma)+kr]$，我们有$V(t,\ x_t(0,\ \varphi))<0$，这与$V\geqslant 0$矛盾。因此必存在某个$t_1$，它满足$r\leqslant t_1\leqslant\frac{1}{k}[b(\gamma)+kr]$，使$|x(0,\varphi)(t_1)|=H$. 由(2)得出对$t\in[t_1-r,t_1]$有$|x(0,\varphi)(t)|\leqslant H+rL(\gamma^*)<H_1$，因此$\|x_{t_1}(0,\varphi)\|<H_1$。这意味着对一切$t\geqslant t_1$有$\|x_t(0,\ \varphi)\|<\alpha$。

设f是满足$f(\varphi)=x_\omega(0,\varphi)$的映像。集$S$显然是$C$中的开凸子集。因为$r\leqslant\omega$且当$\varphi\in S$时有$\|x_\omega(0,\varphi)\|<\gamma^*$及对$t\in[0,\omega]$成立$|\dot x(0,\varphi)(t)|\leqslant L(\gamma^*)$，所以$S$被映入$C$的一个紧子集。即$f$是一个紧映像。令$S_1=\{\phi\in C;\ \|\phi\|<\beta\}$，$S_0=\{\phi\in C;\ \|\phi\|\leqslant\alpha\}$，那么$S_1$是开且凸的集，而$S_0$是闭且凸的集。正如上述所看到的那样，对$\varphi\in S_1$及$t\geqslant t_1$时，有$\|x_t(0,\varphi)\|<\alpha$，因此存在一个整数$m>0$，使得当$\varphi\in S_1$时$\|x_{m\omega}(0,\varphi)\|<\alpha$或$x_{m\omega}(0,\varphi)\in S_0$。

根据引理1，知f在S_0上有一个不动点，即$x_\omega(0,\varphi)=\varphi$。因为$F(t,\phi)$关于$t$是$\omega$周期的，故方程(1)有一个周期为$\omega$的周期解。证毕。

作为例子，我们考虑方程组

$$\begin{cases}\dot x(t)=y(t),\\ \dot y(t)=-\Phi(t,y(t))-f(x(t))+p(t)\\ \qquad\qquad +\int_{-r}^{0}g(x(t+\theta))y(t+\theta)d\theta.\end{cases} \tag{4}$$

为了方便，引入记号：

$C_0(x)=\{f(x);\ f(x)$ 满足局部的Lipschitz条件$\}$，

$\bar C_0(x)=\{f(t,x);$ 对任何紧集$E\subset R^n$，存在常数$L(E)$，使得对于$x\in E$，$x'\in E$时，有$|f(t,\ x)-f(t,x')|\leqslant L(E)|x-x'|\}$

定理 2　假定满足下列条件：

(i) 在 $0\leqslant t<\infty$, $|y|<\infty$ 上 $\Phi(t, y)$ 关于t, y 连续, $\Phi(t, y)\in \bar{C}_t(y)$, $\Phi(t, y)$ 关于t是周期的, 周期为 ω, 而且对某两个正数a, A有

$$\frac{\Phi(t,y)}{y}>a \quad 对|y|\geqslant A。\tag{5}$$

(ii) $f(x)$ 在$|x|<\infty$上连续, $f(x)\in C_0(x)$ 且当$|x|\to\infty$时 $f(x)\mathrm{sgn}x\to\infty$

(iii) $p(t)$ 关于t是周期的, 周期为ω, 且$|p(t)|\leqslant k$, k为某正数。

(iv) $g(x)$在$|x|<\infty$ 上连续, $g(x)\in C_0(x)$ 及$|g(x)|\leqslant L$, L为某正数。

则存在一个$r_0>0$, 使得对于 $0\leqslant r\leqslant r_0$ 时方程组(4) 存在周期为ω的周期解。

证 如果$r=0$, 方程组 (4) 是一个常微分方程组, 这个结果是熟悉的。因此我们假定$r>0$。首先考虑一个连续泛函$U(\varphi,\Psi)$, 其定义为

$$U(\varphi,\Psi)=2F(\varphi(0))+\Psi^2(0)$$

$$+\frac{a}{2r}\int_{-r}^0\int_s^0\Psi^2(\theta)d\theta ds+L\int_{-r}^0\int_s^0|\Psi(\theta)|d\theta ds,$$

其中$F(x)=\int_0^x f(u)du$且$0\leqslant r\leqslant r_0<\frac{a}{2L}$。

因此有 $\dot{U}_{(4)}(x_t,y_t)\leqslant -2y\Phi(t,y)+2k|y|$

$$+2\int_{-r}^0 L|y(t)y(t+\theta)|d\theta$$

$$+\frac{a}{2r}\int_{-r}^0[y^2(t)-y^2(t+\theta)]d\theta+Lr|y|$$

$$-L\int_{-r}^0|y(t+\theta)|d\theta。$$

如果$|y|\geqslant M=\max\left(A, \frac{4k}{a}+1\right)$, 则

$$\dot{U}_{(4)}(x_t, y_t) \leqslant -\frac{1}{2}ay^2 - \int_{-r}^{0}\Big[\frac{a}{2r}y^2(t)$$

$$-2L|y(t)y(t+\theta)| + \frac{a}{2r}y^2(t+\theta)\Big]d\theta$$

$$-L\int_{-r}^{0}|y(t+\theta)|d\theta,$$

因为$r<\frac{a}{2L}$，所以由上式得出$\dot{U}_{(4)}(x_t, y_t) \leqslant -\frac{1}{2}ay^2(t)$。因此，如果$|\Psi(0)|\geqslant M$，则

$$\dot{U}_{(4)}(\varphi, \Psi) \leqslant -\frac{1}{2}a\Psi^2(0). \tag{6}$$

其次我们考虑$|\Psi(0)|\leqslant M$的情形。设B是这样的常数，它使得如果$|y|\leqslant M$，那么$2|y||\Phi(t,y)|+|\Phi(t,y)|\leqslant B$。由(ii)可知存在$d>0$，使得$\frac{4}{a}\leqslant d$，而且

$$B+2Mk+\frac{aM}{2}+aM^2+k-f(x)\leqslant -1, \quad 对x\geqslant d;$$

$$B+2Mk+\frac{aM}{2}+aM^2+k+f(x)\leqslant -1 \quad 对x\leqslant -d.$$

在$\varphi(0)\geqslant d$时，如果我们考虑$V(\varphi,\Psi)=U(\varphi,\Psi)+\Psi(0)$，则

$$\begin{aligned}\dot{V}_{(4)}(x_t,y_t) &= \dot{U}_{(1)}(x_t,y_t)-\Phi(t,y)-f(x)+p(t)\\ &\quad+\int_{-r}^{0}g(x(t+\theta))y(t+\theta)d\theta\\ &\leqslant -2y\Phi(t,y)+2Mk+LrM-\Phi(t,y)+k\\ &\quad-f(x)+ay^2-\int_{-r}^{0}\Big[\frac{a}{2r}y^2(t)\\ &\quad-2L|y(t)y(t+\theta)|+\frac{a}{2r}y^2(t+\theta)\Big]d\theta\leqslant -1.\end{aligned}$$

如果对于$\varphi(0)\leqslant -d$，我们置$V(\varphi,\psi)=W(\varphi,\psi)-\psi(0)$，同样的论证给出$\dot{V}_{(4)}(\varphi,\psi)\leqslant -1$

在$|\varphi(0)|\leqslant d$，$\psi(0)\geqslant M$时，如果我们置$V(\varphi,\psi)=U(\varphi,\psi)+\frac{M}{d}\varphi(0)$，则

$$\dot{V}_{(4)}(x_t, y_t) \leqslant -\frac{1}{2}ay^2 + \frac{M}{d}y \leqslant -\frac{1}{4}ay^2.$$

在$|\varphi(0)| \leqslant d$, $\psi(0) \leqslant -M$时，取$V(\varphi,\psi) = U(\varphi, \psi) - \dfrac{M}{d}\varphi(0)$，则可推出$\dot{V}_{(4)}(x_t, y_t) \leqslant -\dfrac{1}{4}ay^2$。

如果$\varphi(0) \geqslant d$, $\psi(0) \geqslant M$或$\varphi(0) \leqslant -d$, $\psi(0) \leqslant -M$，置$V(\varphi, \psi) = U(\varphi,\psi) + M$。又如果$\varphi(0) \geqslant d$, $\psi(0) \leqslant -M$ 或 $\varphi(0) \leqslant -d$, $\psi(0) \geqslant M$，置$V(\varphi, \psi) = U(\varphi, \psi) - M$。这样，我们得到一个连续的李雅普诺夫泛函$V(\varphi,\psi)$ 它满足定理 2 的条件 (ii)。

因为我们有

$$2F(\varphi(0)) + \psi^2(0) - M \leqslant V(\varphi,\psi)$$

$$\leqslant 2F(\varphi(0)) + \psi^2(0) + M + \frac{a^2}{8L}(h^2 + h)$$

其中h是向量(φ,ψ)的范数，$V(\varphi, \psi)$满足条件(i)，如果必要，用加一个正整的办法使$V>0$，容易看出，如果r_0充分小，那么满足条件 (2)。因此，由定理1，如果r是小的，则方程组 (4) 有一个周期为ω的周期解。证毕。

§6 无穷延滞FDE的周期解的存在性

关于无穷延滞泛函微分方程的周期解的存在性，近几年来已经开始有人研究。在这一节中我们引自文[177]的结果。

对$\mathbf{R}^n$空间中的任一元素x，定义$|x| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$，其中$x_i$为$x$的第$i$个分量。对于函数$x$: $[a, b] \to \mathbf{R}^n$，定义$|x|^{[a,b]} = \sup\{|x(s)|: a \leqslant s \leqslant b\}$，对于连续有界函数$\varphi$: $\mathbf{R}^- \to \mathbf{R}^n$，定义$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(s)|: -\infty < s \leqslant 0\}$。

以$C_{-\infty}$表示连续函数φ: $\mathbf{R}^- \to \mathbf{R}^n$的全体，以$BC_{-\infty}$表示 $C_{-\infty}$中有界连续函数的全体。$C_{-\infty}$与$BC_{-\infty}$均是线性空间。又以$C_{-\infty}(D)$表示$C_{-\infty}$的一个子集，它的函数值均属于$D \subset \mathbf{R}^n$。

若x：$(-\infty, A]\to \mathbf{R}^n$为连续，对于 $t\in(-\infty,A]$，定义$x_t\in C_{-\infty}$如下：

$$x_t(\theta)=x(t+\theta),\qquad -\infty<\theta\leqslant 0.$$

对于ϕ，$\psi\in C_{-\infty}$，定义

$$\rho(\phi,\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\frac{\|\phi-\psi\|^{[-k,0]}}{1+\|\phi-\psi\|^{[-k,0]}}.$$

易证ρ满足距离公理，从而（$C_{-\infty},\rho$）与（$BC_{-\infty},\rho$）为度量空间。

我们不难证明下面的两个引理成立：

引理 1 （$BC_{-\infty},\rho$）是局部凸的线性拓扑空间。

引理 2 设$\{\varphi_n\}$为$C_{-\infty}$中的叙列，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(\varphi_n,\varphi_0)=0$的充要条件是：对任意的正整数$k$，$\lim\limits_{n\to\infty}\|\varphi_n-\varphi_0\|^{[-k,0]}=0$。

现考虑无穷延滞的泛函微分方程

$$\dot{x}(t)=f(t,\ x(s),-\infty<s\leqslant t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta. \tag{1}$$

其中x，$f\in\mathbf{R}^n$。方程（1）也可以写成如下的形式：

$$\dot{x}(t)=f(t,\ x_t). \tag{2}$$

我们总假定方程（1）满足解的存在唯一性。

在以后的定理中，我们将用到泛函$V(t,\ \phi)$或函数$V(t,x)$，前者将$\mathbf{R}\times C_{-\infty}$映入$\mathbf{R}^+$，后者将$\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$映入$\mathbf{R}^+$。我们称$V(t,\phi)$（或$V(t,\ x)$）为李雅普诺夫泛函（或李雅普诺夫函数）。如果满足下列的两个条件：

(i) 对任一$\phi\in C_{-\infty}$，$V(t,\phi)$关于$t\in[\alpha,\ \beta]$为连续，（或对任一$x\in\mathbf{R}^n$，$V(t,x)$关于$t\in[\alpha,\ \beta]$为连续）；

(ii) $V(t,\phi)$（或$V(t,x)$）关于ϕ(或x)满足局部的 Lipschitz 条件。即指对任意的$\gamma\in[\alpha,\beta]$及任意的紧集$F\subset C_{-\infty}$（或$\subset\mathbf{R}^n$），总存在$L_{\gamma,F}\geqslant 0$使得对任意的$t\in[\alpha,\gamma]$及任意的ϕ_1，$\phi_2\in F$（或任意的$x_1,x_2\in F$），都有$|V(t,\phi_1)-V(t,\phi_2)|\leqslant L_{\gamma,F}\|\phi_1-\phi_2\|$（$|V(t,x_1)-V(t,\ x_2)|\leqslant L_{\gamma,F}|x_1-x_2|$）。

定义 1 泛函$V(t,\ \phi)$（或函数$V(t,\ x)$）称为是凸的，如果对于任意的$B\geqslant 0$及任意的$t\in[\alpha,\beta]$，集合$\{\phi\in C_{-\infty}:V(t,\phi)\leqslant B\}$

（或集合$\{x\in \mathbf{R}^n: V(t,x)\leqslant B\}$）是凸的。

定理 1 如果满足下列条件：

(i) 存在 $T>0$，使得对任何的 $t\in[\alpha,\beta]$ 及 $\phi\in BC_{-\infty}$，有 $f(t+T,\phi)=f(t,\phi)$；

(ii) 存在Liapunov凸泛函 V：$[\alpha,\beta]\times BC_{-\infty}\to \mathbf{R}^+$ 及楔函数 $W(r)$，使得

$$W(|\phi(0)|)\leqslant V(t,\phi),$$

且对任意的$H>0$，V对于满足$\|\phi\|\leqslant H$的ϕ按ρ连续；

(iii) 存在可微函数u：$[\alpha,\beta]\to R^+$及函数g：$[\alpha,\beta]\times R^+\to \mathbf{R}$，$g(t,V)$关于$V$满足局部的Lipschitz条件，当$t_0\in[\alpha,\beta]$时，有

$$u(t_0+T)\leqslant u(t_0),\quad V(t_0,0)\leqslant u(t_0),$$

当 $t\in[t_0,t_0+T]$ 时有$\dot{u}(t)\geqslant g(t,u(t))$；

(iv) 沿方程 (1)的任何解x，$V(t,x_t)$ 对t连续，当$V(t,x_t)\geqslant u(t)$ 时有

$$\dot{V}_{(1)}(t,x_t)\leqslant g(t,V(t,x_t))；$$

(v) 对于满足 $W(\|\phi\|)\leqslant u_0=\max\limits_{t_0\leqslant t\leqslant t_0+T} u(t)$的任何$\phi\in C_{-\infty}$，有$V(t_0,\phi)\leqslant V(t_0+T,\phi)$；

(vi) 对任意$H>0$，方程(1)的解按ρ连续依赖于满足$\|\varphi\|\leqslant H$的初始函数φ。

则方程 (1)存在以T为周期的解。

证 考虑集合

$$S=\{\varphi\in C_{-\infty}:\ V(t_0,\varphi)\leqslant u(t_0),\ |\varphi(s_1)-\varphi(s_2)|\leqslant M|s_1-s_2|,\ s_1,\ s_2\in \mathbf{R}^-,\ W(\|\varphi\|)\leqslant u_0\},$$

此处 $M=\sup\{|f(t,\ \phi)|:\ t_0\leqslant t\leqslant t_0+T,\ W(\|\phi\|)\leqslant u_0\}$。
由于$W(0)\leqslant V(t_0,0)\leqslant u(t_0)$，$\varphi\equiv 0\in S$，故$S$非空。

我们将在S上应用Schauder—Тихонов不动点定理。为此，首先指出，由V的凸性及$W(r)$ 为楔函数，可证S为 $C_{-\infty}$中的凸集。下面来证明S为 $(C_{-\infty},\ \rho)$ 中的紧集，设$\{\varphi_n\}$为S中的叙列，要证明它存在子叙列$\{\varphi_{n_k}\}$，当$n_k\to\infty$时，φ_{n_k}按ρ趋近于某个 $\varphi_0\in S$。

记$I_k=[-k,0]$，$k=1,2,\cdots\cdots$，在I_1上，由 S 的定义，$\{\varphi_n\}$ 一致有界且同等连续。故根据 Ascoli—Arzela 定理知 $\{\varphi_n\}$ 存在子列 $\{\varphi_n^{(1)}\}$在I_1上一致收敛于某连续函数 $\varphi_0^{(1)}$。在I_2上，同理可知 $\{\varphi_n^{(1)}\}$也存在子列$\{\varphi_n^{(2)}\}$一致收敛于 $\varphi_0^{(2)}$，且当 $s\in I_1$ 时有 $\varphi_0^{(2)}(s)=\varphi_0^{(1)}(s)$。重复这个方法，并取 $\{\varphi_n^{(n)}\}$，它在I_k ($k=1,2,\cdots$) 上一致收敛于连续函数φ_0，φ_0满足

$$\varphi_0(s)\equiv\varphi_0^{(k)}(s),\quad s\in I_k,\quad k=1,2,\cdots.$$

由引理 2 可知$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(\varphi_n^{(n)},\ \varphi_0)=0$。

下面来验证$\varphi_0\in S$。首先，由于V对φ按ρ连续，故由 $V(t_0,\varphi_n^{(n)})\leqslant u(t_0)$ 可得$V(t_0,\varphi_0)\leqslant u(t_0)$，对任意正整数$k$以及任意$s_1,s_2\in I_k$，有

$$|\varphi_n^{(n)}(s_1)-\varphi_n^{(n)}(s_2)|\leqslant M|s_1-s_2|.$$

由引理 2 可知

$$|\varphi_0(s_1)-\varphi_0(s_2)|\leqslant M|s_1-s_2|.$$

又由于对任意k 有 $W(\|\varphi_n^{(n)}\|^{[-k,0]})\leqslant W(\|\varphi_n^{(n)}\|)\leqslant u_0$，由引理 2，有 $W(\|\varphi_0\|^{[-k,0]})\leqslant u_0$，于是 $W(\|\varphi_0\|)\leqslant u_0$，$\varphi_0\in S$。$S$ 为 $(C_{-\infty},\ \rho)$ 中的紧集。

在S中定义映射$P(\varphi)=\hat{x}_{t_0+T}(t_0,\varphi)$，$\varphi\in S$，由条件 (vi) 知 $P(\varphi)$ 连续。下面证明$P(\varphi)\in S$。记$V(t)=V(t,\ \hat{x}_t(t_0,\varphi))$，$t\geqslant t_0$。由 (iv) 知$V(t)$ 连续。由条件 (iii)，(iv) 及微分不等式，有$V(t)\leqslant u(t)$，当$t\in[t_0,t_0+T]$。再由条件 (ii) 知，$x(t,t_0,\varphi)$ 在$[t_0,t_0+T]$上存在。由于

$$W(|x(t,t_0,\varphi)|)\leqslant V(t,\hat{x}_t(t_0,\varphi))\leqslant u(t)\leqslant u_0,$$
$$t\in[t_0,t_0+T]$$

以及$W(\|\varphi\|)\leqslant u_0$，故 $W(\|\hat{x}_{t_0+T}\|)\leqslant u_0$。由 (v) 及 (iii)，有

$$\begin{aligned}V(t_0,\ \hat{x}_{t_0+T}(t_0,\ \varphi))&\leqslant V(t_0+T,\ \hat{x}_{t_0+T}(t_0,\ \varphi))\\&=V(t_0+T)\leqslant u(t_0+T)\\&\leqslant u(t_0)\leqslant u_0\end{aligned}$$

另外，有$|\hat{x}_{t_0+T}(s_1)-\hat{x}_{t_0+T}(s_2)|\leqslant M|s_1-s_2|$，$s_1$，$s_2\in\mathbf{R}^-$。于是$P(\varphi)\in S$。从而$P$是由$S$到$S$自身的映射。

由Schauder—Тихонов定理，P在S内有不动点φ^*。即 $P(\varphi^*)=\varphi^*$。也就是说$\hat{x}_{t_0+T}(t_0, \varphi^*)=\hat{x}_{t_1}(t_1, \varphi^*)$。由条件(i)知$x(t+T, t_0, \varphi^*)$也是方程(1)的一个解。由解的唯一性知，$x(t+T, t_0, \varphi^*)=x(t, t_0, \hat{x}_{t_0+T}(t_0, \varphi^*))=x(t, t_0, \varphi^*)$，$t\geqslant t_0$，故$x(t, t_0, \varphi^*)$是方程(1)的$T$周期解。证毕。

引理3[226] 如果对任意的$\varepsilon>0$及$J>0$，存在$\delta>0$，$D>0$，使得对于φ_1，$\varphi_2\in C_{-\infty}$，当$\|\varphi_1-\varphi_2\|^{[-D,0]}<\delta$时，就有$|x(t,0,\varphi_1)-x(t, 0, \varphi_2)|<\varepsilon$，$t\in[0, J]$。则方程(1)的解按$\rho$连续依赖于$\varphi$。

下面考虑纯量微分积分方程

$$\dot{x}(t)=a(t)x(t)+\int_{-\infty}^{t}e(t, s)x(s)ds+f(t). \qquad (3)$$

其中$a(t)$，$f(t)$，$e(t, s)$均为连续函数。

记

$$m(t, k)=a(t)+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t}|e(t, s)|ds$$

$$+k\int_{-t}^{\infty}|e(u, t)|du.$$

其中k为待定正数，$t>-\infty$，假设其中的积分均存在。

定理2 如果$a(t)$，$f(t)$以T为周期，$e(t, s)=e(t+T, s+T)$，$|a(t)|\leqslant M$，且满足下列条件：

(i) 方程(3)具有“衰退记忆”，即对于任意的$\varepsilon_1>0$，存在$L>0$，使对于任意的$t_1>-\infty$，$t-t_1\geqslant L$，有

$$\int_{-\infty}^{t_1}|e(t, s)|ds<\varepsilon_1.$$

(ii) 对于任意的$\varepsilon>0$，存在$N>0$，使得对任意$t>-\infty$，有

$$\int_{-\infty}^{t-N}\int_{t}^{\infty}|e(u, s)|duds<\varepsilon.$$

(iii)存在$k>0$，使得

$$k\int_{t}^{\infty}|e(u, s)|du\leqslant|e(t, s)|.$$

(iV)存在 $K>\frac{1}{2}$，使得当 $t>-\infty$ 时，

$$2m(t,\ K)-\frac{1-2K}{2K}\cdot k\leqslant 0$$

则方程(3)存在以T为周期的解。

证 显然满足定理1的条件(i)。下面证明定理1的条件(vi)也成立。由引理3，只须证明对于任意的$\varepsilon>0$及$J>0$，存在$\delta>0$，$D>0$，使得对任意的$H>0$，当$\|\varphi_1\|$，$\|\varphi_2\|\leqslant H$而$\|\varphi_1-\varphi_2\|^{[-D,0]}<\delta$时，有$|x(t,\ 0,\ \varphi_1)-x(t,\ 0,\ \varphi_2)|<\varepsilon$，$0\leqslant t\leqslant J$。

令$x_i(t)=x(t,\ 0,\ \varphi_i)$，$i=1,\ 2$，$0\leqslant t\leqslant J$。由条件$(i)$，在$0\leqslant t\leqslant J$上，有

$$\begin{aligned}&|x_1(t)-x_2(t)|\\ \leqslant&|\varphi_1(0)-\varphi_2(0)|+M\int_0^t|x_1(s)-x_2(s)|ds\\ &+2HJ\varepsilon_1+\int_{-L}^0\int_0^t|e(u,\ s)||x_1(s)-x_2(s)|duds\\ &+\int_0^t\int_s^t|e(u,\ s)||x_1(s)-x_2(s)|duds\end{aligned}$$

当$\rho(\varphi_1,\ \varphi_2)<\delta$时，存在$a>0$，使$\|\varphi_1-\varphi_2\|^{[-L,0]}\leqslant a\delta$。又由条件(iii)，(iv)，存在$P>0$，$Q>0$，使对于$-\infty<s<t$，有

$$0\leqslant\int_{-\infty}^t\int_t^\infty|e(u,\ s)|duds\leqslant P,$$

$$0\leqslant\int_s^t|e(u,\ s)|du\leqslant Q.$$

于是
$$\begin{aligned}|x_1(t)-x_2(t)|\leqslant&(a\delta+2HJ\varepsilon_1+aP\delta)\\ &+(M+Q)\int_0^t|x_1(s)-x_2(s)|ds,\quad 当0\leqslant t\leqslant J\end{aligned}$$

即定理1的条件(Vi)成立。

下面验证定理1的条件(ii)也成立。令

$$V(t,\ \varphi)=\frac{1}{2}\varphi^2(0)+K\int_{-\infty}^0\int_t^\infty|e(u,\ t+\theta)|\varphi^2(\theta)dud\theta$$

则有

$$V(t,\ \varphi)\geqslant\frac{1}{2}\varphi^2(0)\overset{\text{def}}{=\!=}W(|\varphi(0)|)。$$

至于$V(t,\ \varphi)$的凸性，可由

$$[(1-\lambda)\varphi+\lambda\psi]^2\leqslant(1-\lambda)\varphi^2+\lambda\psi^2,\quad 0<\lambda<1,$$

证明。

尚须证明V对于φ按ρ连续，由条件(ii)，对任意的$\varepsilon>0$,存在正整数N，使得

$$\int_{-\infty}^{t-N}\int_t^{\infty}|e(u,s)|duds=\int_{-\infty}^{-N}\int_t^{\infty}|e(u,\ t+\theta)|dud\theta<\varepsilon$$

对于$\varphi_i\in C_{-\infty}$，$\|\varphi_i\|\leqslant H$，$i=1,\ 2$，可证得

$$|V(t,\ \varphi_1)-V(t,\ \varphi_2)|\leqslant 2K\varepsilon H\|\varphi_1-\varphi_2\|^{[-\infty,-N]}$$

$$+\left\{H+2KH\int_{-N}^{0}\int_t^{\infty}|e(u,\ t+\theta)|dud\theta\right\}\|\varphi_1-\varphi_2\|^{[-N,0]}$$

当$\rho(\varphi_1,\ \varphi_2)$充分小时，$\|\varphi_1-\varphi_2\|^{[-N,0]}$将任意小，即知$V(t,\ \varphi)$对满足$\|\varphi\|\leqslant H$的$\varphi$按$\rho$连续，故定理2的(ii)成立。

再验证定理1的(iii)—(v)成立，为便于计算，将$V(t,\ \varphi)$改写成

$$V(t,\ \hat{x}_t)=\frac{1}{2}x^2(t)+\int_{-\infty}^{t}\int_t^{\infty}|e(u,\ s)||x(s)|^2duds$$

经计算后得

$$\dot{V}_{(3)}(t,\ \hat{x}_t)\leqslant m(t,\ K)x^2(t)$$

$$+\left(\frac{1}{2}-K\right)\int_{-\infty}^{t}|e(t,\ s)|x^2(s)ds+|x(t)||f(t)|。$$

令$u(t)=M$。当$V(t,\ \hat{x}_t)\geqslant u(t)=M$时有

$$x^2(t)\geqslant 2M-2K\int_{-\infty}^{t}\int_t^{\infty}|e(u,\ s)|x^2(s)|duds。$$

因为$m(t,\ K)\leqslant 0$，故

$$\dot{V}_{(3)}(t,\ \hat{x}_t)\leqslant 2m(t,\ K)M+\Big[-2m(t,\ K)$$

$$+\frac{1-2K}{2K}k\Big]V+\sqrt{2}LV^{\frac{1}{2}}\overset{\text{def}}{=\!=}g(t,\ v),$$

当M充分大时

$$g(t,\ u(t))=g(t,\ M)=\left[\frac{1-2K}{2K}kM^{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}L\right]M^{\frac{1}{2}}$$

$$<0。$$

故$\dot{u}(0)=0>g(t,\ M)$。从而定理1的(ii)及(iii)成立。容易证明$V(t,\ \varphi)=V(t+T,\ \varphi)$，故定理1的$(V)$也满足，所以，由定理1，方程(3)存在以$T$为周期的解。证毕。

例 方程

$$\dot{x}(t)=-(2+\sin^2 t)x+\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-s)}x(s)ds+\cos t$$

存在以2π为周期的解。

下面利用李雅普诺夫函数得到另一类结果。

定理3 如果满足下列的条件：

(i) 存在$T>0$，使得对于任意的$t\in\mathbf{R}$及$\varphi\in C_{-\infty}$，有$f(t,\ \varphi)=f(t+T,\ \varphi)$；

(ii)存在可微函函数u：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$及函数$g:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$，$g(t,v)$关于$v$满足局部的*Lipschitz*条件，以及$t_0>-\infty$，使得$u_0=\sup\{u(t):-\infty<t\leqslant t_0+T\}$有限，且当$-\infty<s\leqslant 0$时$u(t_0+T+s)\leqslant u(t_0+s)$，当$-\infty<t\leqslant t_0+T$时$\dot{u}(t)\geqslant g(t,\ u(t))$；

(iii)存在连续非减函数$L:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$，使得当$u>0$时$L(u)>u$，且当$t\in[t_0,\ t_0+T]$及$-\infty<s\leqslant 0$时，有$u(t+s)\leqslant L(u(t))$；

(iv)存在李雅普诺夫凸函数$V:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^+$，及楔函数$W(r)$，满足

$$W(|x|)\leqslant V(t,\ x),\ V(t,\ 0)\leqslant u(t),\ t\in\mathbf{R}.$$

且当$V(t)=V(t,\ x(t))\geqslant u(t)$及$V(s,\ x(s))\leqslant L(V(t,\ x(t)))$，$-\infty<s\leqslant t$成立时有

$$\dot{V}_{(1)}(t,\ x(t))\leqslant g(t,\ V(t,\ x(t))).$$

(v) 对于满足$W(\|\varphi\|)\leqslant u_0$的任意$\varphi\in C_{-\infty}$以及$-\infty<s\leqslant 0$，有

$$V(t_0+s,\ \varphi(s))\leqslant V(t_0+T+s,\ \varphi(s)).$$

(vi)对任意的$H>0$，方程(1)的解按ρ连续依赖于满足$\|\varphi\|\leqslant H$的初始函数φ，则方程(1)存在以T为周期的解。

证 令

$$M=\sup\{|f(t,\ \varphi)|:t_0\leqslant t\leqslant t_0+T,\ W(\|\varphi\|)\leqslant u_0\}.$$

考虑集合$S=\{\varphi\in C_{-\infty}:V(t_0+s,\ \varphi(s))\leqslant u(t_0+s),\ -\infty<s\leqslant 0$

$$|\varphi(s_1)-\varphi(s_2)|\leqslant M|s_1-s_2|,\ s_1,\ s_2\in(-\infty,\ 0]\}.$$

类似于定理1，可以证明S不空且为凸集。至于S的紧性，如定理1的证明那样取一子叙列$\varphi_n^{(n)}(s)$，则$V(t_0+s,\ \varphi_n^{(n)}(s))\leqslant u(t_0+s)$，$-\infty<s\leqslant 0$。而$\varphi_n^{(n)}(s)$在任意区间$I_k=[-k,\ 0]$上均一致收敛于某$\varphi_0(s)$。于是有$V(t_0+s,\varphi_0(s))\leqslant u(t_0+s)$，$-\infty<s\leqslant 0$，又易于证明

$$|\varphi_0(s_1)-\varphi_0(s_2)|\leqslant M|s_1-s_2|,\ s_1,\ s_2\in(-\infty,\ 0]$$

于是$\varphi_0\in S$，故S为紧集。

和定理1一样，定义S上的映射$P:\varphi\to\hat{x}_{t_0+T}(t_0,\ \varphi)$。由条件(vi)知$P$连续。下面证明$P(\varphi)\in S$。对任意的$\varphi\in S$，令$V(t)=V(t,\ x(t,\ t_0,\ \varphi))$，有

$$V(t_0)=V(t_0,\ x(t_0))=V(t_0,\ \varphi(0))\leqslant u(t_0).$$

令$t_1=\sup\{t:V(s)\leqslant u(s),\ s\geqslant t_0\}$，应有$V(t_1)=u(t_1)$。假如$t_1\geqslant t_0+T$，则对于所有$t\in[t_0,\ t_0+T]$均有$V(t)\leqslant u(t)$，从而$x(t)$在$[t_0,\ t_0+T]$上存在。我们证明不可能$t_1<t_0+T$。反证。设$t_1<t_0+T$。由于$L(u(t_1))>u(t_1)=V(t_1)$，而$L(u)$又连续，故存在$\varepsilon>0$，使得对于$t\in[t_1,\ t_1+\varepsilon]\subset[t_0,\ t_0+T]$，有

$$0\leqslant V(t)<\frac{L(u(t_1))+u(t_1)}{2}<L(u(t)).$$

所以存在$t_2,\ t_3\in[t_1,\ t_1+\varepsilon]$，使得

$$u(t_2)=V(t_2),\ u(t)<V(t),\ t\in(t_2,\ t_3]$$

从而
$$V(s)\leqslant\frac{L(u(t_1))+u(t_1)}{2}<L(u(t))\leqslant L(V(t)),$$

其中$s\in[t_1,\ t]$，$t\in[t_2,\ t_3]$。

另一方面，由S的定义及条件(iii)又有

$$V(s)\leqslant u(s)\leqslant L(u(t))\leqslant L(V(t)),\ -\infty<s\leqslant t_1.$$

从而$V(s)\leqslant L(V(s))$，当$t\in[t_2,\ t_3]$，$-\infty<s\leqslant t$时。由条件

(iv)，有

$$\dot{V}_{(1)}(t)\leqslant g(t,\ V(t)),\quad t\in[t_2,\ t_3].$$

设$w(t)$为方程$\dot{w}=g(t,\ w)$，并满足$w(t_2)=V(t_2)=u(t_2)$的唯一解，则有$V(t)\leqslant w(t)$，$t\in[t_2,\ t_3]$。由条件(iii)，有$u(t)\geqslant w(t)$，$t\in[t_2,\ t_3]$。于是$V(t)\leqslant u(t)$，$t\in[t_2,\ t_3]$。这与$V(t_3)>u(t_3)$矛盾。总之，有$V(t)\leqslant u(t)$，$t\in[t_0,\ t_0+T]$。由条件(v)及(ii)有

$$\begin{aligned}&V(t_0+s,\ x(t_0+T+s,\ t_0,\ \varphi))\\ &\leqslant V(t_0+T+s,\ x(t_0+T+s,\ t_0,\ \varphi))\\ &\leqslant u(t_0+T+s)\leqslant u(t_0+s),\quad -\infty<s\leqslant 0.\end{aligned}$$

因为$x(t,\ t_0,\ \varphi)$为方程(1)的解，由M的定义有

$$\begin{aligned}&|x(t_0+T+s_1,\ t_0,\ \varphi)-x(t_0+T+s_2,\ t_0,\ \varphi)|\\ &\leqslant M|s_1-s_2|,\quad s_1,\ s_2\in(-\infty,\ 0].\end{aligned}$$

于是$P(\varphi)=x_{t_0+T}(t_0,\ \varphi)\in S$。

由Schauder—Тихонов不动点定理，存在$\varphi^*\in S$，使$P(\varphi^*)=\varphi^*$。由此即可推知方程(1)存在以T为周期的解。证毕。

推论1 如果

(i) $f(t,\ \varphi)=f(t+T,\ \varphi)$，$t\in R$，$\varphi\in C_{-\infty}$；

(ii) 存在凸的以T为周期的李雅普诺夫函数$V(t,\ x)$以及楔函数W_0，W_1满足$W_0(|x|)\leqslant V(t,\ x)\leqslant W_1(|x|)$；

(iii)存在连续的非减函数$L(u):\mathrm{R}^+\to\mathrm{R}^+$，满足$L(u)>u$，当$u>0$，且当$V(s,\ x(s))\leqslant L(V(t,\ x(t)))$，$-\infty<s\leqslant t$时有

$$\dot{V}_{(1)}(t,\ x(t))\leqslant -W(|x(t)|)+K,$$

K为某常数，$W(r)$为无限大楔函数；

(iv)方程(1)的解按ρ连续依赖于初始函数φ，$\|\varphi\|\leqslant H$，H为任意正数。

则方程(1)存在以T为周期的解。

证 取正数M满足$-W(M)+K<0$，令$u(t)=W_1(M)$。于是当$V(t,\ x)\geqslant u(t)=W_1(M)$时，$|x|\geqslant M$，从而$\dot{V}_{(1)}(t,\ x)<0$。令$g(t,\ V)=0$。有$\dot{u}(t)\equiv 0\equiv g(t,\ u)$，从而定理3的全部条件被

满足，故推论 1 得证。

现将定理3应用到方程(3)上去，也可以得到有意义的结果。

定理4 如果满足下列条件：

(i) $a(t+T)=a(t)$, $e(t+T, s+T)=e(t, s)$、$f(t+T)=f(t)$；

(ii) 方程(4)具有“衰退记忆”。

(iii)存在$\delta>1$及$\mu>0$，使得

$$a(t)+\delta\int_{-\infty}^{t}|e(t, s)|ds<-\mu.$$

则方程(3)存在以T为周期的解。

证 取

$$V(x)=\frac{1}{2}x^2,$$

以及 $L(u)=\delta^2 u$, $u(t)=M$, M待定

$$g(t, u)=0.$$

于是定理3的条件(i)—(iii)及(v)均成立，由定理2的证明可知条件(vi)也成立。故只须验证定理3的条件(iv)。

由

$$\dot{V}_{(3)}(x(t))\leqslant a(t)x^2(t)+\int_{-\infty}^{t}|e(t, s)||x(s)|ds|x(t)|+L|x(t)|,$$

此处$|f(t)|\leqslant L$。当

$$V(s)=\frac{1}{2}x^2(s)\leqslant L(V(t))=\frac{1}{2}\delta^2x^2(t),$$

即$|x(s)|\leqslant\delta|x(t)|$时，有

$$\dot{V}_{(3)}(x(t))\leqslant-\mu x^2(t)+L|x(t)|.$$

于是当$V(x)=\frac{1}{2}x^2(t)\geqslant M$，而$M$充分大时，有$\dot{V}_{(3)}(x(t))\leqslant0$，

故定理3的(iv)成立。从而定理得证。

参考文献

[1] W. P. London & J. A. Yorke, Amer. J. Epidemiology, 98, (1973) 453—482.

[2] К. Ф. Теодорчик, Автоколебательные системы Изд. з, М—Л., Гостехиздат, (1952)

[3] С. Б. Норкин, 具滞后变元的二阶微分方程，(1981年 李继彬译，安徽大学油印)。

[4] J. Tinbergen, Econometrica, 3(1935), 241—308.

[5] J. J. Levin & J. Nohel, J. Math. Ana. Appl. 8(1964), 31—44.

[6] R. Brayton, Quart. Appl. Math., 24(1976) 289—301

[7] A. J. Lotka, Ann. Math. Statistions, Vol. 10 (1939) 1—25.

[8] H. L. Smith, Ph. D. Thesis, Univ. of Iowa (1976).

[9] R. D. Driver. Ordinary and delay differential equations, Springer—Verlag, New York, (1977)

[10] K. L. Cooke & J. Yorke, Ordinary Diff. Eqns. Acad. Press, New York, (1972) 35—53.

[11] F. Hoppensteadt & P. Woltman, Math. Biosci., 9(1970), 71—91.

[12] S. N. Chow, Diff. Eqns., 15(1974), 350—378.

[13] H. T. Banks, Lecture Notes in Bimathematics, vol. 6, springer—Verlag, (1975).

[14] M. A. Cruz & J. K. Hale, Ann. Mat. Pura Appl. (4)85, (1970) 63—82

[15] A. Manitius, Report CRM—462, Centre de Recherches Math. Univ. de Montreal. Ouébee. 1974

[16] M. J. Leitman & V. J. Mizel, Arch. Rat. Mech. Ana. 55 (1974) 18—51.

[17] 李炳熙，生态学中的voltera微分方程，《应用数学与计算机数学》，(1979)。

[18] E. Pinney, Ordinary Difference—Differential Equations, Univ, of California Press, (1958)
[19] H. O. A. Wold & P. Whitte, Econometrica, 25 (1957),591—595.
[20] J. D. Sargan, 25 (1957), 568—590.
[21] E. Ю. Фасрман, Лроблемы долпосрочното лпанирования; M. «Hayka», (1971).
[22] A. W. Olbrot, Control and Cybernetics 5(1976) no. 2.
[23] M. N. Oğuztöreli, Time—lag control systems, Acad. Press, New York, (1966)
[24] N. Wiener, Cybernetics (or control and communication in the animal and the machine), M. I. T. Press (1961).
[25] B. A. Asner & A. Halangy, Rev. Rourraine Sei. Tech. Ser., Electrotcchrique e Ênergêtique, 18 (1973), 283—293.
[26] L. Weiss, Contsollability for vasious linear and nontineas systems models, Lctuse Note Math. 114 1970, 250—261.
[27] 钱学森，工程控制论，科学出版社，(1958)
[28] J. K. Hale, Theory of Functional Differential Equations, springer—Verlag (1977).
[29] R. Bellman & K. Cooke, Differential Difference Equations, Academic Press (1963).
[30] 吴建宏，延滞系统的整体存在性，湖南大学学报。2(1984) 1—9.
[31] 冯祐和，泛函微分方程的解对初始时刻的可微性，第三届全国泛函微分方程会议交流资料(1984).
[32] 张书年，广义泛函微分方程的基本理论，微分方程年刊，№ 2 (1985)，129—230.
[33] J, K. Hale & J. Kato, Phase Space for Retarded equations with Infinite Delay, Funkcialaj Ekvacioj, 1 (1978) 11——40
[34] K. Schumacher, Existence and continuous dependence for functional—differential equations with unbounded delaz, Archs. Ration. Mech, Aualysis, 67, 315 (1978).
[35] Y. Hino, Stability and existence of almost periodic soluy

tions of functional differential equations with infinite retardation, Proc. Symp. RIMS, Kyoto Univ. (1977), 70—83.
[36] T. Kaminogn, Kmeser's property and BVP for some retarded functional defferential equations, Tohoku Math. J. 30. 471 (1978)
[37] T. Naicto, On lincar autonomous retarded equations with an abstract phase space for infinite delay, Proc. Symp. RIMS, Kyoto Univ. (1977), 89—96.
[38] K. Sawano, Exponential asymptotic stability for functional differential equations with infinite retardatrons. Tôhoku Math. J.
[39] F. Kappel 与 W. Schappacher, Some considerations to the functional theory of infinite delay equations, J. Diff. Eqs. 37 (1980) 141—183.
[40] C. Kuratowski, Sur les espace complets, Fund. Math. 15 (1930), 301—309.
[41] G. Darbo, Punti uniti in tiansformazioni a condomino non compatto, Rend. Sem. Math. Univ. Padova 24 (1955), 84—92.
[42] J. K. Hale, Forward and backward continuation for neutral functional differential equations, J. Diff. Eqs. 9(1971)
[43] 温立志, On the Uniform asympotic stability in functional differential equations, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 85,№ 4 (1982)
[44] 温立志，泛函微分方程稳定性的李雅普诺夫泛函方法，科学通报，7(1984).
[45] T. A. Burton. Unifrm asymptotic stability in functional differential equations, Proc. Amer. Math. .Soc. 68 (1978) 195—199.
[46] 黄振勋、林晓标，关于时滞系统稳定性的一个问题，数学年刊3(1)(1982).
[47] 吴建宏，无穷时滞中立型泛函微分方程的基本理论，应用数学学报，4 (1985).
[48] T. A. Burton, Volterra integral and differential Equations,

Academic Press, INC. (1983).

[49] 温立志，一类二阶常微分方程及二阶时滞微分方程解的有界性，科学通报8 (1985)，应用数学学报1 (1986).

[50] 秦元勋、刘永清、王联，带有时滞的动力系统的运动稳定性。科学出版社，1963.

[51] 廖晓昕，超越函数$f_n(\lambda, e^{-\lambda\tau}) \overset{def}{=} \mathrm{Det}(a_{ij}+b_{ij}e^{-\lambda\tau}-\delta_{ij}\lambda)_{n\times n}$零点全分布在复平面左半部的代数充分准则，科学通报，10(1982).

[52] Л.С.Понтрягин, Изв.АН СССР, Серия Матем, 6(1942)

[53] 李小军，超越函数$f_n(\lambda, e^{-\lambda\tau}) = \det(A+Be^{-\lambda\tau}-I\lambda)$ 的零点全在左复平面的判别法则，科学通报17 (1984)

[54] 黄文璋，时滞微分系统中的一个Ляпунов 泛函的存在性定理，第三次全国泛函微分方程会议交流资料(1984)

[55] 黄振勋、阮炯、高国柱，中立型微分差分方程和常微分方程的稳定性等价问题，数学学报，5 (1984)，716—720.

[56] J.K.Hale, Asymptotic behavior of solution of differential difference equations, Proceedings of International symposium for Nonlinear Oscillations, 2 (1963).

[57] N. G. Cebotarev, N. N. Mĕiman, The Routh—Hurwitz problem for polynomials and entier functions, Trudy Mat. Inst. Stekloc. Vol. 26, 1949.

[58] 秦元勋、刘永清、王联，带有时滞的动力系统的运动稳定性，科学出版社 (1963)

[59] 吴建宏，不变性原理到非自治泛函微分方程的拓广，(I)稳定性问题及Razumikhin方法，待发表

[60] 吴建宏，不变性原理到非自治泛函微分方程的拓广，(II) 有界性问题及Razumikhin方法，待发表

[61] 李森林，吴建宏，On the stalility of differential equations. 待发表。

[62] 吴建宏，On the boundednere of differential equations, 微分方程年刊№ 3 (1986)

[63] J. kato, On Liapunov—Razumikhin type theorems for functional differential equations, Funkcialaj Ekvacioj, 16 (1973), 225—239.

[64] J. R. Haddock, Some new reusals on stability and convergence of solutions of ordinary and tunctional differential equations, Funkcialaj Ekvacioj, 19 (1976) 247—269.

[65] 芮嘉诰，关于变系数微分差分方程组渐近稳定性及不稳定性的判别法则，第三届全国泛函微分方程会议交流资料（1984）.

[66] 林晓标，关于Burton渐近稳定性定理的注记。待发表

[67] M. Kurinhara, On an asymptotic behavior of solutions of linear functional differential Equations, Funkcialaj Ekvacioj, 22 (1979) 327—337

[68] J. C. Lillo, Backward continuation of retard functional differential equations, J. Diff. Eqs., 17 (1975) 349—306。

[69] G. Seifert, Liapunov—Razumikhin conditions for asymptotic stability in functional differential equations of volterra type, J. Diff, eqs. 16 (1974)

[70] C. V. Coffman, Linear differential equations with delays, Existence, uniqueness, growth, and compactness under natsual Carathéodory conditions, J. Diff, eqs. 16 (1974) 26—44

[71] 郑祖庥，泛函微分方程的发展和应用，数学进展，2 (1983) 94—111。

[72] 郑祖庥，滞量对解存在唯一性的影响，安徽大学学报（自然科学版），1 (1983),1—5。

[73] 郑祖庥，滞量与周期解的存在性，安徽大学学报（自然科学版）2 (1981) 22—28

[74] 郑祖庥、张书年、黄文璋，论动力系统解的性态对滞量的依赖性，待发表。

[75] 郑祖庥，稳定性依赖于初始时刻的泛函微分方程，安徽大学学报（自然科学版）1 (1981), 10—16

[76] 黄文璋，一类RFDE解的存在唯一性渐近性态及稳定性，第二次全国泛函微分方程会议交流资料（1981）。

[77] 任洪善，一类带有界滞量的自治 RFDE 变异性，第二次全国泛函微分方程会议交流资料（1981）

[78] R. Datko, Linear autonomoue neutral differential equati

ions in Banach space, J. Diff, Egs. 25 (1977), 258—274。

[79] R.D.Driver, Linear differential systems with small delays, J, Diff. Eqs. 21 (1976), 148—166。

[80] A. Halanay and J. A. Yorke, Some new resalts and problems in the theory of differential—delay equations,SIAM Review, Vol. 18, No. 1。

[81] M, Kurihara, On an asymptotic behavior of solutions of linear functional differential equations, Funkcialaj Ekvacioj, 22 (1979), 327—337。

[82] 黄文纲，方程$\ddot{x}(t)+p_1(t)\dot{x}(t)+q_1(t)x(t)+p_2(t)\dot{x}(t-\tau(t))+q_2(t)x(t-\tau(t))=0$的稳定性准则,第三次全国泛函微分方程会议交流资料(1984)。

[83] 胡作生， 某些具有小时滞的泛函微分方程的解的稳定性，第三次全国泛函微分方程会议交流资料 (1984)

[84] J. kato, On Liapunov—Razumikhin type theorams, Lectuse Notes Math., 243 (1971), 54—65。

[85] 李森林，微分—差分方程（包括中立型）稳定性的基本理论， 湖南大学学报，1 (1979)

[86] 梁肇军，一类变时滞的非线性微分方程组解的稳定性， 华中师院学报（自然科学版）2 (1978)

[87] 汤光宋，带时滞的非线性可数维（包括中立型） 微分方程组解的稳定性，武汉师院汉口分部校刊，3 (1980)

[88] E.F. Infante, A Liapunov functional for a matrix differential — difference equation, J. Diff. Eqs., 29 (1978), 439—451.

[89] V. Lakshmikantham and S. Leela, A technique in stability theory of delay—differential equations, Nonlinear Analysis theory & Application, 3 (1979), 317—323。

[90] 蔡维璇，具有时滞的复合系统的稳定性， 第二次全国泛函微分方程会议交流资料 (1981)

[91] G. A. Shanholt, stability of solutions of weakly nonlinear functional differential equations, J. Math, Anal. Appl., 32 (1970), 678—683.

〔92〕 黄文璋，二阶方程$\ddot{x}(t)+a\dot{x}(t)+bx(t-\tau)+cx(t)=0$零解稳定的充分必要条件，第四届国际双微会议交流资料（1983）。

〔93〕 J. A, Yorke, Asymptotic stability for one dimensional differential—delay equations。J, Diff. Eqs., 7 (1970), 189—202。

〔94〕 郑祖庥，具离散滞量系统解的全扰动稳定性，第二次全国泛函微分方程会议交流资料（1981）。

〔95〕 阮炯，Lurie泛函型方程控制系统的绝对稳定性，数学年刊，4A，(1) (1983)，47—55。

〔96〕 阮炯，Absolute stability of linear functional regulated system with M nonlineas regulators, chin. Ann. of Math., 3 (3) (1982), 262—272。

〔97〕 冯祐和，定常系统第二临界情形的小时滞等价条件，华南师范大学学报（自然科学版）数学专刊（1984）。

〔98〕 伍炯宇，关于泛函微分方程的Ляпунов直接法，第二次全国泛函微分方程会议交流资料（1981）。

〔99〕 S.R.Bernfeld, V. Lakshmikantham and S. Leela, Perturbations of functional—differential equations with nonuniform stability behavior, J. Math. Anal. Appl., 46 (1974), 249—260。

〔100〕 R. D. Driver, Existence theory and stability of solution of a delay differential system, Archs. ration, Mech 10 (1962)

〔101〕 T. A. Burton, Boundedness in functional differential equations, Funkcialaj Ekvacioj, Vol. 25, 1, 1982。

〔102〕 黄启昌，具无限时滞的泛函微分方程的解的一致性态，东北师大学报自然科学版，No. 1，1984。

〔103〕 张波，具无限时滞泛函微分方程解的一致渐近稳定性，东北师范大学硕士论文（1984）

〔104〕 G. Seifert, Liapunov—Razumikhin conditions for asymptotic stability in functional differential equations of Volterra type, J. D. E., 16, 1974.

〔105〕 R. Grimmer and G. Seifert, stability properties of Volterra integrodifferential equations, J. D. E. 19, 1975.

[106] 张波，具无限时滞泛函微分方程中的 Razumikhin 型定理，微分方程年刊，№ 1 (1986)。

[107] 何敏，Uniform bouncledness and uniform ultimate boundedness in functional differential equations with unbounded and variable delay。东北师范大学硕士论文。

[108] Wang zhicheng, Comparison method and stabilitg problem in functional differential equations, Tôhoku Math. J., Vol·35, No·3, 1983。

[109] 李志祥，关于泛函微分方程的Liapunov—Ruzumikhin 型定理，

[110] J. Kato, Liapunov's second method in functional differential equations, TBhoku Math. J., Vol. 32, No·4, 1980。

[111] J. Kato, Stability problem in functional differential equations with infinite delay. Funkcial · Ekvac., 21, 1978。

[112] J. Kato, Stability in functional differential equations, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag Berlin—Heidelberg—New York, 799, (1980), 252—262。

[113] M. A. Cruz and J. K. Hale, Stability of functional differential equations of neutral type, J. Differential Equations 7 (1970), 334—355。

[114] 温立志，陈强，中立型微分差分方程稳定性的充分条件，湖南大学学报，1 (1979)。

[115] O. J. Staffans, A neutral FDE with stable D—operator is retarded, J. Differential Equations 49 (1983), 108—217。

[116] 王志成、钱祥征，中立型泛函微分方程的稳定性理论，全国第一届泛函微分方程学术会议交流资料。

[117] 王志成，钱祥征，泛函微分方程的李雅普诺夫方法，湖南大学学报，3 (1979), 15—24。

[118] 高国柱，中立型泛函微分方程的稳定性问题，数学年刊，5A (4), (1984), 517—522。

[119] 高国柱，中立型泛函微分方程的一致渐近稳定性，复旦学报(自然科学版)，4 (1982), 391—402。

[120] W. R. Melvin, Stability Properties of functional difference equation, J. Math. Anal. Appl., 48 (1974), 749—763。

[121] O. Lopes, Forced oscillations in nonlinear neutral differential equations. SIAM J. Appl. Math. 29 (1975), 196—207。
[122] 李森林，泛函微分方程稳定性的V函数法，湖南大学学报6(1985)。
[123] 李森林，几类直接控制系统绝对稳定的充分及必要条件，应用数学学报，4 (1983)，458—467。
[124] 李森林，超中立型泛函微分方程的稳定性，中国科学（A 辑），8 (1982)。
[125] 李森林，泛函微分方程稳定性的基本理论，湖南大学学报，3 (1979)，1—14。
[126] 斯力更，变系数线性中立型微分系统的稳定性，数学学报，2 (1983)，194—198。
[127] 斯力更，小时滞中立型系统的稳定性，数学年刊，3，2 (1982)，203—207。
[128] M. L. Peña, On the stability of systems of neutral type, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. 40 (1—2), (1982), 51—54。
[129] 吴建宏，Stability of neutral functional differential equation with infonite delay, Funkcialaj Ekvac. to appear.
[130] 李志祥，Liapunov—Razumikhin函数与连续函数空间C_r上的无穷延滞方程解的渐近性质，(1984)，湖南大学硕士论文。
[131] F. Kapple, The Invariance of limit set for autonomous functional differential equations, SIAM J. Appl. Math. 2 (1970)
[132] M. Parrott, Convergence of solutions of infinite delay differential equations with an underlying space continuous functions, Lectuse Notes in Math. Springer—Verlag, 280—289。
[133] T. Yoshizawa, Stability theory by Liapunov's seconcl method, The Mathematical Socicty of Japan, 1966。
[134] 李小军，滞后型泛函微分方程解的渐近性态，湖南大学硕士论文，(1984)。
[135] J. K. Hale, Lecture Notes in Math. Vol. 730, 157—193
[136] B. Singh and R. S. Dahiya, On oscillation of second order retarded equations, J. Math, Anal, Appl. 47 (1974) 504—

512。

[137] B. Singh, A symptotic nature of nonoscillatory solutions of nth order retarded differential equations, SIAM, J. Math. Anal. 6 (1975), 784—795。

[138] T. Kusano and H. Onose, Asymptotic decay of oscillatory solutions of second order differential equations with forcing term, Proc. Amer. Math. Soc. 66 (1977) 251—257。

[139] B. Singh, Damped trajectories and slow oscillatory in forced lienard type functional equations, Fukcialaj Ekvacioj, 23 (1980), 63—81。

[140] J. R. Graef, T. Kusano, H. Onose and P. W. Spikes, On the asymptotic behavior of oscillatory solutions of functional differential equations, Funkcialaj Ekvacioj, 26 (1983) 11—16。

[141] 李克难，关于二阶及三阶时滞泛函微分方程解的渐近性质， 湖南大学硕士论文，(1984)

[142] 温立志，二阶泛函微分方程的渐近性和振动性，科学通报 23 (1984)，中国科学，1 (1986)

[143] 罗炳容、温立志，二阶泛函微分方程解的振动性，湖南数学年刊，1 (1981)，32—39。

[144] G. Ladas and I. P. Stavroulakis, On delay differential inequalities of first order, 25 (1982), 105—113。

[145] 阮炯，Oscillations of first order retarded and advanced functional differential equations, 待发表。

[146] 温立志， Oscillatory criteria for a general second order functional differential equation. "第三届泛函微分系统及有关课题国际讨论会"交流资料。(1983)。

[147] A. G. Kartsatos and M. N. Manougian, Perturbation causing oscillations of functional — differential equations, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1974) 111—117.

[148] A. G. Kartsatos, On the maintenance of oscillations of nth order equations under the effect of a small foreings tesn, J. Diff. Eq. 10 (1971) 355—363。

[149] T. Kusano and H. Onose, An oscillation theorem for differential equations with deviating argument, Proc. Japan Acad, 50 (1974) 809—811。

[150] A. G. Kartsatos and H. Onose, A comparison theorem for functional differential equations, Bull. Austrul. Math. Soc., Vol. 14 (1976), 343—347。

[151] N. T. Кигурадзе О колеблемости решений уравнения $u^{(n)} + a(t)|u|^n \mathrm{sign} u = 0$, Mat. Sb. 65(107) (1964), 172—187.

[152] H. Onose, Oscillation and asymptotic behavior of solutions of setareded differential equations of arbitrary order, Hiroshima Math. J., Vol. 3, 2 (1973),

[153] T. Kusano and H. Onose, Nonlinear oscillation of second order functional differential equations with advanced argument, J. Math. Soc. Japan 29 (1977), 541—559.

[154] H. Onose, Nonlinear oscillation of functional differential equations with complicated deviating argument, Bull. Fac. Sci. Ibaraki Univ. Math. 13 (1981), 29—43.

[155] H. Onose, Nonlinear oscillation of fourth order functional differential equations, Aunali di Matematica pura ed applicata, Vol. CXIX (1979), 259—272

[156] 李小军，二阶非线性泛函微分方程的渐近性与振动性，数学研究与评论，待发表。

[157] G. Ladas, Y. G. Sficas and J. P. Stavroulakis, Asymptotic behavios of solutions of retarded differential equations, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1983) 247—253.

[158] B. M. Levitan, Some problems of the theory of almost periodic functions I, Uspehi Mat. Nauk. 2—5 (1947) 133—192 (俄文).

[159] J. L. Massera, The existence of periodic solution of systems of differential equations, Duke Math. J., 17 (1950). 457—475.

[160] 李晓颖，关于Massera及Yoshizaw周期解定理的推广，东北师范大学硕士论文(1984)。

[161] J. L. Kaplan and J. A. Yorke, Ordinary differential equations which yield periodic solutions of differential delay equations, J. Math. Analy. Appl. 48 (1974) 317—324.

[162] 高国柱，关于方程$x'(t)=-\eta x^6(t-1)[a^2-x^2(t)]$的非常数周期解的存在性，数学学报，1 (1985) 35—40

[163] M. A. Krasnoselskii, Topological methods in the theory of nonlinear integral equations. Macmillan, New Yolk' 1964.

[164] J. K. Hale and C. Perello, The neighborhood of a singular point of functional differential equations, contrs. Diff. Eqs. 3 (1964). 351—375.

[165] R. B. Grafton, A periodicity theorem for autonomoue functional differential equatious, J. Diff. Eqs. 6 (1969). 87—109.

[166] E. M. Wright, A noulinear difference—differential equation. J. Reihe Ang. Math. 194 (1955), 66—87.

[167] G. S. Jones, The existence of periodic solutions of $f'(x)=-\alpha f(x-1)[1+f(x)]$, J. Math. Anal. Appl. 5 (1962) 435—450.

[168] R. D. Nussbaum, Periodic solutions of some nonlinear autonomous functional differential equations, Ann. Math. Pura Appl. 10 (1974), 263—306.

[169] R. D. Nussbaum, A generalization of the Ascoli theorem and an applieation to functional differential equation, J. Math. Anal. Appl. 35 (1971), 600—610.

[170] R. D. Nussbaum, Some asymptotic fixed point theorems, Traus. Amer. Math. Soc. 171 (1972) 349—375.

[171] R. D. Nussbaum. The fixed point index for local condersing maps. Ann. Mat. Pura Appl. , 89 (1971) 217—258.

[172] R. B. Brown, The lefschetz fixed point theorem, Scott, Foresman and company, Gleuview, Illinois, 1971

[173] J. K. Hale, Periodic and almost periodic solutions of functional differential equations, Arch. Rational Mech. Anal. , 15 (1964), 289—304.

[174] T. Yoshizawa, Stability and existence of a periodic solution, J. Diff. Eqs. 4 (1968), 121—129.

[175] 刘和涛,(1)一类时滞微分方程无条件稳定的代数判定;(2) 具无限时滞泛函微分方程的微分不等式;微分方程年刊№ 3(1986) (3)关于反向延拓的一些结果，第三次全国泛函微分方程会议交流资料。

[176] 费树岷,(1)关于一阶双滞量DDE的全参数分析;(2)一类RFDE解的渐近稳定的充分准则。第三次全国泛函微分方程会议交流资料。

[177] 黄启昌，具无限时滞的泛函微分方程的周期解的存在性，中国科学，A辑，10 (1984) 882—889。

[178] Y. Hino, Stability property for functional differential equations with infinite delay, Tôhoku Math. J. 35 (1983) 597—605.

[179] J. Kato, An autonomous system whose solutions are uniformly ultimately bounded but not uniformly bounded, Tōhoku Math. J. 32 (1980), 499—504.

[180] T. A. Burton, Stability theory for delay equations, Funkcialaj Ekvacioj, 22 (1979), 67—76.

[181] T. A. Burton and J. R. Haddock, On the delay-differential eguations $x'(t)+a(t)f(x(t-r(t)))=0$ and $x''(t)+a(t)f(x(t-r(t)))=0$, J. Math. Anal. Appl. 54 (1976). 37—48.

[182] A. G. Kartsatos, On nth-Order differential inequalities, J. Math. Anal. Appl. 52 (1975) 1—9.

[183] 张石生，关于一类抽象的泛函微分方程及与之相关联的非线性Volterra积分—微分方程解的存在性定理，第二次全国泛函微分方程会议交流资料(1981)

[184] T. A. Burton, 黄启昌, W. E. Mahfoud, Liapunov functionals of convolution type, Math. Analy. & Appl. , 待发表.

[185] T. A. Burton, 黄启昌, W. E. Mahfoud, Rate of decay of solutions of volterra equations, Nonlinear Analysis, 待发表.

[186] J. K. Hale, Functional differential equations with infinite delays, J. Math. Anal. Appl. 48 (1974), 276—283.

[187] T. Naito, On autonomous lineas functional differential eguations with infinite retardations, J. Diff. Eqs. 21(1976)

291—315.

[188] T. A. Burton, Periodic solutions of integrodifferential equatious. 待发表.

[189] R. C. Grimmer, Existence of periodic solutions of functional differential equations, J. Math. Aual. Appl., 72 (1979), 666—673.

[190] Y. Hino, Total stability and uniformly asymptotic stability of linear functional differential equations with infinite delay, Funkcialaj Ekvacioj, 24 (1981), 345—349.

[191] F. Brauer, Asymptotic stability of class of integro-differential equations, J. Diff. Eos. 28 (1978), 180—188.

[192] 黄发伦，关于无界延滞的线性泛函微分方程的两个问题，全国第三次泛函微分方程会议资料，(1984)。

[193] 王克，可变时滞泛函微分方程的基本理论，东北师范大学硕士论文。

[194] T. A. Burton and Wang zhicheng, Some remarks on periodic solutions, 第一届全国生物数学学术会议交流资料 (1984).

[195] Wu Jiauhong, Li zhixiang and Wang zhicheng, The variation of constants formula and periodicity for linear neutral integro-differential equatious. 第一届全国生物数学学术会议交流资料 (1984).

[196] Li Zhixiang, Wu Jianhong and Wana Zhicheng, stability property of solutions of linear volterra integro-differential equations, 第一届全国生物数学学术会议交流资料 (1984).

[197] J. R. Graef and P. W. Spikes, Sufficient conditions for the equation $(a(t)x')' + h(t,x,x') + q(t)f(x,x') = e(t,x,x')$ to be nonoscillatory. Funkcialaj Ekvacioj 18 (1975) 35—40.

[198] Lu-San Chen and Cheh-Chih Yeh, Oscillation theorems for recond order nonlinear differential equations with an "integrally small", J. Math. Anal. Appl. 78 (1980) 49—57.

[199] S. R. Bernfeld and J. A. Yorke, The behavior of oscillatory solutions of $x''(t) + p(t)g(x(t)) = 0$, SIAM J. Math. Anal., 4 (1972), 654—667.

[200] J. Rovder, Asymptotic behavior of solutions of the differential equation of the fourth order, Math. Slovaca 30(1980) No. 4, 379—392.

[201] J. OhriskA, Asymptotic properties of solutions of a second order nonlinear delay differential equation, Math. Slovaca 31, (1981) No. 1, 83—90.

[202] 孔庆凯，二阶微分方程解的渐近性的讨论，第三届全国稳定性理论会议交流资料(1982)。

[203] 阮炯，二阶带偏差变元的微分方程的解的振动性，数学年刊，5A，5 (1984) 605—618。

[204] T. Kusano and H. Onose, Nonlinear oscillation of a sublinear delay equation of arbitrary order, Proc. Amer. Math. Soc., 1 (1973), 219—224.

[205] R. Grimmer, Oscillation criteria and growth of nonosillatory solutions of even order ordinary and delay-differential equations, Tran. Amer. Math. Soc. Vol. 198 (1974)

[206] S. R. Bernfeld and J. R. Haddock, Liapunov Razumikhin functions and convergence of solutions of functional differential equations, Application Analysio Vol. 9 (1979), 235—245.

[207] 张炳根，具有偏差变元微分方程的振动性综述，全国第二届泛函微分方程会议资料(1981)

[208] B. Singh, Asymptotic nature of nonoscillatory solutions of nth order retarded differential equations, SIAM Math. Anal., 5 (1975), 784—795.

[209] K. Foster, Oscillations of forced sublinear differeutial equations of even order, J. Math. Anal. Appl. 55 (1976), 634—643.

[210] Ming-Po Chen, Cheh-Chih Yeh and Cheng-Shu Yu, Asymptotic behavior of nonoscillatosy solutions of nonlinear differential equations with retarded arguments, J. Math. Anal. Appl. 59 (1977), 211—215.

[211] J. B. Garner, Oscillatory criteria for a general second or-

der functional differential equation, SIAM J. Appl. Math., 4 (1975), 690—699.

[212] 张书年，一类周期系数时滞微分方程解的渐近性态，数学学报，待发表。

[213] 张书年和F. V. Atkinson，有关判别方程 $\dot{x}(t)=-a(t)x(t-1)$ 所有解趋于零的准则，第二次全国泛函微分方程会议交流资料。

[214] 张书年，关于方程 $\dot{x}(t)=p(t)(x(t)-x(t-1))$ 解的渐近性态及其构造，安徽大学学报(自然科学版)，2 (1981)，11—30。

[215] 张书年，若干类型无限滞后微分方程解的渐近性态，第三次全国稳定性理论会议交流资数 (1982)。

[216] 丁彦栋，一阶线性时滞及时超微分方程的振动性，第二次全国泛函微分方程会议交流资料 (1984)。

[217] 张炳根，泛函微分方程解的振动性，第三次全国微分方程会议 (1981)。

[218] 阮炯，二阶非线泛函微分方程的渐近性，复旦学报（自然科学版） 3 (1983)，555—264。

[219] S. E. Grossman, Asymptotic behavior and exponential stability criteria for differential delay equations, J. Diff. Eqs. 12 (1972), 236—255.

[220] 阮炯, Nonoscillatory behavior caused by retarded and advanced argument for even-order functional differential inequalities and equations, Internal report of International centre for theoretical physio (1983).

[221] 阮炯，一类泛函微分方程解的渐近性类型与判别，科学通报，9 (1984).

[222] 秦元勋，稳定性理论中微分方程微分差分方程的等价性问题，数学学报，4 (1958)，457—472。

[223] 秦元勋，有时滞的系统的无条件稳定性，1 (1960)，125—141。

[224] 秦元勋，俞元洪，一类时滞微分系统的无条件稳定性，控制理论与应用，1 (1984)

[225] T. A. Burton, Periodic solution of linear volterra equation, (1983) 予印本.

[326] T. A. Burton, Periodic solution of nonlinear volterra equa-

tion, (1983) 予印本.

[227] 陈强，泛函微分方程稳定性的一类判别准则，数学年刊，6 (1984), 703—710

[228] 陈强，中立型微分差分方程组解的稳定性，湖南大学学报，1 (1983), 96—105。

[229] 冯祐和，判定有泛函变元的二阶非线性微分方程振动性的几个定理，华南师范大学学报（待发表）数学专辑 (1986)。

[230] 夏华兴，中立型泛函微分方程中的Liapunov 泛函的 Razumikhin 型定理，湖南大学硕士论文(1985)。

[231] 夏华兴，n阶泛函微分方程解的渐近性和振动性，湖南大学硕士论文(1985)。

[232] 温立志，The Razumikhin type theorems of Liapunov functionals in FDEs, Proceedings of the Third Internatioual Conference of Functional Differential systems and Related Topics, (1983)（波兰）

[233] 邵周德，中立型泛函微分方程的可微性，待发表。

[234] F. Kappel和张康培，On Neutral Functional Differential Equations with Nonatomic Difference Opperator, Graz大学印 (1984).

[235] G. W. Johnson和燕居让，Oscillatory property of N-th Order Functional Differential Equations, Chin. Ann. of Math. B (1) 1985, 47—52.

[236] CH. G. Philos, A Second Order Superlinear Oscillation Criterion, Canad. Math. Bull., Vol. 27, (1), 1984, 102—112.

[237] B. Singh and T. Kusano, On asymptotic limits of nonoscillations in functional equations with retarded arguments, Hiroshima Math. J., 10 (1980), 557—565.

[238] M. R. S. Kulenovic, Maintenance of oscillatory and asymptotic behaviour of solutions of differential inequalities under the effect of advanced and mixed argument, Acta Math. Hung. 44 (1—2) (1984), 21—33.

[239] J. R. Graef, M. K. Grammatikopoulos, Y. Kitamura, T. Ku-

sano, H. Onose and P. W. Spikes, Nonoscillatior theorems for functional differential equations of arbitrary order, Internat. J. Math. & Math. Sci. Vol. 7, 2 (1984), 249—256.

[240] CH. G. Philos, Oscillation and asymptotic properties of strongly sublinear differential equations with deviating arguments, časopis pro pěstování matematiky, 103 (1983) 122—132.

[241] E. D. True, A comparison theorem for certain functional differential equations, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 47, 1 (1975), 127—132.

[242] R. D. Terry, An application of Lyapunov's direct method to the study of oscillations of a delay differential equation of even order, Austral. Math. Soc., 25 (1978), 201—209.

[243] J. Ohriska, Asymptotic properties of solutions of a second order nonlinear delay differential equation, Math. Slovoca, 31, (1) (1981), 83—90.

[244] 胡民，中立型泛函微分方程的 Лягунов 函数，第三届全国泛函微分方程会议交流资料。

[245] A. A. Freiria, Uniform asymptotic stability of perturbed systems of neutral differential equations, Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications, 2 (1982), 117—123.

[246] A. F. Izé, Stability of perturbed neutral functional differential equations, Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications, 5 (1978), 563—571.

[247] E. N. Chukwu, A neutral functional differential equation of Lurie type, SIAM J. Math. Anal., 1 (1980), 108—115.

[248] A. F. Izé and A. M. Vila, Perturbations of neutral functional differential equations with non-uniform stability behavior, Nolinear Analysis Theory Methods & Applications, 5 (1978), 573—582.

[249] 徐安石，一类具有变量时滞且右端具有有限个非线性控制项的中立型微分方程组的稳定性和渐近稳定性，第三次全国泛函微分方程

会议交流资料（1984）。
[250] 黄发伦，①关于Banach空间中的线性微分方程的小时滞稳定性问题，②关于具无界延滞的线性泛函微分方程的两个问题，第三次全国泛函微分方程会议交流资料(1984)，
[251] 刘和涛，①一类时滞微分方程无条件稳定的代数判定，②具无限时滞泛函微分方程的微分不等式，③关于反向延拓的一些结果，第三次全国泛函微分方程交流资料，(1984)。
[252] 吕绍明、苏美玉，具有时滞的线性时变大系统的平稳振荡，待发表。
[253] 王政贤和赖定文，过电压研究中出现的一个泛函微分方程，第三次全国泛函微分方程会议交流资料（1984）
[254] T. A. Burton, Lecture Notes on periodic solutions of volterra Equations, 东北师范大学印(1984)。
[255] R. Grimmer and G. Seifert, Stability Properties of volterra Integrodifferential Equations, J. Diff. Eqs. 19 (1975) 142—166.
[256] B. D. Caleman and V. T Mizel, Narms and Semi—groups in the theory of fading memory, Arch. Rationol Mech, Aual. 23 (1666), 87—123.